



FA 7 A 222-III

OP E R U M N E W T O N I .

T O M U S T E R T I U S .

Vol. III.

2

IS A A C I N E W T O N I

O P E R A

Q U Æ E X S T A N T O M N I A .

C O M M E N T A R I I S I L L U S T R A B A T

S A M U E L H O R S L E Y , L L . D . R . S . S .

R E V E R E N D O A D M O D U M I N C H R I S T O P A T R I

R O B E R T O E P I S C O P O L O N D I N E N S I A S A C R I S .

T O M . I I I .

---

L O N D I N I :  
E X C U D E B A T J O A N N E S N I C H O L S .

M D C C L X X X I I .



IN HOC TOMO CONTINENTUR  
IPSIUS NEWTONI,

I. <i>Principiorum Liber Tertius, de Systemate Mundi,</i>	Pag. 1
II. <i>De Mundi Systemate,</i>	176
III. <i>Theoria Lune,</i>	243
IV. <i>Lectiones Opticae,</i>	250

EDITORIS,

*De Viribus Centralibus quae rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servant.*

PHILOSOPHIÆ  
NATURALIS  
PRINCIPIA  
MATHEMATICA.

A R G U M E N T A   C A P I T U M  
L I B R I   T E R T I I   P R I N C I P I O R U M.

	<i>Regule Philosophandi.</i>	Pag. 1
	<i>Phænomena.</i>	5
SECT. I.	<i>De Causis Systematis Mundani.</i>	11
SECT. II.	<i>De Quantitate Errorum Lunarium.</i>	57
SECT. III.	<i>De Quantitate Æstûs Marini.</i>	104
SECT. IV.	<i>De Præcessione Æquinoctiorum.</i>	111
SECT. V.	<i>De Cometis.</i>	121

## MUNDI SYSTEMATE.

## LIBER TERTIUS.

**I**N Libris præcedentibus Principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur; uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest, ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis infueverunt: & propterea, ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur, qui principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quàm plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulò legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones, hinc citatas, pro lubitu consulat.

## R E G U L Æ

## P H I L O S O P H A N D I.

## R E G U L A I.

*Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ sint, & earum phænomenis explicandis sufficiant.*

**D**ICUNT utique Philosophi: Natura nihil agit frustra; & frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est, & rerum causis superfluis non luxuriat.

## R E G U L A II.

*Ideoque Effectuum naturalium ejusdem generis eadem assignandæ sunt Causæ, quatenus fieri potest.*

Uti respirationis in Homine & in Bestiâ; descensus lapidum in Europâ & in Americâ; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in Terrâ & in Planetis.

## R E G U L A III.

*Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universonum habendæ sunt.*

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt; ideoque generales statuendæ sunt, quotquot cum experimentis generaliter

neraliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt au-  
ferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè con-  
fingenda non sunt, nec à Naturæ analogiâ recedendum est, cum  
ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum  
non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia  
sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora  
plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius à duritie  
partium; & inde non horum tantum corporum quæ sentiuntur,  
sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò  
concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse non ratione sed  
sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur,  
& inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corpo-  
rum universonum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus qui-  
busdam (quas vires inertie vocamus) perseverare in motu vel qui-  
ete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Ex-  
tensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertie totius  
oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & vi-  
ribus inertie partium: & inde concludimus omnes omnium cor-  
porum partes minimas extendi, & duras esse, & impenetrabiles,  
& mobiles, & viribus inertie præditas. Et hoc est fundamen-  
tum Philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas, & sibi  
mutuò contiguas, ab invicem separari posse, ex Phænomenis no-  
vimus; & partes divisas in partes minores ratione distingui posse,  
ex Mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ distinctæ  
& nondum divisæ per vires Naturæ dividi, & ab invicem separari  
possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento,  
quòd particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & soli-  
dum, divisionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ,  
quòd non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quòd  
indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu Terræ gravia esse in Ter-  
ram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & Lunam gravem  
esse in Terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nos-  
trum grave esse in Lunam, & Planetas omnes graves esse in se mu-  
tuò, & Cometarum similem esse gravitatem in Solem, per expe-  
rimenta & observationes Astronomicas universaliter constat: di-  
cendum erit, per hanc Regulam, quòd corpora omnia in se mu-  
tuò

tuò gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de Gravitate universali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen Gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiae. Hæc immutabilis est. Gravitās, recedendo à Terra, diminuitur.

## REGULA IV.

*In Philosophiâ experimentalī, Propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesebus, pro veris aut accuratè, aut quamproximè, haberi debent, donec alia occurrerint Phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxia.*

Hoc fieri debet, ne argumentum inductionis tollatur per hypothefes.

(\*) Confer Librum posthumum de Systemate Mundi § 6.

P H Æ N O -

## P H Æ N O M E N A.

## P H Æ N O M E N O N I.

*Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas de-* LIBER  
TERTIUS.  
*scribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

CONSTAT ex observationibus Astronomicis. Orbes horum planetarum non differunt sensibilibus à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica esse in sesquuplicatâ ratione semidiametrorum orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabulâ sequente manifestum est (a).

*Satellitum Jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''.$   $3^d.13^h.13'.42''.$   $7^d.3^h.42'.36''.$   $16^d.16^h.32'.9''.$

*Distantiæ Satellitum à centro Jovis.*

<i>Ex observationibus.</i>	I	2	3	4	
Borelli.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	} Semidiam. Jovis.
Townlei per microm.	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini per telescop.	5	8	13	23	
Cassini per eclips. satell.	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
<i>Ex temporibus periodicis.</i>	5,667	9,017	14,384	25,299	(b).

(b) TEMPORA

DISTANTIÆ

Quibus Satellites Jovis conversiones suas Fixarum ratione absolvunt.

Satellitum à Centro Jovis ex Eclipsibus Satellitum à Cassino observatis.

	I	II	III	IV		I	II	III	IV
Temporum rat.	152854	306822	618156	1441929	Distantiarum rat.	5,666	9	14,383	25,3
Rat. dupl.	1	2,007	4,044	9,433		1	1,5882	2,5383	4,4646
	1	4,028	16,353	88,983	Rat. Triplicatæ	1	4,006	16,354	88,991

Vides miram planè convenientiam Rationum quæ distantiarum sunt triplicatæ, cum iis quæ sunt duplicatæ temporum.

Elongationes satellitum Jovis & diametrum ejus D. Pound micrometris optimis determinavit, ut sequitur. Elongatio maxima heliocentrica Satellitis quarti à centro Jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit; & prodiit, in mediocri Jovis à Terrâ distantia, 8'. 16" circiter. Ea Satellitis tertii micrometro in telescopio pedes 123 longo capta fuit; & prodiit, in eâdem Jovis à Terrâ distantia, 4'. 42". Elongationes maximæ reliquorum Satellitum, in eâdem Jovis à Terrâ distantia, ex temporibus periodicis prodeunt 2'. 56'. 47", & 1'. 51". 6".

Diameter Jovis micrometro in telescopio pedes 123 longo sæpius capta fuit; & ad mediocrem Jovis à Sole vel Terrâ distantiam reducta, semper minor prodiit quàm 40", nunquam minor quàm 38", sæpius 39". In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40" vel 41". Nam lux Jovis per inæqualem refrangibilitatem non-nihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum Jovis in longioribus & perfectioribus telescopiis, quàm in brevioribus & minus perfectis. Tempora quibus Satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus Jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, & ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope telescopii ejusdem longioris. Et diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ distantia, prodiit, per transitum Primi satellitis,  $37\frac{1}{8}$ "; & per transitum Tertii,  $37\frac{3}{8}$ ". Tempus etiam, quo umbra primi satellitis transiit per corpus Jovis observatum fuit, & inde diameter Jovis, in mediocri ejus à Terrâ distantia, prodiit 37" circiter. Assumamus diametrum ejus esse  $37\frac{1}{4}$ " quamproximè; & elongationes maximæ satellitis primi, secundi, tertii, & quarti æquales erunt semidiametris Jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 respectivè.

## P H Æ-

## (\*) TEMPORA

Quibus Satellites Saturni conversiones suas Fixarum ratione absolunt.

	I	II	III	IV	V
Temporum rationes	163107	236482	390312	1377672	6853620
Rationes duplicatæ	1	1,450	2,393	8,446	42,02
	1	2,102	5,726	71,33	1765,6

DISTANTIÆ

## P H Æ N O M E N O N II.

*Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, ☿ eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

*Satellitum Saturniorum tempora periodica.*

1<sup>d</sup>. 21<sup>h</sup>. 18'. 27". 2<sup>d</sup>. 17<sup>h</sup>. 41'. 22". 4<sup>d</sup>. 12<sup>h</sup>. 25'. 12". 15<sup>d</sup>. 22<sup>h</sup>. 41'. 14". 79<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 48'. 00".

*Distantiæ Satellitum à centro Saturni in semidiametris Annuli.*

Ex observationibus 1 $\frac{1}{2}$ . 2 $\frac{1}{2}$ . 3 $\frac{1}{2}$ . 8. 24.  
Ex temporibus periodicis 1,93. 2,47. 3,45. 8. 23,35. (°)

Quarti satellitis elongatio maxima à centro Saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproximè. At elongatio maxima satellitis hujus à centro Saturni, micrometro optimo in telescopio Hugenario pedes 123 longo capta, prodiit semidiametrorum octo cum septem decimis partibus semidiametri. Et ex hac observatione & temporibus periodicis, distantia Satellitum à centro Saturni in semidiametris Annuli sunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem telescopio erat ad diametrum Annuli ut 3 ad 7, & diameter Annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719, prodiit 43". Et inde diameter Annuli, in mediocri Saturni à Terrâ distantia, est 42"; & diameter Saturni, 18". Hæc ita sunt in telescopiis longissimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœlestium in longioribus telescopiis majorem habeant proportionem ad dilata-

DISTANTIÆ Satellitum à centro Saturni. Cassini observatæ.

	I	II	III	IV	V
Distantiarum rationes	1,95	2,5	3,5	8	24
Rationes triplicatæ	1	1,280	1,7950	4,1025	12,307
	1	2,107	5,783	69,05	1864,0

tionem

tionem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus.  
 Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter Saturni haud  
 major quàm 16".

## PHÆNOMENON III.

*Planetas quinq̃ue primarios, Mercurium, Venerem, Martem, Jovem  
 & Saturnum, orbibus suis Solem cingere.*

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi, ex eorum phasi-  
 bus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra Solem fiti  
 sunt; dimidiatâ è regione Solis; falcatâ cis Solem, per discum  
 ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Mar-  
 tis quoque plenâ facie, prope Solis conjunctionem, & gibbosâ in  
 quadraturis, certum est, quòd is Solem ambit. De Jove etiam  
 & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur:  
 hos enim luce à Sole mutuata splendere, ex umbris satellitum in  
 ipsos projectis manifestum est.

## PHÆNOMENON IV.

*Planetarum quinque primariorum, & vel Solis circa Terram vel  
 Terræ circa Solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus,  
 esse in ratione sesquiplacatâ mediocrium distantiarum à Sole.*

Hæc à Keplero<sup>(d)</sup> inventa ratio in confesso ad apud omnes.  
 Eadem utique sunt tempora periodica, eademque orbium dimen-  
 siones, five Sol circa Terram, five Terra circa Solem revolvatur.  
 Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter  
 Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium Keplerus &  
 Bullialdus omnium diligentissimè ex observationibus determinave-  
 runt: & distantiae mediocres, quæ temporibus periodicis respon-  
 dent,

(d) Vide Kepleri Harmonicen Mundi, p. 189, et Epitomen Astron. Copern. p. 501.

## TEMPORA

Quibus Planetæ conversiones suas Fixarum ratione absolvunt.

	♄	♀	♁	♂	♃	♅
Dies	88	224,666	365,25	687, —	4332,5	10759,33
Temporum rationes	1	2,553	4,150	7,807	49,23	122,26
Rationes duplicatae	1	6,516	17,22	60,941	2423,0	14947,0

DISTANTIAE

dent, non differunt sensibilibiter à distantis quas illi invenerunt,  
 suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabulâ se-  
 quente videre licet.

*Planetarum ac Telluris tempora periodica circa Solem respectu Fixa-  
 rum, in diebus & partibus decimalibus diei.*

♄	♃	♁	♂	♀	♅
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

*Planetarum ac Telluris distantiae mediocres à Sole.*

	♄	♃	♁	♂	♀	♅
Secundum Keplerum	951000	519650	152350	100000	72400	38800
Secundum Bullialdum	954198	522520	152350	100000	72398	38585
Secundum tempora periodica	954006	520096	152369	100000	72333	38710

De distantis Mercurii & Veneris à Sole disputandi non est lo-  
 cus, cum hæc per eorum elongationes à Sole determinantur. De  
 distantis etiam superiorum planetarum à Sole tollitur omnis dis-  
 putatio per Eclipses satellitum Jovis. Etenim per eclipses illas  
 determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine  
 habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem  
 heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distan-  
 tia Jovis.

## PHÆNOMENON V.

*Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere tem-  
 poribus minimè proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas  
 temporibus proportionales percurrere.*

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt,  
 nunc etiam regrediuntur: at Solis respectu semper progrediun-  
 tur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius  
 tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabi-

## DISTANTIAE

Planetarum à Sole medias sumendo earum quæ à Keplero et Bullialdo positæ sunt.

	♄	♀	♁	♂	♃	♅
Distantiarum rationes	3869	7240	10000	15235	52108	95260
Rationes triplicatae	1	1,8713	2,5846	3,9372	13,468	24,621
	1	6,551	17,26	61,03	2443	14925

VOL. III.

B

lis



DE MUNDI SYSTEMATE  
lis fit descripto. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprimè demonstratur per Eclipses satellitum; quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudes & distantias à Sole determinari diximus.

## PHÆNOMENON VI.

*Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.*

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo (f).

(f) Locum hunc de Phænomenis in Libro posthumo de Mundi Systemate eleganter pertractatum habes, § 1—9.

P R O P O -

## P R O P O S I T I O N E S.

## S E C T I O I.

LIBER  
TERTIUS.

De Causis Systematis Mundani.

## P R O P. I. T H E O R. I.

*Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, ☿ in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, ☿ esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.*

**P**ATET pars prior Propositionis per Phænomenon primum, & Propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per Phænomenon primum, & Corollarium sextum Propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon secundum.

## P R O P. II. T H E O R. II.

*Vires, quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, ☿ in orbibus suis retinentur, respicere Solem, ☿ esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.*

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon quintum, & Propositionem secundam libri primi: & pars posterior per Phænomenon quartum, & Propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quàm minima à ratione duplicatâ (por Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) motum Apfidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem, efficere deberet.

B 2

P R O P.

## PROP. III. THEOR. III.

*Vim, quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram, & esse reciproce ut quadratum distantiae locorum ab ipsius centro.*

Patet assertionis pars prior per Phænomenon sextum, & Propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. 1.) quod si distantia Lunæ à centro Terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis, à quâ motus talis oriatur, sit reciproce ut  $D^{2\frac{2}{3}}$ , id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cujus index est  $2\frac{2}{3}$ , hoc est, in ratione distantiae paulo majore quàm duplicata inversè, sed quæ partibus  $59\frac{1}{4}$  propius ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hîc negligendus est. Actio Solis quatenus Lunam distrahit à Terrâ, est ut distantia Lunæ à Terrâ quamproximè; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. 1.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad  $178\frac{2}{3}$ . Et neglectâ Solis vi tantillâ, vis reliqua, quâ Luna retinetur in orbe, erit reciproce ut  $D^2$ . Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

*Corol.* Si vis centripeta mediocris, quâ Luna retinetur in orbe, augeatur primò in ratione  $177\frac{2}{3}$  ad  $178\frac{2}{3}$ , deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ à centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad superficiem Terræ; posito quòd vis illa, descendendo ad superficiem Terræ, perpetuò augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicatâ.

## PROP.

(\*) Posito utique Lunam, in orbe circulari, cujus diameter bis sexaginta semidiametrorum terrestrium esset, circum Terram in centro ejus circuli immobilem, spatium mensis quem vocant periodici, æquabili cum motu ferri; calculis exquisitè subductis, invenio rectam, quæ diametri ejus circuli arcusque à Lunâ scrupuli primi spatium conficiendi proportionem sit tertia, invenio, inquam, hanc rectam pedum Parisiensium 15,009. Atque hoc est spatium, quod corpus, vi illâ incitatum, quâ Luna in orbe illo circulari retinenda esset, rectâ cadendo, scrupuli primi spatium conficeret.

Prop.

## PROP. IV. THEOR. IV.

*Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.*

Lunæ distantia mediocris à Terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque Astronomorum, 59; secundum *Vendelinum* & *Hugenium*, 60; secundum *Copernicum*,  $60\frac{1}{2}$ ; secundum *Streetum*,  $60\frac{2}{3}$ ; & secundum *Tychonem*,  $56\frac{1}{2}$ . Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quàm Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi  $60\frac{1}{2}$  semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; & lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti à *Gallis* mensurantibus definitum est: & si Luna motu omni privari fingatur, ac demitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per Corol. Prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in Terram; hæc, spatio minuti unius primi cadendo, describet pedes Parisienses  $15\frac{1}{12}$ . Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem xxxvi. libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius, quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium  $15\frac{1}{12}$  circiter, vel magis accuratè pedum 15, dig. 1, & lin.  $1\frac{4}{5}$  (8). Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicatâ distantiae ratione inversâ, ideoque ad superficiem Terræ major sit partibus  $60 \times 60$  quàm ad Lunam; corpus, vi illâ in re-

(Prop. IV. Cor. 9.) Sed vis, quæ Lunam in orbe illo retineret, cum differentia sit virium quarum majus centrum Terræ, minus centrum Solis respicit, vi illâ centrum Terræ respiciente minor erit: atque eâ ratione minor quàm numerus 17775 minor numero 17875. (Prop. III. Cor.) Augetur igitur spatium illud pedum Parisiensium 15,009 pro hac ratione; venit spatium pedum Parisiensium 15,093 = 15 ped. 1 dig. 1 lin.  $\frac{1}{7}$ .

gionibus

gionibus nostris cadendo, describere deberet, spatio minuti unius primi, pedes Parisienses  $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ , & spatio minuti unius secundi pedes  $15\frac{1}{12}$ , vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin.  $1\frac{4}{9}$ . Et eadem vi Gravia reverà descendunt in Terram. Nam Penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum  $8\frac{1}{2}$ , ut observavit *Hugenius*. Et altitudo, quam Grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem Penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin.  $1\frac{7}{9}$ . Et propterea vis, quâ Luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem Terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos; ideoque (per Reg. I & II.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora, viribus utrisque conjunctis Terram petendo, duplo velocius descenderent; & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses  $30\frac{1}{6}$ : omnino contra experientiam <sup>(b)</sup>.

Calculus hic fundatur in hypothesi, quòd Terra quiescit. Nam si Terra & Luna moveantur circum Solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, distantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit  $60\frac{1}{2}$  semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per Prop. LX. Lib. I. <sup>(i)</sup>

*Scholium.*

Demonstratio Propositionis sic fusiùs explicari potest. Si Lunæ plures circum Terram revolverentur, perinde ut fit in systemate Saturni vel Jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) observarent legem Planetarum à *Keplero* detectam; & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Terræ, per Prop. I. hujus. Et si earum infima

<sup>(b)</sup> Vid. De Syst. Mundi § 10.

<sup>(i)</sup> NEMPE radius orbis circularis, quem Luna circum Terram, in centro orbis immobilem, men-  
fis periodici quem vocant spatio, conficeret, is minor esset quàm Lunæ, circum centrum gravita-  
tis, quod ipsi cum Terrâ est commune, circumactæ, à centro Terræ distantia. (Lib. I. Prop. LX.)  
Hanc ob causam Newtonus radium orbis illius circularis 60 semidiametrorum terrestrium posuit,  
cum distantia Lunæ, si maximæ minimæque sumatur media, sexaginta semidiametrorum terrest-  
rium

infima esset parva, & vertices altissimorum montium propè tan-  
geret: hujus vis centripeta, quâ retineretur in orbe, gravitates  
corporum in verticibus illorum montium (per computationem  
præcedentem) æquaret quamproximè; efficeretque, ut eadem lu-  
nula, si motu omni quo pergit in orbe suo privaretur, defectu  
vis centrifugæ, quâ in orbe permanerat, descenderet in Terram;  
idque eadem cum velocitate, quâ Gravia cadunt in illorum monti-  
um verticibus, propter æqualitatem virium quibus descendunt.  
Et si vis illa, quâ lunula illa infima descendit, diversa esset à Gra-  
vitate, & lunula illa etiam gravis esset in Terram, more corporum  
in verticibus montium: eadem lunula, vi utrâque conjunctâ, du-  
plo velocius descenderet. Quare cum vires utræque, & hæ cor-  
porum gravium, & illæ lunarum, centrum Terræ respiciant, &  
sint inter se similes & æquales, eadem (per Reg. I & II.) eandem  
habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ Luna retinetur in  
orbe suo, ea ipsa erit quam nos Gravitationem dicere solemus: idque  
maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplo  
velocius cadat, quàm corpora gravia solent cadere.

PROP. V. THEOR. V.

*Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumsaturnios in Sa-  
turnum, & Circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ re-  
trahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis re-  
tineri <sup>(k)</sup>.*

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumsaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reli-  
quorumque Circumsolarium circa Solem, sunt phænomena ejusdem  
generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea (per  
Reg. II.) à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum de-  
monstratum sit quòd vires, à quibus revolutiones illæ dependent,  
respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Sa-

trium cum semisse haud minor sit. Quâ in re non malè se conjecisse ex eo persuadere instituit, quòd  
si radium illum semidiametrorum sexaginta pro eâ ratione augeas, quâ, manente gravitatis lege,  
distantia Lunæ à Terrâ mobili radium illum superare debet, veniet planè longitudo sexaginta semi-  
diametrorum terrestrium cum semisse pro distantia illâ, qualem ferè eam Astronomi constituerunt.  
Vide Opus Posth. De System. Mundi §. 11.

<sup>(k)</sup> De Syst. Mundi § 12.

DE MUNDI SYST. MATE turno & Sole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in reſſu à Terrâ.

*Corol. 1.* Gravitas igitur datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motû legem tertiam mutua fit, Jupiter in fatellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

*Corol. 2.* Gravitationem, quæ Planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciproçè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

*Corol. 3.* Graves ſunt Planetæ omnes in ſe mutuò per Corol. 1 & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem, ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares; Sol & Luna perturbant Mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

*Scholium.*

Hactenus vim illam, quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur, Centripetam appellavimus. Eandem jam Gravitationem eſſe conſtat, & propterea Gravitationem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ Luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes Planetas per Reg. I, II & IV.

P R O P. VI. T H E O R. VI.

*Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis (1).*

Deſcenſus gravium omnium in Terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex Aëris perexiguâ reſiſtentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervârunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arenâ, Sale comuni, Ligno, Aquâ, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus ſuſpendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oſcilla-

(1) De Syſt. Mund. § 18, 19.

tionis.

tionis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, LIBER  
constituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & Aëris reſiſten-  
TERTIUS.  
tiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unâ & redibant diutiſſimè. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1 & 6. Prop. xxiv. Lib. 2.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis Actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum Lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quàm pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſto deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in Planetas eandem eſſe atque in Terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem Lunæ, & unâ cum Lunâ motu omni privata demitti, ut in Terram ſimul cadant; &, per jam antè oſtenſa, certum eſt quòd temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum Lunâ, ideoque quòd ſunt ad quantitatem materiæ in Lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam fatellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproçè ut quadrata diſtantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus à Jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus, ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hac Terrâ noſtrâ. Et eodem argumento Planetæ circumſolares, ab æqualibus à Sole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quàm maximè regulari; per Corol. 3. Prop. Lxv. Lib. I. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quàm cæteri: motus ſatellitum (per Corol. 2. Prop. Lxv. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à Sole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in Solem pro quantitate materiæ ſuæ, quàm Jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta  $d$  ad  $e$ : diſtantia inter centrum Solis & centrum

VOL. III.

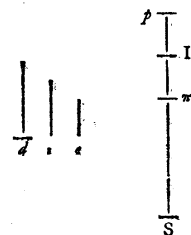
C

trum

trum orbis Satellitis, major semper foret quàm distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione subduplicatâ quàm proximè; uti calculo quodam inito inveni. Et si Satelles minùs gravis effret in Solem in ratione illâ  $d$  ad  $e$ , distantia centri orbis satellitis à Sole minor foret quàm distantia centri Jovis à Sole in ratione illâ subduplicatâ<sup>(m)</sup>. Ideoque si in æqualibus à Sole distantis, gravitas acceleratrix satellitis cujuscvis in Solem major effret vel minor quàm gravitas acceleratrix Jovis in solem, parte tantum millesimâ gravitatis totius; foret distantia centri orbis satellitis à Sole major vel minor quàm distantia Jovis à Sole parte  $\frac{1}{1000}$  distantiae totius, id est, parte quintâ distantiae satellitis extimi à centro Jovis<sup>(n)</sup>: quæ quidem orbis eccentricitas foret valdè sensibilis. Sed orbes satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera Saturni & comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantis, sunt ut quantitates materiae in ipsis: & pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1 & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minùs, quàm pro quantitate materiae: Planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiae totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratiâ corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

<sup>(m)</sup> NEMPE ut distantiarum inæqualitas virium inæqualitatem compensaret. Sit  $s$  distantia Jovis à Sole media. Vis autem acceleratrix illa quæ unum aliquem ex ejus satellitibus, puta extimum, ad distantiam  $s$  à sole constitutum, versus centrum Solis impelleret, major sit vi acceleratrice quæ Jovem ipsum impellit, pro ratione rectæ  $d$  ad  $e$ . Duarum  $d$ ,  $e$  capiatur: proportionem media. Capiatur  $sp$ , ad quam  $s$  rationem habeat eam quam  $d$  ad  $e$ . Si Satelles extimus in orbe quodam circumagatur, cujus centrum sit  $p$ , erit  $sp$  media Satellitis, orbem illum percurrentis, à Sole distantia. Vis autem, quæ Satelles in Solem impellitur in  $p$ , erit ad vim quæ eundem impelleret in  $r$ , ut  $s$  ad  $sp$ , five ut  $s^2$  ad  $d^2$ , five denique ut  $e$  ad  $d$ . Sed vis, quæ Jupiter in Solem impellitur in  $s$ , ad vim, quæ Satellitem in  $r$  in solem impelleret, rationem habet quam  $e$  ad  $d$ . Vis igitur acceleratrix, quæ Satelles in Solem impellitur in distantia  $sp$ , æqualis erit vi quæ Jupiter in Solem impellitur in distantia  $s$ . In orbe igitur illo, cujus centrum esset  $p$ , Satelles, ad mediam à Sole distantiam constitutus, pariter cum



pore Lunæ: si horum pondera essent ad corpora partium exter-<sup>LIBER</sup>  
narum Lunæ ut quantitates materiae in iisdem, ad pondera verò <sup>TERTIUS.</sup>  
partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quàm supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora universa, quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiae in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther, aut corpus aliud quodcunque, vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiae suæ minùs gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in Formâ materiae, posset idem per mutationem Formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiae quàm maximè gravitant; & vicissim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, posset gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possetque cum formis variari, contra quàm probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica Fluidi quo regio Aëris impleretur, ob summam densitatem materiae, nil cederet gravitati specificæ Argenti Vivi, vel Auri, vel corporis alterius cum Jove ipso pro materiae suæ modo in Solem impelleretur. In ulteriori ostenditur, hæc semicirculo minùs, in ceteriori magis. Quamobrem haud multo magis ab hoc orbe aberraret, quàm ab illo, cujus centrum corpus ipsum Jovis occuparet, si vires æquales in æqualibus à Sole distantis corpus utrumque, Jovis et Satellitis, in Solem urgerent. Quod si vis quæ Satellitem, ad distantiam  $s$  constitutum, in Solem impelleret, vi Jovem impellente minor esset pro ratione rectæ  $e$  ad  $d$ , simili prorsus argumentatione efficeretur, centrum orbitæ, quàm Satelles sine insigni aliquâ motûs sui perturbatione percurrere posset, in puncto  $r$  constituendum; cujus distantia à Sole,  $sr$ , ad Jovis à Sole distantiam  $s$ , rationem haberet quàm  $e$  ad  $d$ .

<sup>(n)</sup> Nempe distantia  $sp$ , vel  $sr$ :  $s$  = 1:2000. Sed  $s$  est ad mediam Satellitis extimi à Jove distantiam ut 443 ad 1; Astronomis sic definitibus (*De La Caille Leçons Element.* § 673.) Ex æquo perturbatè  $sp$  vel  $sr$  ad mediam Satellitis extimi à Jove distantiam ut 443 ad 2000; majori itaque  $sp$  vel  $sr$  quàm ut habeat ad mediam Satellites extimi à Jove distantiam rationem eam quàm 1 ad 5.

DE MUNDI  
SYSTEMATE

cujuscunque denfiffimi; & propterea nec Aurum neque aliud quodcunque corpus in Aëre descendere poffet. Nam corpora in Fluidis, nifi specificè graviora fint, minimè descendunt. Quòd fi quantitas materiæ in fpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poffit, quidni diminui poffit in infinitum?

*Corol. 4.* Si omnes omnium corporum particulæ solidæ fint ejufdem denfitatis, neque fine poris rareferi poffint, Vacuum datur. Ejufdem denfitatis effe dico, quarum vires inertiae funt ut magnitudines.

*Corol. 5.* Vis Gravitatis diverfi eft generis à vi Magneticâ. Nam attractio magnetica non eft ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minùs, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi poteft & remitti, eftque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ quàm vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrefcit in ratione distantiae non duplicatâ, fed ferè triplicatâ, quantum ex craffis quibufdam obfervationibus animadvertere potui.

## P R O P. VII. T H E O R. VII.

*Gravitatem in corpora univerfa fieri, eamque proportionalem effe quantitati materiæ in fingulis (°).*

Planetas omnes in fe mutuò graves effe jam antè probavimus, ut & gravitatem in unumquemque, feorfim fpectatum, effe reciprochè ut quadratum distantiae locorum à centro Planetæ. Et inde confequens eft (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) Gravitatem in omnes proportionalem effe materiæ in iisdem.

Porro cùm planetæ cujufvis, A, partes omnes graves fint in planetam quemvis B, & gravitas partis cujufque fit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motûs Legem tertiam) æqualis fit; planeta B in partes omnes planetæ A viciffim gravitabit, & erit gravitas fua in partem unamquamque ad gravitatem fuam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Q. E. D.

*Corol. 1.* Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes fingulas. Cujus rei exempla habemus

(°) De Syft. Mund. § 20—24.

in

in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes fingulas. Res intelligetur in Gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire, & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debet. Siquis objiciat quòd corpora omnia, quæ apud nos funt, hæc lege gravitare deberent in fe mutuò, cùm tamen ejufmodi gravitas neutiquam fentiat: refpondeo, quòd gravitas in hæc corpora, cùm fit ad gravitatem in Terram totam ut funt hæc corpora ad Terram totam, longè minor eft, quàm quæ fentiri poffit.

*Corol. 2.* Gravitatio in fingulas corporis particulas æquales eft reciprochè ut quadratum distantiae locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

## P R O P. VIII. T H E O R. VIII.

*Si Globorum duorum in fe mutuò gravitantium materia undique, in regionibus quæ à centrīs æqualiter diftant, homogenea fit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciprochè ut quadratum distantiae inter centra (P).*

Postquam inveniffem Gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & effe in partes fingulas reciprochè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quàm proximè. Nam fieri poffet ut proportio, quæ in majoribus diftantiis fatis accuratè obtineret, prope superficiem Planetæ, ob inæquales particularum diftantias & fitus diffimiles, notabiliter erraret. Tandem verò, per Prop. LXXV & LXXVI. Libri primi & ipfarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de quâ hic agitur.

*Corol. 1.* Hinc inveniri & inter fe comparari poffunt pondera corporum in diverfos Planetas (9). Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium funt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inverfè; & pondera ad superficies Planetarum, aliasve quasvis à centro diftantias, majora funt vel mi-

(P) De Syft. Mund. § 25, 26.

(9) De Syft. Mund. § 13—17.

nora

nora (per hanc Propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inverſâ. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum 16 $\frac{3}{4}$ , fatellitidis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum 16 $\frac{8}{15}$ , fatellitidis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum 22 $\frac{2}{3}$ , & Lunæ circum Terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris à Sole, & cum elongationibus maximis heliocentricis fatellitidis extimi circumjovialis à centro Jovis, 8'. 16". fatellitidis Hugeniani à centro Saturni 3'. 4". & Lunæ à centro terræ 10'. 33". computum ineundo (\*), inveni quod corporum æqualium, & à centro Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, pondera sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram ut 1, 1067, 1, 169282 & 169282 respectivè; & auctis vel diminutis distantis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium

(\*) Computationis ineundæ hæc est ratio.

Datur, ex Astronomorum decretis, ratio triplicata ejus quam media Stellæ Veneris à Sole distantia habet ad distantiam Stellæ Jovis à Sole mediam. Sed et distantia Jovis à Sole ad Satellitidis extimi à Jove distantiam triplicata ratio datur. Dabitur igitur ratio triplicata ejus, quam distantia Satellitidis extimi Jovialis à Jove habet ad mediam Stellæ Veneris à Sole distantiam. (Dat. 8.) Hæc autem ejus rationis duplicata erit, quam tempus conversionis Satellitidis extimi circa Jovem ad tempus habet, quo fatelles ille conversionem suam abſolveret, si distantia ejus à Jovis centro in eam diduceretur, quæ mediæ Veneris à Sole distantia æqualis esset. (Lib. 1. Prop. xv.) Datur autem tempus conversionis Satellitidis extimi circa Jovem. Dabitur igitur tempus, quo idem Satelles, ad distantiam à Jovis centro mediæ Stellæ Veneris à Sole distantia æqualem evectus, conversionem abſolveret. (Dat. 2.) Sed datum est tempus conversionis Veneris circa Solem. Data est igitur horum temporum duplicata ratio. Quare et temporum duplicatæ contraria dabitur. Sed duplicatæ horum temporum contraria est ipsa Virium ratio, quibus Satelles extimus in Jovem, & Venus in Solem impellerentur, in æqualibus utique hujusce à Sole illius à Jove distantis. Quare et virium illarum ratio data. Q. E. I.

#### Formulae computandi Algebraicæ.

Notis  $\varphi$ ,  $\Theta$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{H}$  significantur mediæ stellæ Veneris, Telluris nostræ, Jovis et Saturni à Sole distantia. Notis  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  mediæ Lunæ nostræ, Satellitidis extimi Jovialis, et Satellitidis Hugeniani à centro Terræ, Jovis, vel Saturni distantia. Litera  $v$  significetur tempus conversionis stellæ Veneris in orbe suo: literis  $l$ ,  $j$ ,  $b$ , tempora quibus Luna nostra, Satelles extimus Jovialis, et Satelles Hugenianus conversiones suas abſolvunt: literis  $s$ ,  $\tau$ ,  $j$ ,  $\Sigma$  significantur vires acceleratrices quibus in æqualibus à centro Solis, Terræ, Jovis vel Saturni distantis corpora in centra illa singulatim impelluntur.

Jam  $\varphi^3 : \mathcal{U}^3 = 6,551 : 2443$ . (Not. c.)

Et  $\mathcal{U}^3 : \mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^3 : \sin. 8^\circ - 16'$ .

Ex æquo  $\varphi^3 : \mathcal{A}^3 = 6,551 \times \mathcal{A}^3 : 2443 \times \sin. 8^\circ - 16'$ .

Litera  $\tau$  significetur tempus, quo Satelles extimus Jovialis conversionem suam abſolveret, si ad illam evectus esset à Jovis centro distantiam, quæ distantia  $\varphi$  à Sole æqualis esset.

Erit igitur  $2443 \times \sin. 8^\circ - 16' : 6,551 \times \mathcal{A}^3 (= \mathcal{A}^3 : \varphi^3) = j^3 : \tau^3$ . (Lib. 1. Prop. xv.)

Unde  $\tau^3 = \frac{j^3 \times 6,551 \times \mathcal{A}^3}{2443 \times \sin. 8^\circ - 16'}$ .

um corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè (\*). Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicetur in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantis ab eorum centris; id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terrâ sunt ut 1, 1067, 1, 169282 respectivè (\*). Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quàm 10'. 30'', debeat quantitas materiæ in Terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pon-

Sed  $v^2 : \mathcal{A}^2 = j : s$ . Quare  $s = \frac{j^2 \times \mathcal{A}^2}{v^2}$ ; vel pro  $j$  scribendo 1,  $s = \frac{j^2 \times 6,551 \times \mathcal{A}^2}{2443 \times \sin. 8^\circ - 16' \times v^2}$   
= 1064: nimirum pro  $j^2$ ,  $v^2$ , positis 16,689, 224,666. Quare vis Jovialis erit ad vim Solarem ut 1 ad 1064.

Simili modo si pro  $\Sigma$  scribatur 1, efficietur  $s = \frac{b^2 \times 6,551 \times \mathcal{A}^2}{14925 \times \sin. 3^\circ - 41' \times v^2} = 3114$ , nimirum pro  $v^2$  posito, ut antè, 224,666; pro  $b^2$ , 15,945. Quare vis Saturnia erit ad vim Solarem ut 1 ad 3114.

Ad vim Terrestrem inveniendam, statuo parallaxin Solis horizontalem, in mediâ ejus à Tellure distantia, 8,83, five 8-50, qualis ea à Cl. Maskelyno definita est. (Mayer. Tab.) Pro mense, quem vocant, periodico, per literam  $l$  designato, usurpo brevius quoddam temporis spatium, quod ad tempus illud  $l$  rationem habeat ejus, quæ est numeri 17775 ad numerum 17875, sub duplicatâ. Nam tali tempore Luna conversionem suam abſolveret, si cessante vi Solari vim Terrestrem solam et integram perciperet. Hoc tempus litera  $\lambda$  significetur. Radium denique orbitæ circularis, quam Luna, cessante tum vi Solis, tum propriâ quâ ipsa Terram incitat, circum Terram immobile tempore  $\lambda$  scriberet; hujus orbitæ radium cum Newtono statuo sexaginta semidiametrorum terrestrium. Et calculis ad priorum exemplum subductis, positâ  $\tau = 1$ , veniet  $s = \frac{\lambda^2 \times 6,551 \times \mathcal{A}^2}{17,26 \times \sin. 8^\circ - 50' \times v^2} = 329006$ . Quare vis Terrestris erit ad vim Solarem ut 1 ad 329006.

Pondera igitur Corporum æqualium in Solem, Jovem, Saturnum et Terram, in æqualibus à centris eorum distantis erunt ut 1, 1064, 3114, 329006, five ut numeri 10000. 9,3972. 3,2108. 0,030394.

(\*) NIMIRUM si Jovis, Saturni et Telluris nostræ semidiametri à Sole visæ, necnon Solis semidiameter è tellure visâ, in mediâ utique corporis cujunque à Sole distantia, tales essent quales cum sui seculi Astronomis Newtonus eas æstimavit, veras diametrorum rationes numeri à Newtono positi satis exquisitè exhiberent; 10000, 997, 791, 109. Cum verò semidiametri à Sole visæ, in mediis à Sole distantis, Jovis quidem sit 18,5; Saturni, 8; Terræ, 8,83 (modò rectè eas Juniores definiunt) existente Solis ipsius semidiametro, qualis è Tellure maximam inter minimamque media cernitur, 16-3, veræ semidiametrorum rationes hiæc ferè numeris exponendæ erunt

$\odot$  10000     $\mathcal{U}$  1001,0     $\mathcal{H}$  791     $\Theta$  91,69.

Inde verò, et ex virium in æqualibus distantis rationibus, quas suprà posuimus, venient virium in superficiebus rationes, quales hi numeri præ se ferunt

$\odot$  10000     $\mathcal{U}$  937,7     $\mathcal{H}$  512,69     $\Theta$  361,5.

(\*) Verius 1,1064, 3114, 329006.

dera corporum æqualium & homogeneorum in sphaeras homogeneas sunt in superficiebus sphaerarum ut sphaerarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque sphaerarum heterogeneorum densitates sunt ut pondera illa applicata ad sphaerarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109; & pondera in eisdem ut 10000, 943, 529 & 435 respectivè; & propterea densitates sunt ut 100, 94 $\frac{1}{2}$ , 67 & 400 (<sup>u</sup>). Densitas Terræ, quæ prodit ex hoc computo, non pendet à parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & propterea hîc rectè definitur (<sup>x</sup>). Est igitur Sol paulo densior quàm Jupiter, & Jupiter quàm Saturnus, & Terrâ quadruplo densior quàm Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarefcit. Luna verò densior est quàm Terra, ut in sequentibus patebit.

*Corol 4.* Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diversis utique distantiiis à Sole collocandi erant Planetæ, ut quilibet, pro gradu densitatis, calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret; si in orbe Mercurii, in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe

Mercurii

(<sup>u</sup>) Quod si tales sint diametrorum inter se, & ponderum rationes, quales nos posuimus; Densitates horum numerorum inter se proportionem gerent 100; 93,67; 64,78; 394,26. Postremo si omnia cum terrenis conferre placeat, Terræ, Jovis, Saturni et Solis diametri his ferè numeris

	☉	♃	♄	☉
exponi possint;	1	11	8,6	109
Hiscæ magnitudines	1	1331	636	1295029
Hiscæ vires absolutæ sive corpora	1	309	105+	329006
Hiscæ vires ad superficies	1	2,6	1,4	27,66
Hiscæ denique densitates	1	$\frac{10}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{39}$

(<sup>x</sup>) SIGNIFICANT literæ D, d Solis et Terræ diametros; literæ Δ, δ densitates, significantibus utique literis s, τ, vires Solis Terræque absolutas. Erit igitur Δ:δ = s × d<sup>3</sup>:τ × D<sup>3</sup>. Unde δ =  $\frac{\tau \times D^3 \times \Delta}{s \times d^3}$ . Vel pro Δ scribendo τ, δ =  $\frac{\tau \times D^3}{s \times d^3}$ . Significet litera s Solis semidiametrum δ Terrâ visam, in mediâ utique Solis distantia; litera τ, parallaxin ejus horizontalem mediam. Erit igitur D<sup>3</sup>:d<sup>3</sup> = (sin. 1)<sup>3</sup>:sin. π<sup>3</sup>. Unde  $\frac{D^3}{d^3} = \frac{\sin. \pi^3}{\sin. 1^3}$ . Hinc δ =  $\frac{\tau \times \sin. \pi^3}{s \times \sin. 1^3}$ . Jam vero  $\frac{\tau}{s} =$

27,26 ×

Mercurii quàm apud nos: & Thermometro expertus sum, quòd <sup>LIBER</sup> septuplo solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium verò non est, <sup>TERTIUS.</sup> quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hâc nostrâ; cum materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

### PROP. IX. THEOR. IX.

*Gravitatem, pergendo à superficiebus Planetarum deorsum, decrescere in ratione distantiarum à centro quàm proximè.*

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis effiet, obtineret hæc Propositio accuratè: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

### PROP. X. THEOR. X.

*Motus Planetarum in Cælis diutissimè conservari posse.*

In Scholio Propositionis XL. Lib. 2. ostensum est quòd globus Aquæ congelatæ, in Aëre nostro liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentiâ Aëris amitteret motûs sui partem  $\frac{1}{4586}$ . Obtinet autem eadem proportio quàm proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum Terræ nostræ densiorem effie, quàm si totus ex Aquâ constaret, sic

$\frac{17,26 \times \sin. 8-50^1 \times v^2}{\lambda^2 \times 6,551 \times r^2}$  (per formulam generalem vis Solaris suprà traditam (Not. v.) Vel, si

pro quantitate datâ  $\frac{17,26 \times v^2}{\lambda^2 \times 6,551 \times r^2}$  ponatur A,  $\frac{\tau}{s} = A \times \sin. 8-50^1$ . Vel magis generaliter

$\frac{\tau}{s} = \frac{A \times B^3 \times \sin. \pi^3}{d^3}$ , significante literâ s radium orbitæ circularis, quam Luna, cessante tum

Solis vi, tum ipsius propriâ, tempore λ circa Terram immobilem conficeret. Nam sin. 8-50<sup>1</sup> illud est, quod fit augendo cubum δ sinu parallaxeos solis horizontalis pro ratione triplicatâ ejus, quam semidiameter Terræ ad radium illius orbitæ Lunaris habet. Hinc autem efficitur δ =

$\frac{A \times B^3 \times \sin. \pi^3 \times \sin. s^3}{d^3 \times \sin. \pi^3} = \frac{A \times B^3 \times \sin. s^3}{d^3}$ . Literâ ρ significetur parallaxis Lunæ horizon-

talıs, qualem utique ad distantiam s ea haberet. Erit B<sup>3</sup>:d<sup>3</sup> = r<sup>3</sup>:sin. ρ<sup>3</sup>. Unde  $\frac{B^3}{d^3} =$

$\frac{r^3}{\sin. \rho^3}$ , et δ =  $\frac{A \times r^3 \times \sin. s^3}{\sin. \rho^3}$ . Quare δ, Terræ densitas, è sinu anguli ρ definienda est, nullâ

parallaxeos solaris ratione habitâ. Angulus autem ille ρ ad veram Lunæ parallaxin mediam rationem datam habet; eam utique, quam media Lunæ à Terrâ mobili distantia ad distantiam s.

VOL. III.

D

colligo.



DE MUNDI  
SYSTEMATE

colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio Terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc, si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento, maculæ solares leviores sunt quam materia lucida solaris, cui supernant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est, quod copia materiæ totius in Terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit, quam si tota ex Aquâ constaret; præsertim cum Terram quasi quadruplo densiorem esse quam Jovem jam antè ostensum sit. Quare si Jupiter paulo densior sit quam aqua, hic spatium dierum triginta, quibus longitudinem 459 semidiametrorum suarum describit, amitteret, in Medio ejusdem densitatis cum Aëre nostro, motus sui partem ferè decimam (γ). Verum cum resistentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac densitatis, sic ut Aqua, quæ partibus 1.3 $\frac{1}{2}$  levior est quam Argentum Vivum, minùs resistat in eadem ratione; & Aer, qui partibus 860 levior est quam Aqua, minùs resistat in eadem ratione: si ascendatur in coelos, ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immensum, resistentia propè cessabit. Ostendimus utique in Scholio ad Prop. xxii. Lib. 2.

quod

(γ) NIMIRUM si litera D significet diametrum Jovis, litera τ tempus quo stella Jovis, cum velocitate illâ quam maximæ minimæque mediam habet, spatium in inani conficeret, quod esset ad  $\frac{1}{2}$  D ut densitas materiæ quæ est in corpore Jovis ad densitatem liquoris ejus, per quem iter ei faciendum est; tempore quovis alio t, globus Jovialis ex liquoris illius renixu partem velocitatis suæ amitteret, quæ erit ad eam, quæ initio fuit, ut t ad τ + t. (Lib. 2. Prop. xxxv. Cor. 7.) Puta igitur materiam quæ est in Jove pari cum Aquâ nostrâ densitate præditam; globum autem Jovis per liquorem aliquem ferri, qui Aerem nostrum densitate referat. Ita erit densitas materiæ Jovialis ad densitatem liquoris, per quem iter ei faciendum est, ut 860 ad 1. Et cum Jovis diameter è Sole visa amplitudinem habeat 37, amplitudo arcus cælestis, qui ad  $\frac{1}{2}$  D rationem habeat quam 860 ad 1, ea erit 23° 36' 16". Talem verò arcum stella Jovis, cum velocitate mediâ, spatium dierum 283 cum semisse ferè absolvet. Atque hoc erit spatium tempore, quod literâ τ designavimus, conficiendum. Unde si pro t ponatur spatium dierum 30, erit t ad τ + t ut 30 ad 310,5, hoc est ut 1 ad 10 propemodum. Velocitas igitur quam stella Jovis, si per Aerem nostrum ferretur spatium dierum

LIBER  
TERTIUS.

quod si ascenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum supra Terram, Aër ibi rarior foret quam ad superficiem Terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, seu 7500000000000 ad 1 circiter (z). Et hinc stella Jovis in Medio ejusdem densitatis cum aere illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ Medii non amitteret motus sui partem decimam centesimam millesimam (aa). In spatiis utique Terræ proximis, nihil invenitur, quod resistentiam creet, præter aërem, exhalationes, & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis, gravia intra vitrum liberrimè & sine omni resistentiâ sensibili cadunt; ipsum Aurum & Pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, & casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex, vel octo, simul incidunt in fundum, ut experimentiâ compertum est. Et propterea si in coelos ascendatur, aëre & exhalationibus vacuos, Planetæ & Cometæ, sine omni resistentiâ sensibili, per spatia illa diutissimè movebuntur.

## HYPOTHESIS I.

*Centrum Systematis Mundani quiescere.*

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui Terram, alii Solem in centro systematis quiescere contendunt. Videamus quid inde sequatur.

## PROP. XI. THEOR. XI.

*Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.*

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiescet vel pro-

dierum 30 amitteret, pars quasi decima totius esset.

(\*) Vide De System. Mundi § 68. & confer Sect. vi. Dissertationis nostræ de Aere et Barometro inter Acta Philosophica Anni 1774 editæ.

(aa) Imo partem hujus decimæ centesimæ millesimæ sexagesimâ haud multo majorem. Cum enim stella Jovis, si cum velocitate suâ mediâ per inane ferretur, spatium dierum 283 $\frac{1}{2}$  longitudinem conficeret, quæ esset ad  $\frac{1}{2}$  D ut 860 ad 1 (Not. γ); omnino longitudinem, quæ esset ad  $\frac{1}{2}$  D ut 860 × 750000000000 ad 1, non nisi spatium dierum 283 $\frac{1}{2}$  × 750000000000 conficeret. Si igitur stella Jovis per liquorem feratur eâ densitate præditum, quæ sit ad corporis Jovialis densitatem, ut 1 ad 860 × 750000000000, pro tempore τ, in Corollario 7. Prop. xxxv. Libri secundi, ponendi erunt dies 21625000000000, sive Anni Ægyptiaci 5820000000000. Unde si pro t ponantur Anni Ægyptiaci 1000000, erit t ad τ + t ut 1 ad 58200001; sive numeris quod aiunt rotundis, ut 1 ad 60000000. Pars igitur velocitatis, quæ spatio annorum Ægyptiacorum 1000000 amittitur, ea decimæ centesimæ millesimæ quasi sexagesima erit.

D 2

gredietur

DE MUNDI  
SYSTEMATE **g**redietur uniformiter in directum. Sed, centro illo semper pro-  
grediente, centrum Mundi quoque movebitur, contra Hypothesin.

PROP. XII. THEOR. XII.

*Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere à com-  
muni gravitatis centro Planetarum omnium.*

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole sit ad ma-  
teriam in Jove ut 1067 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semi-  
diametrum solis in ratione paulo majore; incidet commune cen-  
trum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem  
solis. Eodem argumento, cum materia in Sole sit ad materiam  
in Saturno ut 3021 ad 1, & distantia Saturni à Sole sit ad semi-  
diametrum solis in ratione paulo minore: incidet commune cen-  
trum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superfi-  
ciem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si Terra &  
Planetæ omnes ex unâ solis parte consisterent, commune omnium  
centrum gravitatis vix integrâ solis diametro à centro Solis dista-  
ret (bb). Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est.  
Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quiescit, Sol,  
pro vario Planetarum situ, in omnes partes movebitur, sed à cen-  
tro illo nunquam longè recedet (cc).

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Pla-  
netarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum  
Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuò, & propterea,  
pro vi gravitatis suæ, secundum leges motûs perpetuò agitentur:  
perspicuum est, quòd horum centra mobilia pro Mundi centro  
quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum  
esset,

(bb) PUTA enim centra Solis, Telluris, Jovis et Saturni ad rectam esse: Solis quidem ad s, Terræ  
ad r, Jovis ad j, Saturni ad s. Sit, locus centri gra-  
vitatibus quod corporum duorum, Solis Jovisque, est com-  
mune. Quod trium, Solis, Jovis, et Saturni, est com-  
mune, ejus locus fit o; quod horum denique trium cum  
quarto terrestri est commune, ejus locus fit s. Dico rectam s9 diametro Solis minorem esse. Po-  
laris, qualis media ferè è tellure cernitur, fit r6 - "3, erit sr = 214. Unde cum distantia Plane-  
tarum à Sole rationes inter se habeant quales supra exposuimus (Not. c) erit s1 = 1116,1 et  
ss = 2040,4.  
Jam verò cum corpus Solis sit ad corpus Jovis ut 1064 ad 1 (Not. r) erit sj ad s1 ut 1065 ad  
1. Sed sj = 1116,1. Ergo s1 = 1,048. Sed ss = 2040,4. Quare u = 2039,352.  
Rursum cum corpus Solis sit ad corpora Jovis et Saturni ut 10000 ad 9,3972 & 3,2108 (Not. r)  
erunt

LIBER  
TERTIUS.  
effet, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi est opi-  
nio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol  
moveatur, eligendum erit punctum quiescens, à quo centrum  
solis quàm minimè discedit, & à quo idem adhuc minùs disce-  
deret, si modò sol densior esset & major, ut minùs moveretur.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

*Planetæ moventur in Ellipsis umbilicum habentibus in centro Solis;  
☉, radiis ad centrum illud ductis, areas describunt temporibus  
proportionales.*

Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cog-  
nitis motuum principiiis, ex his colligimus motus cœlestes à priori.  
Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciprocè ut qua-  
drata distantiarum à centro solis; si Sol quiesceret, & Planetæ re-  
liqui non agerent in se mutuò, forent orbes eorum Elliptici, so-  
lem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur tem-  
poribus proportionales (per Prop. I & XI. & Corol. 1. Prop. XIII.  
Lib. 1.) Actiones autem Planetarum in se mutuò perexiguæ sunt  
(ut possint contemni) & motus planetarum in Ellipsis circa so-  
lem mobilem minùs perturbant (per Prop. LXVI. Lib. 1.) quàm si  
motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omninò contemnen-  
da. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus  
distantiis) ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Satur-  
ni, quoniam distantia Saturni à Jove est ad distantiam Saturni à  
Sole ferè ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem  
Saturni in Solem ut 81 ad 16 × 1067, seu 1 ad 211 circiter. Et

erunt corpora Solis Jovis et Saturni ad corpus Saturni ut 10012,6 ad 3,211. Unde u ad u ut  
10012,6 ad 3,211. Sed u = 2039,352. Ergo u = 0,654.

Rursum cum corpus Solis sit ad corpus Terræ ut 10000 ad 0,0304 (Not. r) calculis similiter sub-  
ductis invenietur o9 = 0,0006.

Hinc s1 = 1,048  
sr = 0,654  
s9 = 0,0006.

Quare s9 = 1,703 Sed diameter Solis erat 2. Quare s9 minor erit diametro Solari. Martis,  
Veneris, et Mercurii quanta sint corpora, ignotum est. Haud tamen verisimile est tanta ea esse,  
ut, centris omnium ad rectam s1 positis, distantia centri gravitatis systematis totius distantia s9 eâ  
ratione major sit, quâ numerus vicinarius numero 17 major est. At eâ ratione augeri oportet  
rectam s9, ut diametro Solari æqualis evadat.

(c) De System. Mundi § 28.

hinc

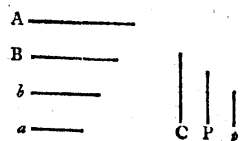
hinc oritur perturbatio orbis Saturni, in singulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus, adeo sensibilis, ut ad eandem Astronomi hæreant. Pro vario situ Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur; Aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur; & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem, à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè potest, constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) Et propterea, ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum, & Jovis in Solem sunt ferè ut 16, 81 &  $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$  seu 156609, ideoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609, seu 1 ad 2409. Huic autem differentię proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longè minor est quàm ea saturnii<sup>(dd)</sup>. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longè minores, præterquam quòd orbis Terræ sensibilibiter perturbatur à Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit; & radio ad solem ducto, areas in eadem temporibus proportionales describit; Terra verò circum hoc centrum commune motu mensuero revolvitur<sup>(ee)</sup>.

## P R O P.

(dd) Vide Tabulas Halleii Fff. 2. paginâ versâ.

(ee) De System. Mund. § 29.

(ff) De System. Mund. § 30.



læ Martis à Sole media ad mediam Telluris ab eodem distantiam habet. Capiatur recta s, quæ habeat ad a rationem eam, quam motus angularis, quem spatium conversionis stellæ Martis circum Solem vis Jovis in Aphelio orbitæ ejus stellæ effecerit, ad motum angularem ejusdem Aphelii à vi Jovis, dato quale posuimus temporis spatium, efficiendum. Capiatur alia b quæ ad illam

(ee) EXPRONATUR data quævis recta a; sit alia a quæ ad illam a rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ terrestris, qualem dato quovis temporis spatium, puta centum annis, vis Jovis effecerit, ad motum angularem habet, quem eodem temporis spatium vis Jovis in Aphelio orbitæ Martis effecerit. Motus autem angulares dico, quales è centro Solis, in mediâ corporis cuiusque à Sole distantia, cernerentur. Dico a ad a rationem habere susquiplacatam ejus, quam distantia stellæ Martis à Sole media ad mediam Telluris ab eodem distantiam habet. Capiatur recta s, quæ habeat ad a rationem eam, quam motus angularis, quem spatium conversionis stellæ Martis circum Solem vis Jovis in Aphelio orbitæ ejus stellæ effecerit, ad motum angularem ejusdem Aphelii à vi Jovis, dato quale posuimus temporis spatium, efficiendum. Capiatur alia b quæ ad illam

B RA-

## P R O P. XIV. T H E O R. XIV.

LIBER  
TERTIUS.

*Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.*

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & orbium plana, per ejusdem libri Prop. I. &, quiescentibus planis, quiescunt Nodi. Attamen à planetarum revolventium & cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hinc contemni possunt<sup>(ff)</sup>.

*Corol. 1.* Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quòd datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

*Corol. 2.* Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis, ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum, ob immensam corporum distantiam, nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo Fixæ, in omnes cœli partes æqualiter dispersæ, contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

*Scholium.*

Cum planetæ soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem: horum Aphelia & Nodi quiescent, nisi quatenus à viribus Jovis, Saturni & corporum superiorum turbentur. Et inde colligi potest, per Theoriam gravitatis, quòd horum Aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu Fixarum, idque in proportionem sesquiplacatâ distantiarum horum planetarum à Sole<sup>(gg)</sup>. Ut si Aphelium

a rationem habeat, quam motus angularis Aphelii orbitæ Terrestris unius anni spatium à vi Jovis efficiendus, ad motum angularem Aphelii orbitæ Martis, qualem conversionis integræ stellæ Martis spatium vis Jovis in eo effecerit. Ità b ad a rationem habebit eam, quam motus angularis annuus Aphelii orbitæ Terrestris, à vi Jovis oriundus, ad motum ejusdem Aphelii, dato quali posuimus temporis spatium, efficiendum. Sit recta c, quæ ad duas alias, p, p, rationes habeat quas datum temporis spatium, quo conficiuntur motus A, a, ad annos, si ita loqui liceat, Martialem et Terrestram singularem. Jam cum a et b sint ut spatia motu æquabili, temporibus quæ sunt ut c, p, conficienda, erit A ad b ut c ad p; vel ut rectangulum c x p ad quadratum ex p. Et cum a et b sint ut motus angulares, quos in aphelis Martis et Telluris vis Jovis, annorum Martialis Terrestrisque spatiis, singularem effecerit; et cum anni illi sint ut p, p, erit b ad b ut p<sup>2</sup> ad p<sup>2</sup>. (Princip. Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 16.) Rursum cum b & a sint ut spatia motu æquabili (nam de mediis Apheliorum motibus hic agitur) temporibus quæ sunt ut p, c conficienda, erit b ad a ut p ad c, vel ut quadratum ex p ad rectangulum c x p. Cum igitur sit A : b = c x p : p<sup>2</sup>; et b : a = p<sup>2</sup> : p x c; ex æquo erit a : a = p : p.

Motus

Aphelium Martis in annis centum conficiat  $33'.20''$  in consequentia respectu Fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficiant  $17'.40''$ ,  $10'.53''$ , &  $4'.16''$  respectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propositione.

## PROP. XV. PROB. I.

*Invenire Orbium principales diametros.*

Capiendæ sunt hæ in ratione sesquiplicatâ temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. i. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. Lx. Lib. i.

## PROP. XVI. PROB. II.

*Invenire orbium Eccentricitates & Aphelia.*

Problema confit per Prop. xviii. Lib. i.

## PROP.

Motus igitur angulares, quos in orbitalum Martialis Terrestrique apheliis, dato quovis temporis spatio, vis Jovis effecerit, ii temporum, quibus Martis Tellurisque globi conversiones suas singulatim absolvunt, inter se rationem habent. Quæ autem temporibus illis ratio intercedit, ea sesquiplicata est ejus, quæ orbitalum axibus transversis. (Lib. i. Prop. xv.) Motus igitur apheliorum angulares, à vi Jovis, rationem inter se habent distantiarum planetarum à Sole sesquiplicatam. Simili argumento concludemus motus angulares, à vi Saturni oriundos, eandem sesquiplicatam distantiarum rationem inter se servare. Quare et motus integri, à viribus illis conjunctis oriundi, eandem inter se rationem gerent. Q. E. D.

Ita ni fallor firmissimis rationibus geometricis probavimus, quæ de sesquiplicatâ distantiarum ratione inter motus Apheliorum servandâ Newtonus pronuntiavit. Num igitur injuriâ dixero delirasse planè virum clarissimum J. Bernouillum, cum Newtonum dicat "nullo fundamento merâ que apparentiâ nixum videri in constituendâ hac ratione sesquiplicatâ." (Dissert. de System. Cartesii.)

(<sup>hh</sup>) Ex Institutionibus Astronomicis Nicolai Mercatoris, p. 285 & seq.

"Observatum est, quod præter motum in longitudinem & latitudinem, qualem Lib. 2. Sect. II. exposuimus, habeat quoque varias librationes circa sui centrum, quibus maculæ transferuntur à medio orbe in ortum, occasum, septentrionem & austrum; & dum aliæ ex parte illuminatæ transeunt in obscuram, aliæ contrâ emergunt ex obscurâ, & in lucidam concedunt. Adhibito globo terrestri, & elevato polo boreo ad ipsum Zenith, elige insulam quandam sub æquatore sitam, v. gr. D. Thomæ, quam ipsi cardini austri adjunges, ubi Meridianus Horizontem fecit, & oculum tenebis in rectâ à centro per dictam insulam continuatâ. Tum cogitato, hanc insulam referre maculam Lunarem in ipso centro disci positam; & voluto globo versus sinistram, donec insula septem circiter gradus conficiat in Horizonte, videbis omnes res."

"liquas

## PROP. XVII. THEOR. XV.

*Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem in Luna ex ipsius motu diurno oriri.*

Patet per motûs Legem i. & Corol. 22. Prop. Lxvi. Lib. i. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56'; Mars horis 24. 39; Venus horis 23 circiter; Terra horis 23. 56'; Sol diebus 25½, & Luna diebus 27. 7 hor. 43'. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. Maculæ in corpore Solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus 27½ circiter, respectu Terræ; ideoque respectu fixarum Sol revolvitur diebus 25½ circiter. Quoniam verò Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus semper respiciet quamproximè, & propterea pro situ umbilici illius deviat hinc inde à terrâ. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem: nam libratio in latitudinem orta est ex latitudine Lunæ & inclinatione axis ejus ad planum Eclipticæ. Hanc librationis lunaris Theoriam D. N. Mercator, in Astronomiâ suâ initio anni 1676 editâ, ex literis meis plenius exposuit (<sup>hh</sup>). Simili motu extimus Saturni fatelles circa axem suum revolvit

"liquas partes telluris conspicuas eodem motu vergere in ortum. Mox reductâ insulâ ad Meridianum, & porro ad dextram septem gradibus, videbuntur omnes partes globi conspicuæ vergere in occasum. Talis est libratio Lunæ in ortum & occasum; quæ absolvitur, dum Luna ab Apogeo redit ad Apogeon, perambulans octavam circiter partem diametri Lunaris prope centrum. Rursus dictam insulam pone sub Meridiano; & fixo globo, move polum ultra & citra verticem ad septem vel octo graduum ab eo distantiam; tum videbis, & insulam, & reliquas partes globi nunc in septentrionem abscedere, nunc rursus in austrum nutare. Atque hujusmodi est libratio Lunæ in septentrionem & austrum, quæ absolvitur, dum Luna à Nodo ascendente revertitur ad eundem, & quam non ineptè vocaveris *librationem in latum*, estque priorî illâ in longum aliquantò major. Cæterùm hæ duæ librationes Lunæ sunt solutæ, nulli cum Sole congressui alligatæ, quanquam earum prior ab inæqualitate Lunæ mensurâ nonnihil augetur in quadraturis. Tertia verò respicit partem Lunæ illuminatam & obscuram, ideò que partim phasibus mensuris, partim verò situi nodorum accepta ferenda est. Concipietur autem quodammodo, si polum utrumque globi terrestri deponas in Horizonte ligneo, ita ut alteruter eorum referat maculam in centro disci Lunaris, & oculum teneas in axe continuato; Meridianum verò intelligas referre circulum illuminationis, qui discernat hemisphærium Lunæ obscurum ab illuminato, & sit (phantasiæ juvandæ gratiâ) pars ad lavam luci Solis exposita, dum altera versatur in umbrâ; & nequid desit, pone primum Meridianum terrestrem sub Meridiano æneo. Jam si paululum dimoveas Meridianum primum ab æneo versus lavam, videbis partes superiores globi excedere à tenebris, & in lucem erumpere, dum inferiores à luce in tenebras abscedunt: factâque reciprocatione, si revolvās primum Meridianum ad æneum, & ultra ad dextram; contrarium evenire. Hæc libratio secundum Hevelium 5 circiter gradibus continetur, in limbo Lunæ computandis.

"Harum tam variarum atque implicitarum Librationum causis Hypothesi elegantissimâ explicavit

R

"plicavit

revolvi videtur, eâdem sui facie saturnum perpetuò respiciens. Nam circum saturnum revolvendo, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam, in eâ corporis parte quæ Terræ tunc obvertitur, ut *Cassinus* notavit. Simili etiam motu satelles extimus jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quòd in parte corporis Jovi averfâ maculam habeat, quæ tanquam in corpore Jovis cernitur, ubicunque satelles inter Jovem & oculos nostros transit.

## P R O P. XVIII. T H E O R. XVI.

*Axes planetarum diametris, quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur, minores esse.*

Planetæ, sublato omni motu circulari, diurno figuram sphaericam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circula rem fit, ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia, si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit; axem verò, descensu suo ad polos, diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem argu-

mento,

“plicavit nobis Vir Cl. Isaac Newton, cujus Humanitati hoc & aliis nominibus plurimum debere me lubens profiteor. Hanc igitur hypothesin, Lectori gratificaturus, exponam verbis, ut potero; nam delineationes in plano vix sufficiunt huic negotio, præterquam quòd iis jam abundat hoc enchiridion. Itaque reversus ad globum, cogita nunc illum representare sphaeram, in qua movetur Luna, cujus centrum occupet Tellus. Ipsum verò Lunæ globum credito poli & axe suo instructum, circa quem revolvatur motu æquabili semel mense fiderio, dum à Fixâ aliquâ digressa ad eandem revertitur; & æquator Lunaris ad firmamentum continuatus intelligatur congruere plano Horizontis lignei, & polus æquatoris Lunaris in firmamento imineat polo boreo globi ad Zenith elevato. Orbitam verò Lunæ concipito partim supra Horizontem ligneum attolli, partim verò infra eundem deprimi; quemadmodum in hoc situ globi conspicitur Ecliptica (sicet angulus Æquatoris Lunaris & ejus Orbitæ fortè non sit æquæ magnus, atque hic, quem globus exhibet). Deinde finge tibi globulos duos æquales; quorum uterque Polis, Æquatore, & Meridiano unico primario insigniatur; & uterque filo suspendatur alterutri polorum alligato. Horum alter referat Lunam fictitiam motu æquabili secundum ductum Horizontis lignei circumlatam, atque eodem tempore circa axem suum revolutam respectu firmamenti; ita ut planum Meridiani primarii Lunaris perpetuò transeat per centrum Terræ. Alter verò globulus, veram Lunam imitatus, in orbitâ suâ feratur motu inæquali, nunc supra Horizontem ligneum emergens, nunc rursus infra eundem descendens; ita ut planum Æquatoris hujus Lunæ veræ semper parallelum maneat plano Horizontis lignei, & planum Meridiani primarii ejusdem Lunæ veræ semper parallelum plano Meridiani primarii Lunæ fictæ. Ita fiet, ut Luna ficta eandem nobis faciem obvertens semper, nulli prorsus librationi sit ob-

“noxia.

mento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatorem quàm ad Lib. TERTIUS. polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

## P R O P. XIX. P R O B. III.

*Invenire proportionem Axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.*

*Norwoodus* noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam latitudinum 2 gr. 28' collegit mensuram gradûs unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300 (kk).

*Picartus* mensurando arcum gradûs unius & 22'. 55" in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradûs unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. *Cassinus* sentior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum 486156½, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31'. 11½". Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus Terræ pedum Parisiensium 123249600,

“noxia. At Luna vera, dum à Perigeo pergit ad Apogeon, præcedens Lunam fictam, Meridianum suum primarium ostendit in medietate sinistra sui disci, tot gradibus abeuntem à medio, quot sunt inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. Ab Apogeo verò ad Perigeon descendens Luna vera sequitur fictam, atque tum Meridianus primus veræ Lunæ recedit ab ejus medio ad dextram; hoc est, maculæ omnes vergunt in occasum. Et cum differentia inter medium & veram Lunæ longitudinem in quadraturis evadat major, propter evectionem Systematis Lunarum à centro Telluris; hinc est, quòd in quadraturis librationes in longum cernuntur majores. Similiter intelligitur causa librationis in latum, quando Luna superato nodo ascendente (sive sectione Horizontis lignei & Orbitæ suæ) tendit ad limitem boreum; tum enim nobis, in centro Sphæræ positus, polus Lunæ boreus, & quæ sint circa eum maculæ, absconduntur; & polus australis cum suis maculis in conspectum venit: unde maculæ omnes conspicue in boream tendere videntur. Contrarium accidit, Lunâ ad limitem australem accedente. Ab iisdem causis procedit macularum ex parte lucidâ in obscuram transitus, & vicissim. Nam in limite australi polus Lunæ boreus à Sole illustratur, & quicquid est Zonæ frigidae Arcticæ Lunari inclusum; dum frigida australis in tenebris versatur. Quòd si igitur Solem concipias in eadem plagâ cum limite australi, & Lunam post conjunctionem inde procedere ad nodum ascendentem; tum maculæ superiores, apud polum boreum sitæ, paulatim unâ eum suo polo à luce in tenebras cedunt, dum inferiores maculæ cum nodo australi ex tenebris in lucem prorupunt. Contrarium eveniet semestri post, cum Sol accessit ad limitem Lunæ boreum.” Confer Lib. De Syst. Mund. § 36.

(kk) Verius 57424.

DE MUNDI SYSTEMATE & femidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothefi quòd Terra fit fphærica.

In latitudine *Lutetiae Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius fecundi cadendo describit pedes Parisienses 15 dig. 1 lin.  $1\frac{7}{9}$  ut fuprà, id eft, lineas  $2173\frac{7}{9}$ . Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus pondus amiffum effe partem undecimam millefimam ponderis totius, & corpus illud grave, cadendo in Vacuo, describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius fecundi.

Corpus in circulo, ad diftantiam pedum 19615800 à centro, fingulis diebus fidereris horarum 23. 56. 4" uniformiter revolvens, tempore minuti unius fecundi describet arcum pedum 1433,46 <sup>(ll)</sup>, cujus finus verfus eft pedum 0,0523656, feu linearum 7,54064 <sup>(mm)</sup>. Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiae*, eft ad vim centrifugam corporum in æquatore, à Terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064 <sup>(nn)</sup>.

Vis centrifuga corporum in æquatore Terræ eft ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à Terrâ in latitudine *Lutetiae* graduum 48. 50'. 10", in duplicatâ ratione radii ad finum complementi latitudinis illius, id eft, ut 7,54064 ad 3,267 <sup>(oo)</sup>. Ad datur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illâ *Lutetiae*, & corpus in latitudine illâ, vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius fecundi describet lineas 2177,267 <sup>(pp)</sup>, feu pedes

<sup>(ll)</sup> Verius ni fallor 1430,4.

<sup>(mm)</sup> Verius pedum 0,0519151, feu linearum 7,47577.

<sup>(nn)</sup> Ut 2174 ad 7,47577.

<sup>(oo)</sup> Ut 7,47577 ad 3,23885.

<sup>(pp)</sup> 2177,239, feu pedes Parisienses 15, dig. 1, lin. 5,239.

<sup>(qq)</sup> Ut 2177,239 ad 7,47577.

<sup>(rr)</sup> 291,2 ad 1. Si igitur numeris quod aiunt rotundis rationem vis totius gravitatis *Lutetiae* ad vim centrifugam corporum sub æquatore eam statueris, quam numerus 290 ad unitatem habet, haud multum à vero ut opinor aberraveris.

<sup>(ss)</sup> Ad vires æftimandas quibus Terra corpusculum in polo *Q* positum verfus centrum fui, *c*, trahat, intelligatur punctum *P*, in figurâ Cor. 2. Prop. xci. Lib. 1. evanefcente rectâ *PA*, cum ipfo *A* cconjungi. Ita fient *PS*, *AS* æquales; & vires, quibus fphærois *ACBG* corpusculum in *A* vel *P* positum in centrum fui trahat, ad vires quibus fphæra, diametro *AB* fcripta, idem corpusculum incitaret, rationem habebunt quam  $\frac{AS \times CS^2 - AS \times KMRK}{CS^2}$  ad  $\frac{1}{3}AS$ , five eam quam  $CS^2 - KMRK$  ad  $\frac{1}{3}CS^2$ .

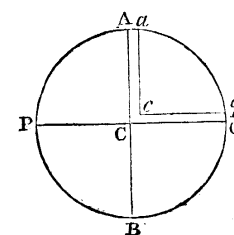
Dato igitur quadrato ex *CS*, ad virum æftimationem opus erit definire aream *KMRK*, five *AMA*, fig. p. 38. Hunc in finem fectio conica, *ARM* fpecie et magnitudine definienda erit.

Jam verò (in fig. Cor. 2. Prop. xci. Lib. 1.) fi fphæroideos axis *AB* diametro ejus *cs* fit minor, fectio conica *KRM* Ellipfis erit. Sit *z* centrum ejus (fig. p. 38). Erit *ZA* femiaxis ejus transversus. Ponatur *zr* femiaxis fecundus. E naturâ Ellipfeos erit  $ZA^2 - ZE^2 : ZA^2 - ZS^2 = BM^2 : ST^2$ .

Convertendo

pedes Parisienses 15 dig. 1 & lin. 5,267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore Terræ ut 2177,267 ad 7,54064 <sup>(qq)</sup> feu 289 ad 1 <sup>(rr)</sup>.

Unde fi *APBQ* figuram Terræ defignet jam non amplius fphæricam, fed revolutione ellipfeos circum axem minorem *PQ* genitam, fitque *ACQca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ, in canalis crure *Acca*, effe ad pondus aquæ in crure altero *Qccq* ut 289 ad 288; eo quòd vis centrifuga, ex circulari motu orta, partem unam è ponderis partibus 289 fuftinebit ac detrahet, & pondus



288 in altero crure fuftinebit reliquas. Porro (ex Propositionis xci. Corol. 2. Lib. 1.) computationem ineundo, invenio quòd fi Terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, & effe ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in Terram foret ad gravitatem in eodem loco *q* in fphæram, centro *c*, radio *pc* vel *qc* descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in fphæroidem, convolutione ellipfeos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, eft ad gravitatem in eodem loco *A* in fphæram centro *c* radio *Ac* descriptam, ut 125 ad 126 <sup>(ss)</sup>. Eft autem gravitas in loco *A* in Terram media proportionalis inter gravitates in dictam fphæroidem.

Convertendo & invertendo  $ZS^2 - ZB^2 : ZA^2 - ZB^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$ .

Hoc est, fi capiatur  $ZB = ZB$ ,  $BS \times BS : BA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$ .

Invertendo  $BA \times AB$ , five  $2BA \times SB : BS \times SB = BM^2 : BM^2 - ST^2$ .

Sive  $2BA : BS = BM^2 : BM^2 - ST^2$ .

Quare  $BA : BS = \frac{1}{2} BM^2 : BM^2 - ST^2$ .

Dividendo  $AS : SB = ST^2 - \frac{1}{2} BM^2 : BM^2 - ST^2$ .

Sed punctis *P*, *A* (in fig. Cor. 2. Prop. xci. Lib. 1.) coeuntibus, erunt illæ *BM*, *ST* ipsæ *AB*, *AC* æquales.

Quare  $AS : SB = AC^2 - \frac{1}{2} AB^2 : AB^2 - AC^2$ .

Sed  $AC^2 - \frac{1}{2} AB^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS^2 = SC^2 - AS^2$ .

Quare  $AS : SB = SC^2 - AS^2 : AB^2 - AC^2$ .

Quare  $SB = \frac{AB^2 - AC^2}{SC^2 - AS^2} AS$ .

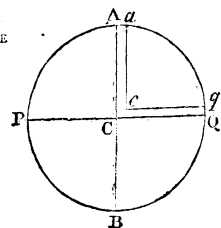
Ponatur  $AB^2 - AC^2 = p$ , &  $SC^2 - AS^2 = q$ .

Erit igitur  $SB = \frac{p}{q} AS$ : et  $BB = \frac{p}{q} AS - AS$ . Quare  $ZB = \frac{p}{2q} AS - \frac{1}{2} AS$ .

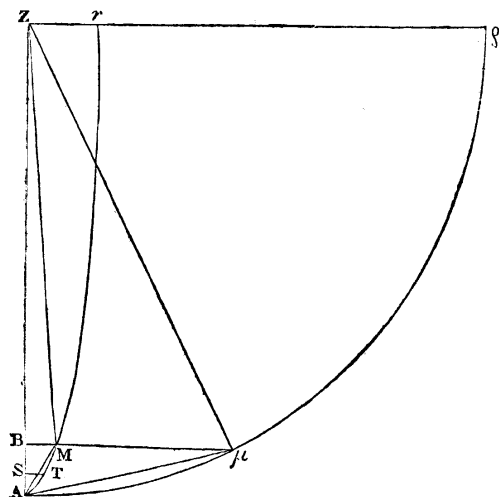
Quare  $ZA = \frac{p}{2q} AS + \frac{1}{2} AS = \frac{p+3q}{2q} AS$ .

Vel, posito  $p+3q=r$ ,  $ZA = \frac{r}{2q} AS$ . Unde datis *AS*, *sc* dabitur *ZA*.

Jam



Jam  $zA^2 : zR^2 = zA^2 - zB^2 : BM^2$  vel  $AB^2$ .  
 Permutando  $zA^2 : zA^2 - zB^2 = zR^2 : AB^2$ .  
 Sed  $zA^2 : zB^2 = r^2 : p^2 - 2pq + q^2$ .  
 Quare  $zA^2 : zA^2 - zB^2 = r^2 : r^2 - p^2 + 2pq - q^2$ .  
 Sed  $r^2 = p^2 + 6pq + 9q^2$ .  
 Quare  $r^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 8pq + 8q^2$ .  
 Quare  $zA^2 : zA^2 - zB^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$ .  
 Hinc  $zR^2 : AB^2$  vel  $4AS^2 = r^2 : 8pq + 8q^2$ . Quare  $zR^2 : AS^2 = r^2 : 2pq + 2q^2$ .  
 Sed  $AS^2 : zA^2 = 4q^2 : r^2$ .  
 Ex æquo perturbatè  $zR^2 : zA^2 = 2q : p + q$ .  
 Unde  $zR : zA = \sqrt{2} \sqrt{q} : \sqrt{p + q} = \sqrt{2} \sqrt{sc^2 - AS^2} : \sqrt{2AS^2}$ .  
 Invertendo  $zA : zR = AS : \sqrt{sc^2 - AS^2}$ .



Ita erit  $p = 3 \times 100^2 - \frac{101^2}{2}$   
 $q = \frac{101^2}{2} - \frac{100^2}{2} = 201$   
 $3q = 3 \times 101^2 - 3 \times 100^2$   
 $r = p + 3q = 2 \times 101^2$   
 $\frac{r}{2q} = \frac{101^2}{201}$   
 Quare  $zA = 5075,12$ .

Rursum

## PHILOSOPHIÆ NATURALIS

sphæroidem & sphæram: propterea quòd sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura, diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; & gravitas in A, in casu utroque,

## PRINCIPIA MATHEMATICA.

que, diminuitur in eâdem ratione quàm proximè. Est igitur <sup>LIBER</sup> gravitas in A in sphæram, centro c radio AC descriptam, ad gra- <sup>TERTIUS.</sup> vitem

Rursum cum sit  $zA : zR = AS : \sqrt{sc^2 - AS^2} = 100 : \sqrt{201}$  erit  $zR = 719,523$ .  
 Rursum  $zB = zA - AB = 5075,1 - 200 = 4875,1$ .

Hinc arcus  $A\mu$ , cujus est cosinus  $zB$  pro radio  $zA$ ,  $= 16^\circ - 8' - 20''$ .

Quare sector circularis  $zA\mu = 3627522$ .

Sed  $B\mu$ , sinus arcus  $A\mu$  pro radio  $zA$ ,  $= 1410,7$

Quare triangulum  $zA\mu = 3579744$ .

Hinc segmentum circulare  $A\mu A = 47778$ .

Et segmentum Ellipseos  $AMA$ , cum ad segmentum circulare rationem habeat quam  $zR$  ad  $zA$ , hoc est eam quam 719,5 ad 5075,1; idcirco  $AMA = 6773,7$ .

Jam verò  $cs^2 = 10201$ .

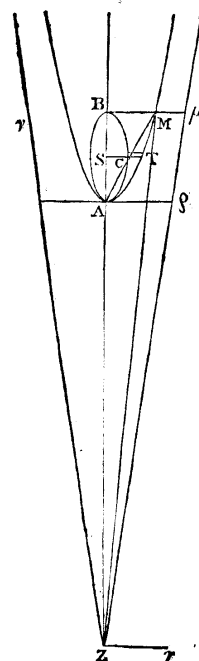
Quare  $cs^2 - AMA = 3427,3$ .

Sed  $\frac{cs^2}{3} = 3400,3$ .

Quare  $cs^2 - AMA = \frac{cs^2}{3} = 3427,3 : 3400,3 = 125,99 + : 125 = 126 : 125$  quam proximè.

Vires igitur, quibus Terra corpusculum in Polo positum versus centrum incitaret, si talis ejus figura esset, qualem ad computationem facilius ineundam Newtonus posuit, eæ ad vires quibus polletet sphæra, quæ ipsum axem diametrum haberet, rationem eam, quæ à Newtono allegata est, fatis exquisitè fervarent.

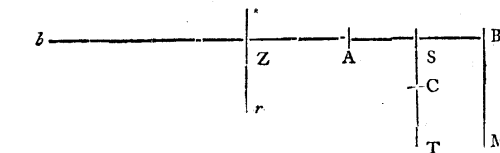
Vires autem, quibus sphærois conversione meridiani terrestri circa diametrum æquatoris generata corpusculum, in diametri illius extremitate positum, in centrum urgeret, ad vires sphærae, quæ æquatorem terrestrem circum in suis maximum haberet, rationem modò allegatæ contrariam gerere, calculis similiter subductis ostendimus.



Nempe in figurâ Cor. 2. Prop. xcr. Lib. 1. si axis sphæroideos AB diametro ejus CG fit major, sectio conica KRM seu ARM Hyperbola erit. Sit z centrum ejus, ut fit ZA femiaxis transversus, & ponatur zR femiaxis secundus. Sint rectæ  $z\mu$ ,  $z\nu$  ejusdem asymptotæ; quarum alteri occurrat BM in  $\mu$ . Eidem in  $\nu$  occurrat recta  $A\epsilon$ , quæ hyperbolam in vertice A contingat. Jungatur zM.

Jam è naturâ Hyperbolæ  $zB^2 - zA^2 : zS^2 - zA^2 = BM^2 : ST^2$ .

Convertendo & invertendo  $zB^2 - zS^2 : zB^2 - zA^2 = BM^2 - ST^2 : BM^2$ .



Hoc est positis  $zB$ ,  $zB$  æqualibus,  $bs \times sb : bA \times AB = BM^2 - ST^2 : BM^2$ .

Id est  $bs \times sb : zBA \times sb = BM^2 - ST^2 : BM^2$ .

Quare  $bs : zBA = BM^2 - ST^2 : BM^2$ . Et  $bs : bA = BM^2 - ST^2 : \frac{1}{2}BM^2$ .

Convertendo et invertendo  $AS : sb = \frac{1}{2}BM^2 - ST^2 : BM^2 - ST^2$ .

Id est  $AS : sb = \frac{1}{2}AB^2 - AC^2 : AB^2 - AC^2 = AS^2 - SC^2 : AB^2 - AC^2$ .

Hinc  $sb = \frac{AB^2 - AC^2}{AS^2 - SC^2} AS$ .

Ponatur  $AB^2 - AC^2 = p$ . Et  $AS^2 - SC^2 = q$ .

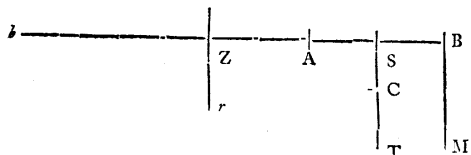
Tum  $sb = \frac{p}{q} AS$ . Et  $bB = \frac{p}{q} AS + AS$ .

Quare

vitatem in A in Terram ut 126 ad 125 $\frac{1}{2}$ ; & gravitas in loco Q in sphæram, centro c radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in sphæram, centro c radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Coniungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad 125 $\frac{1}{2}$ , & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram ad gravitatem in loco A in Terram, ut 126 × 126 × 100 ad 125 × 125 $\frac{1}{2}$  × 101, seu ut 501 ad 500<sup>(1)</sup>.

Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canali crure utrovis *Acca*, vel *Qccq*, sit ut distantia locorum à centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure *Acca* ad pondera partium totidem in crure

altero  
Quare  $zB = \frac{p}{2q} AS + \frac{1}{2} AS$ . Et  $ZA = zB - AB = zB - 2AS = \frac{p}{2q} AS - \frac{1}{2} AS = \frac{p-3q}{2q} AS$ . Vel posito  $p-3q=r$ ,  $ZA = \frac{r}{2q} AS$ .



Unde datis  $AS$ ,  $sc$  dabitur  $ZA$ .

Jam  $ZA^2 : zr^2 = zB^2 - ZA^2 : BM^2$  vel  $4AS^2$ . Permutando  $ZA^2 : zB^2 - ZA^2 = zr^2 : 4AS^2$ .

Sed  $ZA^2 : zB^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2$ .

Quare  $ZA^2 : zB^2 - ZA^2 = r^2 : p^2 + 2pq + q^2 - r^2$ .

Sed  $r^2 = p^2 - 6pq + 9q^2$ . Quare  $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 = 8pq - 8q^2$ .

Quare  $ZA^2 : zB^2 - ZA^2$ , sive  $zr^2 : 4AS^2 = r^2 : 8pq - 8q^2$ .

Quare rursum  $zr^2 : AS^2 = r^2 : 2pq - 2q^2$ .

Sed  $AS^2 : ZA^2 = 4q^2 : r^2$ .

Ex æquo perturbatè  $zr^2 : ZA^2 = 2q : p - q$ .

Invertendo  $ZA^2 : zr^2 = p - q : 2q = 2AS^2 : 2AS^2 - 2sc^2$ .

Quare  $ZA : zr = AS : \sqrt{AS^2 - sc^2}$ .

Datis igitur  $AS$ ,  $sc$ , propter  $ZA$  jam supra inventam, dabitur etiam  $zr$ .

Jam datarum  $ZA$ ,  $zB$  ratio dabitur. (Dat. 1.) Quare et illarum  $AS$ ,  $BM$  (fig. p. 39) ratio data. Sed  $AS$  magnitudine data est, nempe datæ  $zr$  æqualis. Quare  $BM$  magnitudine dabitur. (Dat. 2.) Sed  $BM$  magnitudine data est, quippe datæ  $AB$  æqualis. Quare  $AM$  magnitudine data. Datarum igitur  $AM$ ,  $AS$  ratio data. (Dat. 1.) Sed hujus rationis sector hyperbolicus  $AM$  est logarithmus, pro modulo utique triangulari  $zAq$ . Sed datis  $ZA$ ,  $AS$ , triangulum  $zAq$  magnitudine datum. Quare sector hyperbolicus  $zAM$  magnitudine datus. Sed triangulum  $zAM$  magnitudine datum, propter datas  $ZA$ ,  $BM$ . Segmentum igitur hyperbolicum  $AM$ , quo sector hyperbolicus à triangulo abest, magnitudine datum.

Ponatur jam  $as = 101$

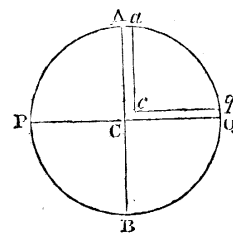
$sc = 100$ ;

nempe ut sphærois  $ACBG$  ejus sphæroideos figuram induat, quam meridianus terrestris, eâ figurâ præditus quam Newtonus posuit, circum axem suum transversum convertendo generaverit.

2

Ita

altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; <sup>LIBER TERTIUS.</sup> id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501.



Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure *Acca*, ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eò ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea Fluidum confisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejus-

dem ut 1 ad 289; hoc est, vis centrifuga, quæ deberet esse ponderis pars  $\frac{4}{505}$ , est tantum pars  $\frac{1}{289}$ . Et propterea dico, secundum regulam auream, quod si vis centrifuga  $\frac{4}{505}$  faciat ut altitudo aquæ in crure *Acca* superet altitudinem aquæ in crure *Qccq* parte centesimâ

$$\begin{aligned} \text{Ita erit } p &= 3 \times \frac{101^2}{100^2} - \frac{100^2}{100^2} \\ q &= \frac{101^2}{100^2} - \frac{100^2}{100^2} = 201 \\ 3q &= 3 \times \frac{101^2}{100^2} - 3 \times \frac{100^2}{100^2} \\ r = p - 3q &= 2 \times \frac{100^2}{100^2} \\ \frac{r}{2q} &= \frac{100^2}{201} = 49,751 \end{aligned}$$

$$ZA = \frac{r}{2q} AS = 49,751 \times 101 = 5024,851.$$

$$\text{Rursum } ZA : zr = AS : \sqrt{AS^2 - sc^2} = 101 : \sqrt{101^2 - 100^2} = 101 : \sqrt{201}.$$

$$\text{Quare } zr = 705,34$$

$$\text{Jam cum } ZA = 5024,851$$

$$\text{et } AB = 202,$$

$$\text{Erit } zB = 5226,851$$

$$\text{Sed } ZA : zB = AS \text{ vel } zr : BM.$$

$$\text{Quare } BM = 733,697$$

$$\text{Et } BM = 202$$

$$\text{Quare } \mu M = 531,697$$

$$\text{Triangulum } zAq = ZA \times \frac{1}{2} zr = 177212$$

$$\text{Quare sector hyperbolicus } zAM = 500816,4$$

$$\text{Triangulum } zAM = ZA \times \frac{1}{2} BM = 5024,851 \times 101 = 507509,9$$

$$\text{Quare segmentum hyperbolicum } AMA = 6693,5$$

$$\text{Sed } cs^2 = 10000$$

$$\text{Quare } cs^2 - AMA = 3306,5$$

$$\text{Sed } \frac{1}{2} cs^2 = 3333,3$$

Quare vires, quibus sphærois  $ACBG$  trahit corpusculum in A positum, ad vires sphære, cujus diameter  $AB$ , rationem habent quam 3306,5 ad 3333,3. Sed  $3306,5 : 3333,3 = 125 : 126,014 = 125 : 126$  propemodum.

(1) Nimirum cum gravitas in Terram in loco Q sit ad gravitatem in sphæram, cujus radius  $cc$ , ut 126 ad 125; et gravitas in hanc sphæram in loco Q ad gravitatem in sphæram alteram, cujus radius  $AC$  in loco A, ut 100 ad 101; et gravitas in hanc alteram sphæram ad gravitatem in Terram in loco A ut 126 ad 125 $\frac{1}{2}$ ; ex æquo Gravitas in Terram in loco Q erit ad gravitatem in Terram in loco A ut  $126 \times 126 \times 100$  ad  $125 \times 125 \frac{1}{2} \times 101$ ; sive ut  $126 \times 126 \times 4$  ad  $5 \times 125 \frac{1}{2} \times 101$ ; sive ut 63504 ad 63377,5. Sed 63377,5 ad 63504 ut 500 ad 500,998+, sive ut 500 ad 501 propemodum. Quare Gravitas in Terram in loco Q ad gravitatem in Terram in loco A ut 501 ad 500.

VOL. III.

F

totius



totius altitudinis: vis centrifuga  $\frac{1}{289}$  faciet ut excessus altitudinis in crure *Acca* sit altitudinis in crure altero *Qccq* pars tantum  $\frac{1}{229}$ . Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Picarti*, sit pedum Parisiensium 19615800, seu milliarum 3923,16 (posito quòd milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu pedum 85472, seu milliarum  $17\frac{1}{10}$ . Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si Planeta major sit vel minor quàm Terra, manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem; & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione; & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23.56', Jupiter autem horis 9.56', sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & revolutionum densitates ut 400 ad 94 $\frac{1}{2}$ : differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut  $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{279}$  ad 1, seu 1 ad 9 $\frac{1}{3}$  quamproximè<sup>(uv)</sup>. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 10 $\frac{1}{3}$  ad 9 $\frac{1}{3}$  quamproximè. Unde cum ejus diameter major sit 37', ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit 33".25". Pro luce erraticâ addantur 3" circiter; & hujus planetæ diametri apparentes evadent 40" & 36".25": quæ sunt ad invicem ut 11 $\frac{1}{6}$  ad 10 $\frac{1}{6}$  quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quòd corpus Jovis sit uniformiter densum. At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quàm versus polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel fortè 14 ad 13. Et

*Cassinus*

(uv) Verius ut 1 ad 9,4; modò in corporibus Terræ Jovisque ea sit densitatum ratio quam nos supra

*Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quòd Jovis diameter, ab oriente in occidentem porrecta, diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ. *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros Jovis, anno 1719, mensuravit ut sequitur.

Tempora.	Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
dies hor.	part.	part.	ut 12	ad 11
Jan. 28 6	13,40	12,28		
Mar. 6 7	13,12	12,20	13 $\frac{1}{2}$	12 $\frac{1}{2}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	12 $\frac{3}{4}$	11 $\frac{3}{4}$
Apr. 9 9	12,32	11,48	14 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$

Congruit igitur Theoria cum phænomenis. Nam Planetæ magis incallescunt ad lucem Solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquantur quàm versus polos.

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam Terræ nostræ minui sub æquatore, atque ideo Terram ibi altius surgere quàm ad polos (si materia ejus uniformiter densa sit) patebit per experimenta Pendulorum, quæ recensentur in Propositione sequente.

#### PROP. XX. PROB. IV.

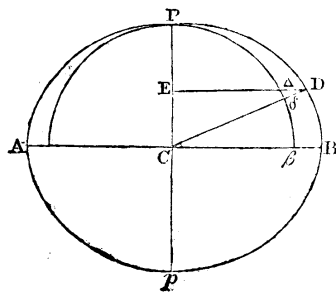
*Invenire & inter se comparare pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.*

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aquæ *Acqqa* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionaliter & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, ideoque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitarum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantie corporum à centro Terræ. Proinde si corpora in superis canalium partibus, sive in superficie Terræ, consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantie eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantie

supra constitutum; ut densitas Jovis sit ad densitatem Terræ ut 10 ad 42. Vide supra Not. v.

locorum à centro; & propterea, ex hypothefi quòd Terra sphæ-  
rois fit, dantur proportionem.

Unde tale confit Theorema; quòd incrementum ponderis per-  
gendo ab Æquatore ad Polos, fit quam proximè ut finus verſus la-  
titudinis duplicatæ; vel quod perinde eſt, ut quadratum finis recti  
latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum  
latitudinis in meridiano (<sup>xx</sup>). Ideoque cùm latitudo *Lutetia Pa-*  
*riſorum* fit 48<sup>gr</sup>. 50', ea locorum ſub æquatore 00<sup>gr</sup>. 00', & ea lo-  
corum ad polos 90<sup>gr</sup>. & duplorum finus verſi ſint 11334,00000  
& 20000, exiſtente radio 10000; & gravitas ad polum fit ad  
gravitatem ſub æquatore ut 230 ad 229, & exceſſus gravitatis ad  
polum



(<sup>xx</sup>) ELLIPSEI cujus centrum c, axis tranſverſus a b, ſecundus p q, meridianum aliquem dẽ terreſtribus refe-  
rat: ut ſint p, q poli telluris, b, locus aliquis in æ-  
quatore. Sit d locus aliquis in meridiano p q a b, inter  
polum & æquatorem, & jungatur c d. In locis e, d, p  
collocari puta corpora tria inter ſe æqualia ex ma-  
teria ſimili. Jam cùm pondera horum corporum rati-  
onem inter ſe gerant diſtantiarum eorum à centro c  
contrariam; diſtantiarum autem maxima ſit c p, minima  
c d, maximæ minimæque intermedia quedam c e; et eo  
minor cùm ſit c d quo minor diſtantia loci d à polo:  
hæc cùm ita ſint, corporis quod in b ſitum eſt pon-  
dus minimum erit; ejus quod in p, maximum; ejus  
quod in d, majus quidem pondere corporis quod in b,  
minus autem quàm ejus quod in p; eo autem majus

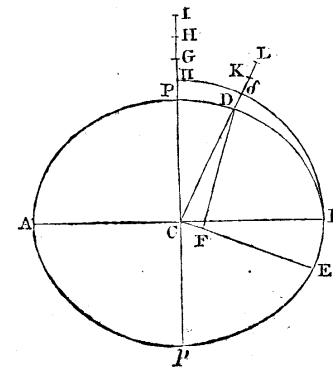
quo minor loci d à polo diſtantia. Dicit Newtonus, illud quo pondus corporis in d exſuperat pon-  
dus corporis in b eſſe ut quadratum ex ſinu latitudinis loci; id eſt, illud quo pondus corporis in  
polo p exſuperat pondus ejus quod in b, ad illud quo pondus corporis in d exſuperat pondus ejus  
quod in b, rationem habere quàm quadratum radii ad quadratum ex ſinu latitudinis loci d; ſive  
ad quadratum ex ſinu anguli b c d. Nam cùm Ellipſis b p a q parum admodum à Circulo recedat,  
angulus b c d angulo latitudinis loci d tantum non æqualis erit.

A puncto d in axem Ellipſeos ſecundum, a b, ad perpendicularum deducatur d e. Centro c, radio  
c p, ſcribatur circulus; qui rectis c b, e d, c a in punctis b, d, a occurrat. Jam cùm pondus cor-  
poris quod in p poſitum eſt ad pondus ejus quod in b rationem habeat quàm c a ad c p; id eſt,  
eam quàm c b ad c d: dividendo, illud quo pondus illius in p pondus hujus in b exſuperat ad pon-  
dus ipſum corporis in b rationem habebit quàm c b ad c d. Simili argumento efficietur, pon-  
dus corporis in b ad illud, quo abeſt à pondere ejus quod in d, rationem habere quàm c d vel c b  
ad d b. Ex æquo, illud quo pondus corporis in p exſuperat ejus quod in b, ad illud quo pon-  
dus corporis in d pondus corporis in b exſuperat, rationem habebit quàm b d ad d b. Ratio au-  
tem rectæ b d ad d b compoſita eſt dẽ rationibus rectæ b d ad d b, rectæque d b ad d b. Sed propter  
Ellipſin, b d erit ad d b ut c b ad d e. Et cùm Ellipſis à circulo parum admodum recedat, figura  
b d e à triangulo nec ſpecie parum diſſert, & ratio rectæ d b ad d b ejus, quàm c b habet ad b e,  
haud multum abſimilis erit. Quare ratio rectæ b d ad d b haud multum ab eâ abeſt, quæ com-  
ponitur dẽ rationibus rectæ c b ad d e rectæque c p ad d e, ſive eam quæ eſt rectanguli c b x c p ad  
quadratum ex d e. Sed, propter c b, c p tantum non æquales, rectangulum c b x c p quadrato  
ex c p tantum non æquale. Ratio igitur rectæ b d ad d b eam, quæ eſt quadrati c b x c p ad quadra-  
tum ex d e, proximè referret. Et c p ad d e (propter figuram Ellipſeos b p a q à circulari parum ab-  
horrentem) rationem habebit ab eâ, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis loci d, parum diverſam.  
Eſt igitur b d ad d b, ſive illud quo pondus corporis in polo pondus ejus quod in æquatore exſuperat,  
ad illud quo pondus corporis in loco d pondus ejus quod in æquatore exſuperat, ut quadratum  
radii

polum ad gravitatem ſub æquatore ut 1 ad 229: erit exceſſus  
gravitatis in latitudine *Lutetia* ad gravitatem ſub æquatore, ut  
 $1 \times \frac{11334}{20000}$  ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravi-  
tates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.  
Quare cùm longitudines Pendulorum, æqualibus temporibus of-  
cillantium, ſint ut gravitates; & in latitudine *Lutetia Pariſorum*  
longitudo Penduli, ſingulis minutis ſecundis ofcillantem, fit pedum  
trium Pariſienſium & linearum 8 $\frac{1}{2}$ , vel potius, ob pondus Aëris,  
8 $\frac{1}{9}$ : longitudo Penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine  
ſynchroſi Penduli Pariſienſis, exceſſu lineæ unius & 87 partium  
milleſimarum lineæ. Et ſimili computo confit Tabula ſequens.

radii ad quadratum ex ſinu latitudinis loci d. Q. E. D.

Sed dicit etiam Newtonus, incrementis Graduum in meridiano eandem ferè rationem intercedere.  
Id nos etiam ſic oſtendimus.



Ellipſis b p a q ut priùs referat meridianum terreſ-  
trem; ut ſint p, q poli, b locus aliquis in æquatore.  
Sit d, locus aliquis in meridiano b p a q inter polum et  
æquatorem. Jungatur c d, & ducatur Ellipſeos ſemi-  
diametrum c e illius c d conjugata; et à puncto d in c e  
ad perpendicularum deducatur d f. Circulus, centro c,  
radio c a ſcriptus, rectis c p, c d in punctis p, d occurrat.  
Capiatur c g ad quam c h, et c h ad quam c e, et c e  
ad quam c i rationem habeat quam c p ad c h, vel c b.  
Rurſum capiatur c k ad quam c d, et c d ad quam c k  
rationem habeat quam c d ad c d.

Longitudinem gradus meridiani ſub ipſo p ad lon-  
gitudinem gradus circa b rationem habere triplicatam  
ejus quàm c b vel c h ad c p, ſive eam quàm c h ad  
c p, ex Conicis notiſſimum eſt. Necnon longitudinem  
gradus meridiani circa b ad longitudinem ejus qui  
circa d, rationem habere rectæ c p ad c e triplicatam.  
Quare et dividendo, longitudo illa quæ gradus circa b  
abeſt à gradu circa d ad longitudinem ipſam gradus  
circa b rationem habebit quàm c e<sup>3</sup> — c p<sup>3</sup> ad c p<sup>3</sup>.

Sed è naturâ Ellipſeos rectangula c p x c b, d f x c e inter ſe ſunt æqualia. Quare c p<sup>3</sup> : c e<sup>3</sup> =  
d f<sup>3</sup> : c b<sup>3</sup>. Sed (propter figuram Ellipſeos b p a q à circulari parum abhorrentem) recta d f ſemi-  
diametro c n tantum non æqualis eſt. Quare et cubi ex illis d f, c b tantum non æquales. Quare  
ratio c p<sup>3</sup> ad c e<sup>3</sup> à ratione ipſius c p<sup>3</sup> ad c b<sup>3</sup> vel c d<sup>3</sup>, ſive ab eâ quæ eſt rectæ c d ad c e, parum  
abeſt. Ac proinde parum abeſt, quin c e<sup>3</sup> — c p<sup>3</sup> ad c p<sup>3</sup> rationem habeat quàm l o ad c p. Lon-  
gitudino igitur, quæ gradus circa b abeſt à gradu circa d, ad longitudinem ipſam gradus circa b ra-  
tionem habebit ab eâ quæ eſt l o ad c p parum diverſam.

Jam verò cùm longitudo gradus ſub polo p fit ad gradum circa b ut c h ad c p, hoc eſt ut c h  
ad c h; dividendo, longitudo quæ gradus ſub polo p exſuperat gradum circa b erit ad gradum ip-  
ſum circa b ut l o ad c h. Et oſtenſum eſt gradum circa b ad longitudinem l o am, quæ abeſt à  
gradu circa d, rationem habere ab eâ quæ eſt c d ad d l parum diverſam. Quare longitudo quæ  
gradus ſub ipſo polo p exſuperat gradum circa b ad illam, quæ gradus circa d eundem circa b ex-  
ſuperat, rationem habebit ab eâ, quæ eſt rectanguli m x c n ad rectangulum c h x d l, ſive rectæ m  
ad l o, parum diverſam. Parum igitur diverſam ab eâ quæ eſt l o ad d b. Namque propter c n,  
c p; c d, c o tantum non æquales, erit m = 3 d p, & l o = 3 d b. Ratio autem illius m ad d b à  
duplicatâ ejus, quæ eſt radii ad ſinum latitudinis loci d, parum recedere oſtenſa eſt. Conſtat  
igitur Propoſitum.

Conſtat.

Latitudo loci.	Longitudo penduli.		Menfura gradūs unius in meridiano.
grad.	ped.	lin.	hexapedæ.
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Constat autem per hanc Tabulam quòd graduum inæqualitas tam parva fit, ut in rebus geographicis figura Terræ pro sphaericâ haberi possit: præsertim si Terra paulo densior sit versus planum æquatoris quàm versus polos.

Jam verò Astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observârunt quòd horologia oscillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quàm in regionibus nostris. Et primò quidem D. *Richer* hoc observavit, anno 1672 in insulâ *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum Fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quàm pro medio motu Solis, existente differentiâ 2'. 28" singulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum simplex ad minuta singula secunda, per horologium optimum mensurata, oscillaret, notavit longitudinem Penduli simplicis; & hoc fecit sæpius

sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* LIRER TERTIUS. redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli Parisiensis, (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorē esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster, circa annum 1677 ad insulam *Sanche Hellene* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quàm *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semissē. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imo parte Penduli non sufficeret, anulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682 D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli, singulis minutis secundis oscillantis, in Observatorio Regio Parisiensi esse ped. 3. lin. 8 $\frac{5}{9}$ . Et in insulâ *Gored* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. 6 $\frac{2}{3}$ , existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$ .

Posthac D. *Couplet* filius, anno 1697, mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit, quòd mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quàm prius, existente differentiâ 2'. 13" in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quàm *Parisiis*, existente differentiâ 4'. 12" in horis 24. Et affirmat Pendulum, ad minuta secunda oscillans, brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis 2 $\frac{1}{2}$ , & *Paraibæ* lineis 3 $\frac{2}{3}$  quàm *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse 1 $\frac{1}{3}$  & 2 $\frac{5}{9}$ . Nam hæ differentie differentiis temporum 2'. 13", & 4'. 12" respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes*, ad *Americam* denudò navigans, determinavit quòd in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli, ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quàm. ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$ , quòdque in insulâ *S. Chrijstophori* longitudo illa.

DE MUNDI SYSTEMATE illa effret ped. 3. lin. 6 $\frac{1}{2}$ , & quòd in insulâ *S. Dominici* eadem effret ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem Penduli, ad minuta secunda oscillantis, effre pedum trium Parisiensium & linearum tantum  $5\frac{7}{12}$ ; id est, tribus fere lineis breviorẽ quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante observatione. Nam deinde ab insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni effre pedum tantum trium Parisiensium & linearum  $5\frac{10}{12}$ .

Latitudo autem *Paraibæ* est 6 $^{\circ}$ . 38' ad austrum, & ea *Porto-beli* 9 $^{\circ}$ . 33' ad boream, & latitudines insularum *Cayenna*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè 4 $^{\circ}$ . 55', 14 $^{\circ}$ . 40', 14 $^{\circ}$ . 00', 14 $^{\circ}$ . 44'. 12 $^{\circ}$ . 6', 17 $^{\circ}$ . 19', & 19 $^{\circ}$ . 48' ad boream. Et excessus longitudinis Penduli Parisiensis, supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quàm pro Tabulâ longitudinum Penduli superius computata. Et propterea Terra aliquanto altior (yy) est sub Æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem, nisi fortè calores in zonâ torridâ longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Observavit utique *D. Picartus* quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evasit pedis unius cum quartâ partẽ lineæ. Deinde *D. de la Hire* observavit, quòd virga ferrea, quæ tempore consimili hyberno sex erat pedum longitudinis, ubi soli æstivo exponebatur, evasit sex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore casu calor major fuit quàm in posteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad solem æstivum valdè incalescunt. At virga Penduli in horologio oscillatorio nunquam exponi solet calori solis æstivi, nunquam calorem concipit calori externæ superficie corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æstivo quàm hyberno, sed excessu quartam partem lineæ unius

vix

(yy) Imo humilior si hisce experimentis fidendum est. Nempe si Pendulum polare æquatorum magis exsuperet quàm si sphaeris homogenea esset, diameter æquatoris minus exsuperabit axem, &

vix superante. Proinde differentia tota longitudinis Pendulorum, quæ in diversis regionibus isochrona sunt, diverso calori attribui non potest. Sed neque erroribus Astronomorum, è *Galliâ* missorum, tribuenda est hæc differentia. Nam quamvis eorum observationes non perfectè congruant inter se, tamen errores sunt adeo parvi, ut contemni possint. Et in hoc concordant omnes, quòd isochrona Pendula sunt breviora sub Æquatore quàm in Observatorio Regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum  $2\frac{1}{2}$ . Per observationes *D. Richeri*, in *Cayennâ* factas, differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas *D. Des Hayes* differentia illa correctâ prodiit lineæ unius cum semisse, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, partim à dissimilitudine partium internarum Terræ & altitudine montium, & partim à diversis Aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quàm tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante, à *Richero* observatâ, & manebit lineæ  $1\frac{1}{12}$ : quæ cum lineâ  $1\frac{87}{1000}$ , per Theoriam jam antè collectâ, probè congruit. *Richerus* autem observationes, in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit; & longitudines Penduli, in virgâ ferreâ ibi notatas, cum longitudinibus ejus in *Galliâ* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, Terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut suprà per Theoriam prodiit.

#### PROP. XXI. THEOR. XVII.

*Puncta Æquinoctialia regredi, ☉ Axem terræ, singulis revolutionibus annuis nutando, bis inclinari in Eclipticam, ☉ bis redire ad positionem priorem.*

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. 1. Motus tamen iste nutandi perexiguus effret debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis (zz).

& vicissim: ut certissimis argumentis evicerunt *Clairaultius* & *Simsonus* nostras.

(zz) Vide De Syst. Mund. § 37.

VOL. III.

G

PROP.

## PROP. XXII. THEOR. XVIII.

*Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.*

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in Ellipsis, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus, quæ in Lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4 & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis; nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior, in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7 & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis; & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 2. Prop. LXVI.) quiescunt in syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quàm in syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio terræ (per Corol. 6. Prop. LXVI.) quàm in ipsius Aphelio. Atque hæc sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ (\*).

Sunt etiam aliæ quædam, à prioribus Astronomis non observatæ, inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hæcenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint.

Velocitates

(\*) Vid. De Syst. Mund. § 32.

(β) De Syst. Mund. § 32.

(γ) LITERA N significet motum medium nodorum Lunæ, spatio mensis quem vocant periodici. Litera n motum medium nodorum Satellitis extimi è Jovialibus, eodem temporis spatio. Litera v motum medium nodorum Satellitis ejusdem, propriæ conversionis circum Jovem spatio. Literæ

Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et Variatio præterea augetur vel minuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quàm proximè (per Corol. 1 & 2. Lem. x. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, & cum eâ confundi (β).

## PROP. XXIII. PROB. V.

*Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.*

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi Jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (γ) (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) ideoque annis centum conficit nodus iste 8<sup>gr</sup>. 24', in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum et Augis satellitis cujusque ferè sunt ad æquationes maximas nodorum & augis Lunæ respectivè, ut motus nodorum &

τ, 1 significant spatia conversionum Terræ & Jovis circum Solem. Literæ, l, s spatia conversionum Lunæ & Satellitis extimi Jovialis, illius circum Terram, hujus circum Jovem. Jam (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.)  $N : v = j^2 : \tau^2 + l^2 = j^2 \times l^2 : \tau^2 \times j^2$ .

Sed  $v : n = s : l$  (nempe cum motus medii sint æquabiles)  $= \tau^2 \times j^2 : \tau^2 \times l$ .

Ex æquo  $N : n = j^2 \times l^2 : \tau^2 \times l = j^2 \times l : \tau^2 \times j$ .

Et invertendo  $n : N = \tau^2 \times j : j^2 \times l$ . Q. E. D.

DE MUNDI  
SYSTEMATE

augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio satellitis è Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum, temporibus quibus satelles & luna ad solem revolvuntur, per idem Corollarium; ideoque in Satellite extimo non superat 5". 12''' (<sup>d</sup>).

## PROP. XXIV. THEOR. XIX.

*Fluxum ☾ refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.*

Mare singulis diebus, tam lunaribus quàm solaribus, bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi; ut fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei*, ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit; nisi ubi motus ab oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam quintam, sextam, septimam, aut ultrà, retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra; & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu, & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit; id quod fiet spatio horæ unius duarumve; sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium, si mare sit vadofum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol at-

(<sup>d</sup>) De Syst. Mund. § 34.

tollet

LIBER  
TERTIUS.

tollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus, qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius est; ideoque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem, in transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantis à Terrâ. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

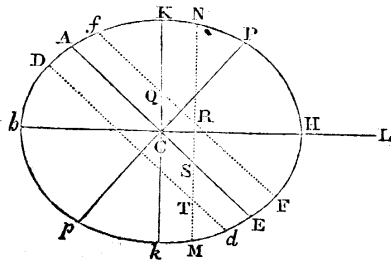
Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione, seu distantia ab Æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria, recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent; & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eo quòd Lunæ, jam in æquatore constitutæ, effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias, & minimi in quadraturis luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum

4

in

in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum Latitudine. Designet *APEP* Tellurem aquis profundis undique coopertam; *c*, centrum ejus; *p, p*, polos; *AE*, æquatorem; *F*, locum quemvis extra æquatorem; *Ff*, parallelum loci; *dd*, parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; *L*, locum, quem Luna tribus antè horis occupabat; *H*, locum telluris ei perpendiculariter subiectum; *h*, locum huic oppositum; *k, k*, loca inde gradibus 90 distantia; *ch*, *cb*, maris altitudines maximas mensuratas à centro telluris; & *ck*, *ck*, altitudines minimas. Et si axibus *Hb*, *kk* describatur Ellipsis; deinde, ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hb*, descri-



batur sphærois *HPKbPk*: designabit hæc figuram maris quàm proximè; & erunt *cf*, *cf*, *cd*, *cd* altitudines maris in locis *F*, *f*, *d*, *d*. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *MN*, secantem parallelos, *Ff*, *dd*,

in locis quibuscvis *R*, *T*, & æquatorem *AE* in *s*; erit *cn* altitudo maris in locis omnibus *R*, *s*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuscvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q*, horâ tertiâ post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimò defluxus maximus in *Q*, horâ tertiâ post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos; unum, in hemisphærio *kHk*, ad boream vergentem; alterum, in hemisphærio opposito *kBk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus, semper sibi mutuò oppositi, veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum

lunarium

lunarium duodecim. Cùmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & accidunt. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem; & Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora solstitionum; præsertim si Lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis. Sic experientia compertum est, quòd æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos, & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hæcenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post syzygias majores reddit, eosque proximè post quadraturas minuit. Unde fit, ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius, vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi à syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti à syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulso Lunæ ad meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad meridianum appulso versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eisdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient, ut aqua tranquillè stagnet.

Si

DE MUNDI  
SYSTEMATIS

Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum; & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem, & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad meridianum, atque Lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſbam*, sub latitudine boreali 20<sup>gr</sup>. 50', *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua, die transitum Lunæ per æquatorem sequente, stagnat; dein Lunæ ad boream declinante, incipit fluere & defluere, non bis, ut in aliis portibus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum; dein per alios septem dies iisdem gradibus decrefcit, quibus antea creverat; & Lunæ declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet; alter ab oceano *Sinenſi*, inter continentem & insulam *Luconiam*; alter à mari *Indico*, inter continentem & insulam *Borneo*. An æstus, spatio horarum duodecim à mari *Indico*, & spatio horarum sex à mari *Sinenſi*, per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum reliquo (\*).

Hactenus causas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subungere.

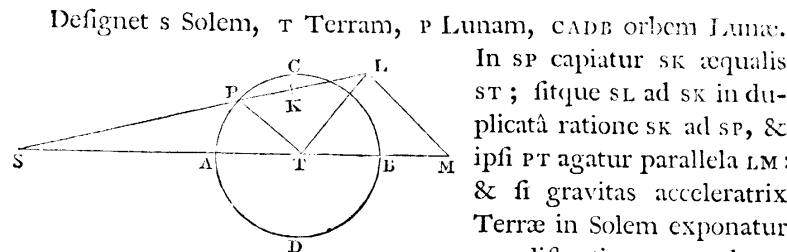
(\*) De Syst. Mund. § 38—47.

## SECTIO II.

De quantitate Errorum Lunarum.

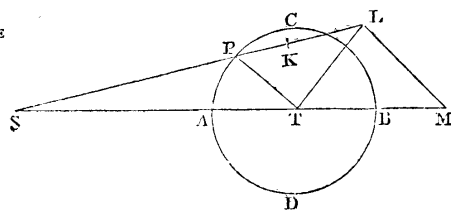
## PROP. XXV. PROB. VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.



Designet s Solem, T Terram, P Lunam, CADB orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; sitque SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipsi PT agatur parallela LM: & si gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per distantiam ST, vel SK; erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipsius SM pars TM, perturbat motum Lunæ, ut in Libri Primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas, YM & ML, designare. Vis ML, in mediocri suâ quantitate, est ad vim centripetam, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam PT, revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. 1.) hoc est, in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 23. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad 178<sup>3</sup>/<sub>4</sub>. Invenimus autem in Propositione quartâ quod, si Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocri ab invicem erit 60<sup>1</sup>/<sub>2</sub> semidiametrorum mediocrium terræ quamproximè. Et vis quâ luna in orbe circa terram quiescentem, ad distantiam PT semidiametrorum terrestrium 60<sup>1</sup>/<sub>2</sub> revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut 60<sup>1</sup>/<sub>2</sub> ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 × 60 quamproximè. Ideoque vis mediocris





ML est ad vim gravitatis in superficie terræ, ut  $1 \times 60 \frac{1}{2}$  ad  $60 \times 60 \times 60 \times 178 \frac{29}{43}$ , seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportionem linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæc sunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. Q.E.I.

## P R O P. XXVI. P R O B. VII.

*Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in orbe circulari describit.*

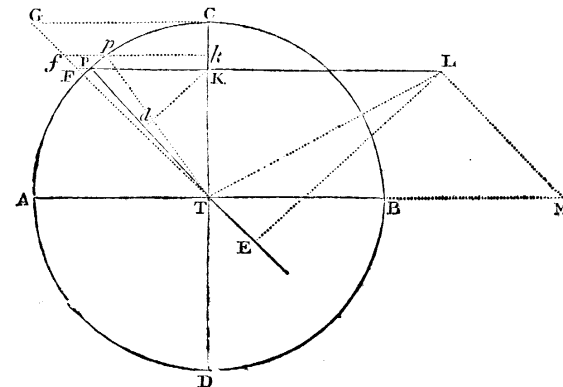
Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hîc investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circulare esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hîc agitur. Ob ingentem verò Solis distantiam, ponamus etiam lineas SP, ST sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem suam quantitatem  $3PK$  <sup>(a)</sup>. Hæ vires (per legum Corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, si in radium TP demittatur perpendiculum LE, resolvitur in vires TE, EL; quarum TE, agendo semper secundum radium TP, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL, agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius à quadraturâ

<sup>(a)</sup> Vid. Lib. I. Sect. II. Not. f.

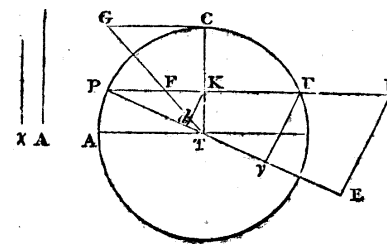
<sup>(b)</sup> Nimirum propter angulum ad K & E rectos, angulumque LPE triangulis duobus LPE, TPK communem, triangula illa sunt inter se similia sed contrariè posita. Quapropter recta PL erit ad rectam LE, ac proinde vis PL seu  $3PK$  ad vim LE, ut recta PT ad rectam TK. Quare  $EL \times TP = 3PK \times TK$ , five  $EL = 3PK \times \frac{TK}{TP}$ .

<sup>(c)</sup> Nimirum hæc est argumentatio Newtoni. Positis TC, CG æqualibus, ductâque TC, quæ rectæ KP in F occurrat, erit fluxio rectæ CK ad fluxionem arcûs CP ut KP ad TP. (Introduct. ad

quadraturâ c ad conjunctionem A, singulis temporis momentis <sup>Liber TERTIUS.</sup> facta, est ut ipsa vis accelerans EL, hoc est, ut  $\frac{3PK \times TK}{TP}$  <sup>(b)</sup>. Exponatur tempus per motum medium lunarem, vel (quod eodem



ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales pp, &c. per quas æquales totidem particule Temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & kk erit ad PK ut pp ad TP, hoc est in datâ ratione; ideoque  $FK \times kk$ , seu area  $FKkf$ , erit ut  $\frac{3PK \times TK}{TP}$ , id est, ut EL; & compositè, area tota GCKF ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lunam; atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti <sup>(c)</sup>. Vis quâ Luna



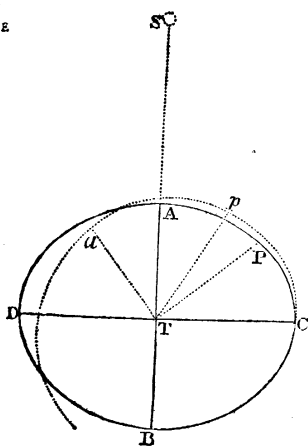
H 2

ad Quad. Curv. § 4.) Sint x, A rectæ quædam, eâ lege five altera five utraque mutabiles, ut velocitatum crescendi rectæ CK arcûsque CP rationes semper referant; secundum doctrinam Def. v. Geometriæ nostræ Fluxionum. Erit igitur x ad A ut KP ad TP. Permutando x erit ad KP ut A ad TP. Jam verò propter æquabilem Lunæ motum (talis enim ponitur) quo arcus CP scribitur, fixa manet rectæ A longitudo. (Geometr. Flux. Def. v.) Sed data etiam TP. Quare datarum A, TP ratio data. Data igitur ratio rectæ x ad PK. Quare,









in vertice c & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ  $\tau pa$  in vertice c & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicatâ ratione anguli  $ctp$  ad angulum  $ctp$ . Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactûs ac differentiarum angulorum facillè colliguntur. His autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ  $cpa$  in  $a$  ad ipsius curvaturam in  $c$ , ut  $AT \text{ cub.} + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$  ad  $CT \text{ cub.} + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$  (1). Ubi numerus  $\frac{16824}{100000}$  designat differentiam quadratorum angulorum  $ctp$  &  $ctp$  applicatam ad quadratum anguli minoris  $ctp$ , feu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum  $27^d. 7^h. 43'$ , &  $29^d. 12^h.$

44,

(1) LITERA  $t$  mensẽm quem vocant periodicum, litera  $s$  synodicum significet. Erit igitur angulus  $ctp$  ad angulum  $ctp$  ut  $t$  ad  $s$ . Quare vis centralis in orbe mobili in loco  $a$  erit ad vim centram in Ellipfi  $CAD$  in loco  $A$ , ut  $\frac{s^2 \times TA}{CT^3} + \frac{TA^2}{TC} - \frac{TA^2}{TC} s^2$  ad  $\frac{s^2 \times TA}{TC^3}$ . Id enim efficietur

ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. si in formulâ generali illius Corollarii  $s^2$  scribatur pro  $FF$ ,  $TA$  pro  $A$ ,  $TC^3$  pro  $\tau \text{ cub.}$ ,  $\frac{TA^2}{TC}$  pro  $\tau$ , &  $s^2$  pro  $GG$ . Ducendo omnia in  $CT^3 \times TA$ , efficietur vis centralis in ellipfi mobili in loco  $a$  ad vim centram in ellipfi  $CAD$  in loco  $A$ , ut  $s^2 \times TA^2 + CT^3 - CT^3 s^2$  ad  $s^2 \times TA^2$ .

Jam verò velocitas in Ellipfi mobili in loco  $a$  ad velocitatem in Ellipfi stabili  $CAD$  in loco  $A$  ut  $s$  ad  $t$ . Velocitatum igitur in locis illis duplicata ratio ea erit, quæ  $s^2$  ad  $t^2$ , five  $s^2 \times TA^2$  ad  $t^2 \times TA^2$ . Ratio igitur quæ componitur è ratione virium cum contrariâ ejus quæ duplicata est velocitatum, ea erit quæ quantitatis  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad quantitatem  $s^2 \times TA^2$ . Atque hæc erit ratio curvaturæ orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam ellipseos  $CAD$  in  $A$ . Radius circuli, qui Ellipfin in  $A$  osculatur, semiaxium  $TA$ ,  $TC$  proportionem tertius est. Quapropter radius ejus circuli ad semiaxem  $TA$  rationem habet quam  $TC^3$  ad  $TA^2$ . Ac proinde Curvatura Ellipseos in  $A$  ad curvaturam circuli ejus radius  $TA$  rationem habet, quam  $TA^2$  ad  $TC^3$ ; five eam quam  $s^2 \times TA^2$ ,  $s^2 \times TC^3$ .

Jam cum curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam Ellipseos  $CAD$  in loco  $A$  rationem habeat quam  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times TA^2$ ; cum præterea curvatura Ellipseos in loco  $A$  ad curvaturam Circuli, ejus radius  $TA$ , rationem habeat quam  $s^2 \times TA^2$  ad  $s^2 \times TC^3$ : ex æquo Curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam circuli, ejus radius  $TA$ , rationem habebit quam  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times TC^3$ . Curvatura autem circuli ejus radius  $TA$  ad curvaturam circuli ejus radius  $TC$  rationem habet quam  $TC$  ad  $TA$ ; five eam, quam  $TC \times TA$  ad  $TA^2$ . Et hujus circuli curvatura ad curvaturam Ellipseos in loco  $C$  rationem habet quam  $TA^2$  ad  $TC^3$ . Nempe cum radius circuli, qui Ellipfin in  $C$  osculetur, semiaxium  $TC$ ,  $TA$  proportionem sit tertius. Ex æquo Curvatura circuli ejus radius  $TA$  ad curvaturam Ellipseos in loco  $C$  rationem habet, quam  $TC \times TA$  ad  $TC^3$ ; five eam, quam  $TA$  ad  $TC$ . Cum igitur Curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam Circuli, ejus radius  $TA$ , rationem habeat quam  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times TC^3$ , curvatura autem circuli

44', applicatam ad quadratum temporis  $27^d. 7^h. 43'$ .

Igitur cum  $a$  designet syzygiam Lunæ, &  $c$  ipsius quadraturam; proportio jam inventa eadem esse debet cum proportionem curvaturæ orbis Lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio  $CT$  ad  $AT$ , ducio extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad  $AT \times CT$  applicati, fiunt  $206279 CTq - 2151969 N \times CT \text{ cub.} + 368676 N \times AT \times CTq + 36342 ATq \times CTq - 362047 N \times ATq \times CT + 2191371 N \times AT \text{ cub.} + 40514 ATq = 0$ . Hic pro terminorum  $AT$  &  $CT$  semisummâ  $N$  scribo 1, & pro eorundem semidifferentiâ ponendo  $x$ , fit  $CT = 1 + x$ , &  $AT = 1 - x$ : quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur  $x$  æqualis  $0,00719$ : & inde semidiameter  $CT$  fit  $1,00719$ ; & semidiameter  $AT$ ,  $0,99281$ : qui numeri sunt ut  $70\frac{1}{4}$  &  $69\frac{1}{4}$  quàm proximè (m). Est igitur distantia Lunæ à Terrâ in syzygiis ad ipsius

circuli ejus radius  $TA$  ad curvaturam Ellipseos in loco  $c$  eam, quàm  $TA$  ad  $TC$ ; Curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam Ellipseos  $CAD$  in loco  $C$  rationem habebit, quæ componitur è rationibus quantitatis  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times TC^3$ , rectæque  $TA$  ad rectam  $TC$ ; five eam quam quantitas  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3 \times TA$  ad  $s^2 \times TC^3$ .

Rursum vis centralis, quâ corpus in Ellipfi  $CAD$  retinendum esset, in loco  $c$ , ad vim centram in eodem loco in orbe  $cpa$  rationem habet quam  $t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times CT^3 + s^2 - t^2 \times TA^2$ . Id quod efficitur ex Corollario tertio Prop. XLIV. Lib. I. si in Corollarii illius formulâ generali, pro  $FF$ ,  $GG$ ,  $R$ , &  $\tau \text{ cub.}$  scribantur, sicut antè,  $s^2$ ,  $s^2$ ,  $\frac{TA^2}{TC}$ ,  $TC^3$ , &  $TC$  pro  $A$ .

Velocitas autem corporis, per Ellipfin illam  $CAD$  delati, ad velocitatem corporis orbem  $cpa$  scribentis, in loco communi  $c$ , rationem habet quam  $t$  ad  $s$ . Quare duplicata velocitatum ratio ea erit quam  $s^2$  habet ad  $s^2$ , vel  $s^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times CT^3$ . Quæ igitur ex virium ratione cum duplicatâ velocitatum contrariâ composita est ratio, ea erit quam  $s^2 \times CT^3$  habet ad  $s^2 \times CT^3 + s^2 - t^2 \times TA^2$ , five  $s^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times CT^3 + s^2 - t^2 \times TA^2 \times CT$ . Atque hæc est ratio curvaturæ Ellipseos in loco  $c$  ad curvaturam orbitæ  $cpa$  in eodem loco.

Jam verò cum curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam Ellipseos in  $C$  rationem habeat quam  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times TC^3$ ; cum præterea curvatura Ellipseos in loco  $c$  ad curvaturam orbitæ  $cpa$  in eodem loco rationem habeat quam  $s^2 \times CT^3$  ad  $s^2 \times CT^3 + s^2 - t^2 \times TA^2 \times CT$ ; ex æquo, Curvatura orbitæ  $cpa$  in loco  $a$  ad curvaturam ejusdem in loco  $C$  rationem habebit quam  $s^2 \times TA^2 + s^2 - t^2 \times CT^3 \times TA$  ad  $s^2 \times CT^3 + s^2 - t^2 \times TA^2 \times CT$ ; five eam, quam  $TA^2 + \frac{s^2 - t^2}{s^2} CT^3 \times TA$  ad  $CT^3 + \frac{s^2 - t^2}{s^2} TA^2 \times CT$ .

Sed  $s^2 : s^2 = 100000 : 116823,4$ .

Quare  $\frac{s^2 - t^2}{s^2} = \frac{16824}{100000}$ .

Quare curvatura figuræ  $cpa$  in loco  $a$  erit ad ejusdem curvaturam in  $C$ , ut  $TA^2 + \frac{16824}{100000} CT^3 \times TA$  ad  $CT^3 + \frac{16824}{100000} TA^2 \times CT$ .

(n) MAJORIS evidentie gratiâ calculos subduco.

I 2

Cum



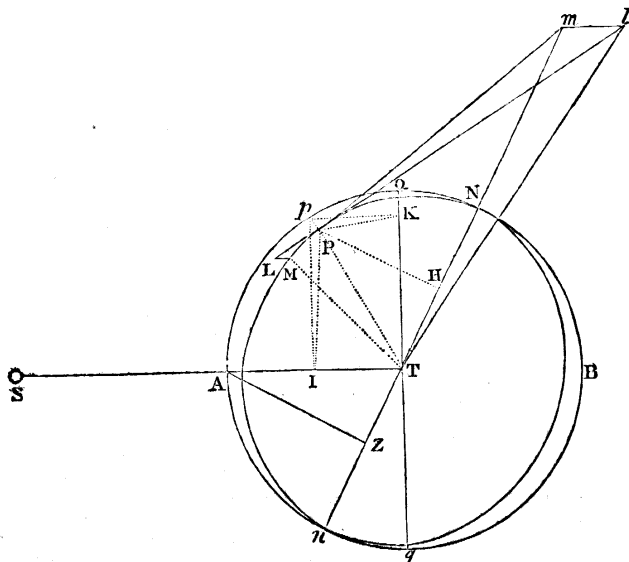


DE MUNDI SYSTEMATE  
excessum vel defectum ab Astronomis per phænomena determinandum relinquo.

## P R O P. XXX. P R O B. XI.

*Invenire motum horarium Nodorum lunæ in orbe circulari.*

Designet *s* solem, *t* terram, *p* lunam, *npn* orbem Lunæ, *npn* vestigium orbis in plano Eclipticæ; *n*, *n* nodos, *ntnm* lineam nodorum infinitè productam; *pi*, *pk* perpendiculara demissa in li-



neas *st*, *Qq*; *pp* perpendicularum demissum in planum Eclipticæ; *A*, *B* syzygias Lunæ in plano Eclipticæ; *AZ* perpendicularum in lineam Nodorum *NN*; *Q*, *q* quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & *pk* perpendicularum in lineam *Qq* quadraturis interjacentem.

Vis

(<sup>1</sup>) — *ML* lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ *3IT*, eodem tempore describere possit.] Vitiosa sunt hæc. Reponenda, quæ in Editione Primâ & Secundâ Newtonus dederat. — *ML* lineolam quam Luna, impellente vi præfatâ *3IT*, eodem tempore describere possit. EMERSONUS. Assentior Emersono.

(<sup>2</sup>) — *quâ* dimidium lineolæ *LM*.] Editio Prima & Secunda, *quâ* lineola *LM*. Rectè. Inducenda sunt etiam quæ uncis inclusimus, quæ in editione Primâ & Secundâ aberant. Quod verò vis solaris efficaciam eo modo considerari jubet, quasi *ita simul & semel in loco & impressa esset*, id

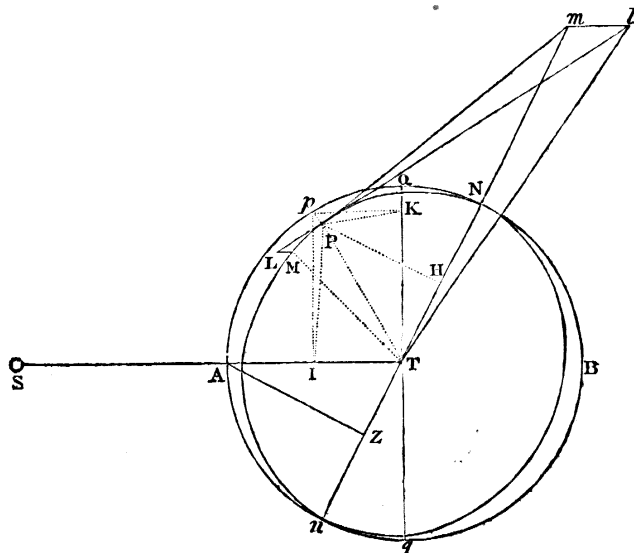
Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex est; altera lineæ *LM* in schemate Propositionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, posteriore in Solem secundum lineam rectæ *ST*, à Terrâ ad Solem ductæ, parallelam trahitur. Vis prior *LM* agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior *MT*, quâ planum orbis lunaris perturbatur, eadem est cum vi *3PK*, vel *3IT*. Et hæc vis (per Prop. xxv.) est ad vim, quâ Luna in circulo circa Terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut *3IT* ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut *IT* ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à Lunâ ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ, quæ à Terrâ ad Solem ducitur; propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantum augeat in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet jam *PM* arcum, quem Luna dato tempore quàm minimo describit; & *ML* lineolam, cujus dimidium Luna, impellente vi præfatâ *3IT*, eodem tempore describere possit (<sup>1</sup>). Jungantur *PL*, *MP*, & producantur eæ ad *m* & *l*, ubi secant planum Eclipticæ; inque *tm* demittatur perpendicularum *PH*. Et quoniam recta *ML* parallela est plano Eclipticæ, ideoque cum rectâ *ml* quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi *LMPml*; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula *LMP*, *lmp*. Jam cum *MPm* sit in plano orbis, in quo luna in loco *p* movebatur, incidet punctum *m* in lineam *nn* per orbis illius nodos, *N*, *n*, ductam. Et quoniam vis, quâ dimidium lineolæ *LM* (<sup>2</sup>) generatur, si tota simul &

non aliter accipio, ac si dixisset, cogitari oportere arcum *PM* infinitè minui, & velocitatem motus Nodi, in loco *p*, ex illâ ratione æstimandam, quàm angulus nascens *MTL* ad alium quandam, motu æquabili nascentem, primam habeat. Quod ipsum si dixisset, elarius multo, me judice, locutus fuisset. Nempe recta *LM* sensim generata est, non ictu subito, sed lentâ quâdam et perpetuâ virium usque renascentium efficaciam; quæ Lunam, totum illud tempus quod arcui *PM* conficiendo ea impenderit, secundum rectas cum rectâ *rs* parallelas incitarunt. Amplior fiat arcus *PM*: plures fuerint vires, quæ ad rectam *LM* generandam, suo quæque ordine & loco, operas contulerint. Contrahatur arcus *PM*; fuerint illæ pauciores: & quo magis ille usque contrahatur, eo illæ usque pauciores. Unde si arcus ille evanescat, & coeuntibus punctis *PM* in nihilum tandem abeat,



& femel in loco  $P$  impressa esset, [generaret lineam illam totam ; &] efficeret, ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset  $LP$ , atque ideo transferret lunam de plano  $MPMT$  in planum  $LP/T$ ;



motus angularis nodorum à vi illà genitus, æqualis erit angulo  $mtl$ . Est autem  $ml$  ad  $mp$  ut  $ML$  ad  $MP$ ; ideoque cùm  $MP$ , ob datum tempus, data sit, est  $ml$  ut rectangulum  $ML \times MP$ , id est, ut rectangulum  $IT \times MP$ . Et angulus  $mtl$ , si modò angulus  $tml$  rectus

abeat, vires omnes rectæ  $LM$  genitricæ in simplicem, si ita dicam, istum vis illius  $31r$  in loco  $P$  ultimò abierint; id est in vim, quæ tota simul & femel in loco  $P$  impressa fuerit. Qui igitur eo sermone usus est, "*vim quâ lineâ  $LM$  generatur totam simul & femel in loco  $P$  imprimi*," id scilicet arcum  $PM$  infinitè imminui intellexit, & vim illam simplicem & primam cogitavit, quæ rectæ  $LM$  nascendi quasi initia suppeditat.

(\*) NEMPE in hanc sententiam Newtonus disputat. Vis terrestris, quæ, extinctâ vi solaris, Lunam in orbe circulari retineret, ea, quo tempore Luna per arcum  $PM$  ferretur, id utique efficeret, ut Luna cursum rectum, quem, è loco  $P$  egressa, vi infinitâ tenuisset, si vis omnia centralis ibi loci extincta esset, eum in  $M$  delata cum alio mutaret, qui ad priorem illum angulo ipsius  $MP$  æquali inclinatus esset. Nam cursus rectus, qui Lunæ, per orbem circulem in locum  $P$  vel  $M$  delatæ, deinceps ob vim infinitam tenendus esset, si in utrovis loco vis centralis subito deficeret, is quidem orbem ipsum ibi loci contingeret. Quæ verò circulem eundem, in locis diversis, lineæ rectæ contingunt, eæ angulum inclinationis mutæ ejus æqualem faciunt, qui, ad centrum circuli constitutus, arcum ipsum contactus punctis interceptum, basin habet. Rectæ igitur quæ orbem Lunæ circulem,  $mpg$ , in punctis  $P$ ,  $M$  contingunt, mutæ inclinationis angulum ipsius  $MP$  æqualem habent. Et talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis illa quâ in orbe  $mpg$  retinenda esset, tempore, quo per arcum  $PM$  ferretur, cessante vi solaris, sola efficeret.

rectus sit, est ut  $\frac{ml}{Tm}$ , & propterea ut  $\frac{IT \times PM}{TP}$ , id est (ob proportio-  
nales  $Tm$  &  $MP$ ,  $TP$  &  $PH$ ) ut  $\frac{IT \times PH}{TP}$ , ideoque ob datam  $TP$ , ut  $IT \times PH$ . Quòd si angulus  $tml$ , seu  $STN$ , obliquus sit, erit angulus  $mtl$  adhuc minor, in ratione finis anguli  $STN$  ad radium, seu  $AZ$  ad  $AT$ . Est igitur velocitas nodorum ut  $IT \times PH \times AZ$ , five ut contentum sub sinibus trium angulorum  $TPI$ ,  $PTN$  &  $STN$ .

Si anguli illi, nodis in quadraturis, & Lunâ in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola  $ml$  abibit in infinitum, & angulus  $mtl$  evadet angulo  $mpl$  æqualis. Hoc autem in casu, angulus  $mpl$  est ad angulum  $PTM$ , quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus  $mpl$  æqualis est angulo  $LPM$ ; id est, angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem sola vis præfata solaris  $31r$ , si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; & angulus  $PTM$  æqualis est angulo deflexionis Lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ Luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris  $31r$ , eodem tempore generaret (\*). Et hæ vires, ut suprâ diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo cùm motus medius horarius Lunæ respectu fixarum sit  $32'. 56''. 27'''$ .  $12^{iv} \frac{1}{2}$ , motus horarius Nodi in hoc casu erit  $33''. 10''$ .  $33^{iv}$ .  $12^v$ . Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad  $33''. 10''$ .  $33^{iv}$ .  $12^v$ . ut contentum sub sinibus angulorum trium  $TPI$ ,  $PTN$ , &  $STN$  (seu distantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole) ad cubum radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in

ret. Jam verò vis solaris  $31r$ , quæ Lunam eo ipso temporis puncto, quo simplici vi terrestri incitata, locum  $M$  appulisset, apud punctum  $L$  constituit; hæc inquam vis solaris, eo temporis spatio quo Luna arcum  $PM$  abfolverit, id utique effecerit, ut Luna viam circulem  $PM$  cum aliâ viâ curvâ, per puncta  $P$ ,  $L$  ducendâ, mutaverit; et impetum, quem in loco  $P$  habuit progrediendi secundum rectam quæ arcum  $PM$  in  $P$  contingeret, cum alio mutaverit, progrediendi secundum rectam quæ aliam illam viam curvam in  $L$  contingat. Et qualicunque sit rectarum inclinatio mutua, quæ Curvas  $PM$ ,  $PL$  in punctis  $P$ ,  $L$  contingant, talis erit deflexio Lunæ à recto tramite, quam vis solaris  $31r$ , tempore quo motu medio Lunæ conficitur arcus  $PM$ , cessante vi terrestri, sola generaret. At verò arcubus  $PM$ ,  $PL$  infinitè imminutis, eorum chordæ  $PM$ ,  $PL$  cum rectis contingentibus ultimò congruunt, & angulum inclinationis mutæ eum ultimò quem tangentes habent. Angulorum igitur nascentium  $PTM$ ,  $LPM$  ea prima erit inter ipsos ratio, quæ Lunæ à recto tramite deflexionum prima, quas vis terrestris & vis solaris  $31r$  eodem tempore singulatim generaverint; id est, eadem quæ mutationum, quas vires illæ in vi infinitâ Lunari simul primas effecerint. Hæc autem haud alia erit præter virium rationem. Erit igitur motus horarius nodorum, in eo qui positus est situ Nodorum & Lunæ, ad motum horarium Lunæ medium à stellis fixis sicut 1 ad 59,575.

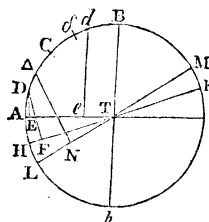
Qui angulum deflexionis Lunæ à recto tramite aliter intelligunt quàm nos interpretati sumus, decipiuntur.







sentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo à syzygiâ & quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem



ille quo dimidiata; arcumque AB punctum c medium dividat. Sit D locus aliquis Lunæ inter punctum c & punctum coitus A. A puncto D in rectam TA deducatur ad perpendicularum recta DE, ut sit TE æqualis sinui arcus DN, quo Luna à loco B abest. Si Luna, in orbe suo, ex circulari in Ellipticam per vim Solis transformato, areas circum Terram, in centro positam, æquali motu scriberet; motus horarius Nodi orbitæ Lunaræ, five velocitas ejus sub Eclipticâ, in dato quovis situ Solis, Lunæ, et Nodi, talis esset, qualem Newtonus in hac Propositione constituit. Lunâ igitur locum D obtinente, literâ N significetur angulus, quem Nodus orbitæ Lunaræ à terrâ visus, in dato quovis ejus tam ad Solem quam ad Lunam ipsam situ, cum velo-

locitate illâ, quam pro hac Propositione haberet, dato quovis tempore sub Eclipticâ conficeret. Sit N-y angulus ille minor, quem eodem tempore cum minore illâ velocitate conficeret, quam, in eodem ipsius ad Lunam et ad Solem positu, Lunâ locum D obtinente, reverâ habet, propter arearum utique circum centrum confectionem in orbe Lunari Elliptico reverâ inæquabilem. Literâ A significetur angulus, quem nodus, Lunâ in locum A translata, eodem tempore conficeret, cum velocitate illâ quam pro hac Propositione haberet; literâ a significetur illud, quo angulus A ab angulo illo minore abest, quem eodem tempore, Nodus, similiter ad Lunam et ad Solem positus, verâ suâ velocitate scriberet. Dicit Newtonus y ad a rationem habere, quæ componitur è rationibus anguli N ad angulum A, spatiique TE<sup>2</sup> - ½ TA<sup>2</sup> ad ½ TA<sup>2</sup>. Id nos ostendimus hoc modo.

Literâ L significetur angulus, quem Luna, cum velocitate illâ mediâ quam in loco c habeat, circum centrum T eo tempore conficeret, quo Nodus orbitæ Lunaræ angulum N-y. Sit L+x angulus, quem eodem tempore Luna conficeret, cum majore illâ velocitate quam in D habet; et L+l angulus, quem eodem etiam tempore conficeret, cum velocitate quæ ei in coitu maxima est. Tempus igitur, quo Luna, cum velocitate illâ quam in D habet, angulum L conficeret, ad tempus quo eundem angulum conficeret cum velocitate suâ mediâ, rationem habebit quam L ad L+x. Jam verò anguli N-y, N, erunt inter se sicut velocitates quibuscum dato tempore conficiantur; et velocitates illæ temporum, quibus generate fuerint, rationem duplicatam gerent; id est duplicatam temporum, quibus Luna, cum velocitatibus quas in locis D, c diversas habet, angulum L conficeret. Erit igitur N-y ad N ut L<sup>2</sup> ad L+x<sup>2</sup>; five cum angulus x perexiguus sit ratione illius L, ut L ad L+x. Invertendo & convertendo, N:y=L+2x:2x. Vel cum x perexiguus sit ratione anguli L, N:y=L:2x. Invertendo y:N=2x:L. Quod cum generaliter verum sit, ubi vis loci sumatur punctum D, modo inter A, c; idcirco erit et A:a=L:2l. Cum igitur sit y:N=2x:L, et A:a=L:2l, idcirco, rationes similes componendo, erit yxA:Nxa=x:L. Sed Nx:a:Ax:a=N:A. Quare similes rationes iterum componendo, y:a=xNx:N:lxA. Sed x ad l rationem habet, quam TE<sup>2</sup> - ½ TA<sup>2</sup> ad ½ TA<sup>2</sup>. Quare y:a=NxTE<sup>2</sup> - ½ TA<sup>2</sup>:Ax½TA<sup>2</sup>.

Quod si locus d sumatur inter b et c, & symbolis N+y, L-x, significantur anguli, quos Nodus orbitæ Lunaræ, & Luna ipsa dato quodam tempore, cum veris suis velocitatibus conficerent; literis autem N, L anguli, quos eodem tempore conficerent, si Luna mediâ suâ velocitate, Nodus cum eâ ferretur, quam, manente ipsius tam ad Solem quam ad Lunam situ, Lunâque etiam punctum d obtinente, ipse haberet, si Luna areas circum centrum in orbe Elliptico æqualiter scriberet; tum si à puncto d in rectam TA deducatur ad perpendicularum de; similibus planè argumentis efficiendum erit, y:a=NxTE<sup>2</sup> - ½ TA<sup>2</sup>:Ax½TA<sup>2</sup>.

Universè igitur decrementum motus horarii Nodi in locis inter c et A, & incrementum in locis inter c et b (decrementum loquimur et incrementum ab inæquali arearum generatione in orbe Lunari

nem ineunti facilè constabit<sup>(cc)</sup>. Proindeque decrementum mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygiâ. Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi Luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat 32".42'''.7<sup>iv</sup>. Et decrementum motus nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073;

Lunari Elliptico) erit quàm proximè ad decrementum in ipso Lunæ coitu, ut motus totus horarius in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & differentia inter quadratum sinûs distantie Lunæ à dimidiatæ loco et semissem quadrati radii, ad semissem quadrati Radii conjunctim. Vel quod perinde est, ut motus totus in locis illis ad motum totum in coitu Lunæ, & illud, quo sinus versus duplæ distantie Lunæ à dimidiatæ loco abest à radio, ad radium ipsum conjunctim.

<sup>(cc)</sup> CAPIANTUR puncta Δ, δ, à puncto c hinc inde æqualiter remota. Et capiantur AD, δ ar-  
cum CA, cδ æquales: qui proinde et inter se æquales. Notis A, D, Δ, δ, d significantur motus horarii Nodorum Lunæ, puncta a, b obtinentium, quando Luna ipsa loca A, D, Δ, δ, d obtineat. Notis autem A, D, Δ, δ, d significantur motus nodorum horarii decrementa in locis A, D, Δ, δ, incrementa in locis δ, d, à perturbato Lunæ motu circum centrum orbis Elliptici oriunda. Capatur arcus AH illius ad æqualis. Junctaque TH circulo iterum in K occurrat; et in eam ad perpendicularum deducatur DF. Arcus BK æqualis erit arcui BD. Erit igitur KBD dupla distantia puncti D à loco lunæ dimidiatæ a, & KF duplæ illius distantie sinus versus. Quapropter D ad A rationem habebit compositam è rationibus quam D ad A, quamque TF ad TA. (Not. <sup>bb</sup>.) Nodo autem in a posito, D erit ad A ut rectangulum sub sinibus distantiarum loci Lunæ D à a et à Nodo, id est ut quadratum è sinu arcus BD, ad quadratum è radio: five ut sinus versus dupli BD ad diametrum: id est ut KF ad 2TA. Habet igitur D ad A rationem quæ componitur è rationibus rectæ TF ad TA rectæque KF ad 2TA; five eam quam KF x TF ad duplum quadrati ex TA.

Rursum propter arcum AH ipsi AD æqualem, erunt AH, δd inter se æquales. Quapropter arcus DH duplus erit δd, rectæque HF dupli δd sinus versus erit. Unde eisdem planè argumentis quibus superiora effecimus, ostendere licet δ ad A rationem habere quam HF x TF ad duplum quadrati ex TA.

Cum igitur sit D : A = KF x TF : 2TA<sup>2</sup>.

Et δ : A = HF x TF : 2TA<sup>2</sup>.

Erit D-δ : A = KF-HF x TF : 2TA<sup>2</sup>. (El. v. 24.) Sed KF-HF = 2TF. Quare D-δ : A = 2TF x 2TA<sup>2</sup> = TF<sup>2</sup> : TA<sup>2</sup>.

Simili modo, accepto arcu AL ipsius AD æquali, & in junctam TL (quæ circulo iterum in M occurrat) deductâ ad perpendicularum rectâ AN, ostendemus δ-δ ad A rationem habere quam TN<sup>2</sup> ad TA<sup>2</sup>.

Cum igitur sit D-δ : A = TF<sup>2</sup> : TA<sup>2</sup>.

Et δ-δ : A = TN<sup>2</sup> : TA<sup>2</sup>.

Erit D+δ-δ-δ : A = TF<sup>2</sup>+TN<sup>2</sup> : TA<sup>2</sup>.

Jam verò TF<sup>2</sup>, TN<sup>2</sup> quadrato è radio TA simul sumpta sunt æqualia. Arcus enim AD, cum sit æqualis illi CA, arcus AD ille erit quo AD abest à CA. Unde duplus AD ille erit quo duplus AD abest à duplo CA, id est, à quadrante. Quare arcus ΔL, qui est duplus ΔA, ille erit quo DH, qui est duplus AD, abest à quadrante. Quare recta TN, quæ cosinus est arcus ΔL, sinui arcus DH, five rectæ DF, æqualis erit. Quare TN<sup>2</sup>+TF<sup>2</sup>=DF<sup>2</sup>+TF<sup>2</sup>=TD<sup>2</sup>, vel TA<sup>2</sup>.

Erunt igitur TF<sup>2</sup>, TN<sup>2</sup> simul sumpta quadrato ex TA æqualia. Et illud D+δ-δ-δ, cum habeat ad A rationem eam quam TN<sup>2</sup>+TF<sup>2</sup> ad quadratum ex TA, ipsi utique A æquale erit. Q. E. D.





culo toti erat  $19^{\text{gr}}. 49'. 3''. 55'''$ . & propterea motus, qui figuræ *NEFN* duplicatæ respondet, est  $1^{\text{gr}}. 29'. 58''. 2'''$ . Qui de motu priore subductus relinquit  $18^{\text{gr}}. 19'. 5''. 53'''$ . motum totum nodi respectu Fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit  $341^{\text{gr}}. 40'. 54''. 7'''$ . motum Solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annum 360<sup>gr</sup>. ut nodi motus jam inventus  $18^{\text{gr}}. 19'. 5''. 53'''$ . ad ipsius motum annum, qui propterea erit  $19^{\text{gr}}. 18'. 1''. 23'''$ . Hic est motus medius Nodorum in anno fidereo. Idem per tabulas astronomicas est  $19^{\text{gr}}. 21'. 21''. 50'''$ . Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

## P R O P. XXXIII. P R O B. XIV.

*Invenire motum verum Nodorum Lunæ.*

In tempore quod est ut area  $NTA - ndz$ , (*in fig. præced.*) motus iste est ut area  $NAE$ , & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro  $c$ , intervallo quovis  $cd$ , describatur circulus  $BEFD$ . Producat  $dc$  ad  $A$ , ut fit  $AB$  ad  $AC$  ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi nodi sunt in quadraturis; id est, ut  $19^{\text{gr}}. 18'. 1''. 23'''$ . ad  $19^{\text{gr}}. 49'. 3''. 55'''$ , atque adeo  $BC$  ad

AC

Hinc quando  $tz$  in ipsam  $tn$  increverit, ut fit  $x = y$ , &  $(1-x)^2 = 0$ , erit area  $BTFN = A \times \frac{a}{c} + \frac{a}{4c^2} + \frac{3 \cdot a}{4 \cdot 6 \cdot c^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot a}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot c^4} + \&c.$  Et area quadrantis  $BTFN$  ad hanc aream rationem habebit quam  $\frac{1}{a}$  ad  $\frac{1}{c} + \frac{1}{4c^2} + \frac{3}{4 \cdot 6 \cdot c^3} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot c^4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot c^5} \&c.$

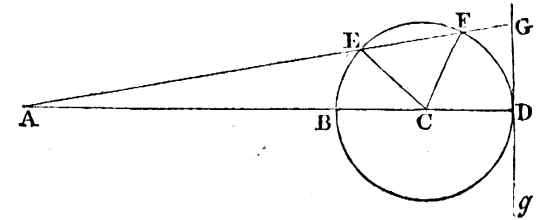
Jam verò cum fit  $a = 9,0827667$ , erit  $\frac{1}{a} = 0,110098$ .

$$\frac{1}{c} = 0,099179170$$

$$\frac{1}{4c^2} = 0,002459126$$

$$\frac{3}{4 \cdot 6 \cdot c^3} = 0,000121947$$

AC ut motuum differentia  $0^{\text{gr}}. 31'. 2''. 32'''$ , ad motum posteriorem  $19^{\text{gr}}. 49'. 3''. 55'''$ . hoc est, ut 1 ad  $38\frac{3}{10}$ ; dein per punctum  $D$  ducatur infinita  $gg$ , quæ tangat circulum in  $D$ ; & si capiatur angulus  $BCE$ , vel  $BCF$ , æqualis duplæ distantie Solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur  $AE$  vel  $AF$  secans perpendiculum  $dg$  in  $G$ ; & capiatur angulus, qui fit ad motum totum nodi inter ipsius fyzygias (id est, ad  $9^{\text{gr}}. 11'. 3''$ .) ut tangens  $dg$  ad circuli  $BED$  circumferentiam totam; atque angulus iste (pro



quo angulus  $DAG$  usurpari potest) ad motum medium nodorum addatur, ubi nodi transeunt à quadraturis ad fyzygias, & ab eodem motu medio subducatur, ubi transeunt à fyzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quàm proximè cum motu vero, qui prodit exponendo tempus per aream  $NTA - ndz$ , & motum nodi per aream  $NAE$ ; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus nodorum. Est & æquatio mensstrua, sed quæ ad inventionem latitudinis Lunæ minimè necessaria est. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, al-

$$\begin{array}{rcl} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot c^4} & = & 0,000007359 \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot c^5} & & 0,000000525 \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot c^6} & & 0,000000039 \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot c^7} & & 0,000000003 \\ \text{Summa} & & 0,101768369 \end{array}$$

Hinc area quadrantis ad aream  $NFB$ , ac proinde area semicirculi ad aream  $NAE$ , rationem habet quam 110098 ad 101768. Convertendo area semicirculi ad aream  $NEFN$  rationem habet quam 110098 ad 8330; id est eam quam 793 ad 60 propemodum. Nam  $8330 : 110098 = 60 : 793,02 +$ .



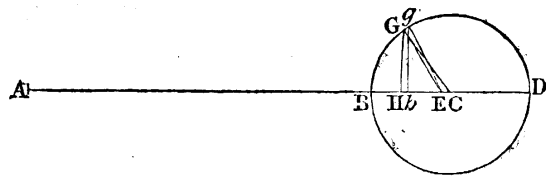








DE MUNDI SYSTEMATE  $\frac{GH}{GE} \times GEq$ , seu  $\frac{GH}{GE} \times AH$ ; id est, ut  $AH$  & sinus anguli  $AEG$  conjunctim. Igitur si  $AH$  in casu aliquo sit sinus Inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu Inclinationis, per Corol. 3. Pro-



positionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed  $AA$ , ubi punctum  $G$  incidit in punctum alterutrum  $B$  vel  $D$ , huic sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. Q. E. D.

In hac demonstratione supposui angulum  $BEG$ , quæ est duplicata distantia Nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum  $BEG$  rectum esse, & in hoc casu  $EG$  esse augmentum horarium duplæ distantie Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad  $33''. 10'''. 33''$ . ut contentum sub inclinationis sinu  $AH$  & sinu anguli recti  $BEG$ , qui est duplicata distantia Nodorum à Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris Inclinationis sinus  $AH$  ad radium quadruplicatum; hoc est (cùm Inclinationis illa mediocris sit quasi  $5^{\text{gr.}} 8\frac{1}{2}'$ ), ut ejus sinus  $896$  ad radium quadruplicatum  $40000$ , sive ut  $224$  ad  $10000$ . Est autem variatio tota, sinuum differentie  $BD$  respondens, ad variationem illam horariam ut diameter  $BD$  ad arcum  $EG$ ; id est, ut diameter  $BD$  ad semicircumferentiam  $BED$  et tempus horarum  $2079\frac{7}{10}$ , quo Nodus pergit à quadraturis ad syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut  $7$  ad  $11$  &  $2079\frac{7}{10}$  ad  $1$ . Quare si rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota  $BD$  ad  $33''. 10'''. 33''$ . ut  $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$  ad  $110000$ , id est, ut  $29645$  ad  $1000$ , & inde variatio illa  $BD$  prodibit  $16'. 32''\frac{1}{2}$  (kk).

Hæc est Inclinationis variatio maxima, quatenus locus Lunæ in orbe suo non consideratur. Nam inclinatio, si Nodi in syzy-

(kk) Verius ut opinor  $16'' - 24''$ . Nobis enim calculi reddunt  $16'' - 23'' - 50'' - 58''$ .

giis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in quadraturis consistunt, inclinatio minor est ubi Luna versatur in syzygiis, quàm ubi ea versatur in quadraturis, excessu  $2'. 43''$ ; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio,  $1'. 21''\frac{1}{2}$ , variatio tota mediocris  $BD$  in quadraturis lunaribus diminuta fit  $15'. 2''$ , in ipsius autem syzygiis aucta fit  $17'. 45''$ . Si Luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias erit  $17'. 45''$ : ideoque si Inclinationis, ubi Nodi in syzygiis versantur, sit  $5^{\text{gr.}} 17'. 20''$ ; eadem, ubi Nodi sunt in quadraturis, & Luna in syzygiis, erit  $4^{\text{gr.}} 59'. 35''$ . Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

Si jam desideretur orbis Inclinationis illa, ubi Luna in syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat  $AB$  ad  $AD$  ut sinus graduum  $4. 59'. 35''$ , ad sinum graduum  $5. 17'. 20''$ , & capiatur angulus  $AEG$  æqualis duplicatæ distantie Nodorum à quadraturis; & erit  $AH$  sinus Inclinationis quæsitæ. Huic orbis Inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi Luna distat  $90^{\text{gr.}}$  à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam Inclinationis variatio admittit, in calculo latitudinis lunæ compensatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem mensuram motus Nodorum (ut supra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi potest.

#### Scholium.

Hicce motuum lunarium computationibus ostendere volui, quod motus Lunares per Theoriam Gravitatis à causis suis computari possint. Per eandem Theoriam inveni præterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major est, & orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor est, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua, per quam hæc inæqualitas compensatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla est, in mediocri Solis à Terrâ distantia ad  $11'. 50''$  circiter ascendit, in aliis locis æquationi centri Solis proportionalis est; & additur medio motui Lunæ, ubi Terra pergit ab Aphelio suo ad Perihelium; & in oppositâ orbis parte, subducitur. Assu-

mendo radium orbis magni 1000, & eccentricitatem Terræ  $16\frac{1}{3}$ , hæc æquatio, ubi maxima est, per Theoriam Gravitatis prodiit  $11'. 49''$ . Sed eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, & aucta eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit eccentricitas  $16\frac{11}{12}$ , & æquatio maxima erit  $11'. 51''$ .

Inveni etiam quòd in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi lunæ velocius moventur quàm in Aphelio ejus; idque in triplicatâ ratione distantiae Terræ à Sole inversè. Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum æquationi centri solis proportionales. Motus autem solis est in duplicatâ ratione distantiae Terræ à Sole inversè, & maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est  $1^{\text{st}}. 56'. 20$ , prædictæ Solis eccentricitati  $16\frac{11}{12}$  congruens. Quòd si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiae inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam  $2^{\text{st}}. 54'. 30''$ . Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, sunt ad  $2^{\text{st}}. 54'. 30$ , ut motus medius diurnus Apogæi, & motus medius diurnus Nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit æquatio maxima medii motûs Apogæi  $19'. 43''$ , & æquatio maxima medii motûs Nodorum  $9'. 24''$ . Additur verò æquatio prior, & subducitur posterior, ubi Terra pergit à Perihelio suo ad Aphelium: & contrarium fit in oppositâ orbis parte.

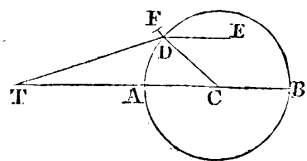
Per Theoriam Gravitatis constitit etiam quòd actio Solis in Lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per Solem, quàm ubi eadem ad rectos est angulos cum lineâ Terram & Solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quàm in posteriore. Et hinc oritur alia æquatio motûs medii lunaris, pendens à situ Apogæi Lunæ ad Solem; quæ quidem maxima est, cum Apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; & nulla, cum illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: & motu medio additur, in transitu Apogæi Lunæ à Solis quadraturâ ad syzygiam; & subducitur in transitu Apogæi à syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus Apogæi, quando maxima est, ascendit ad  $3'. 45''$  circiter, quantum ex phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia à Terrâ. Augetur verò ac diminuitur

tur in triplicatâ ratione distantiae Solis inversè, ideoque in maxima Solis distantia est  $3'. 34''$ , & in minima  $3'. 56''$  quamproximè: ubi verò Apogæum Lunæ situm est extra octantes, evadit minor; estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiae Apogæi Lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

Per eandem Gravitatis theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta, per Nodos lunæ ducta, transit per Solem, quàm ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motûs lunaris æquatio, quam semestrem secundam vocabo; quæque maxima est, ubi Nodi in Solis octantibus versantur; & evanescit, ubi sunt in syzygiis vel quadraturis; & in aliis nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiae Nodi alterutrius à proximâ syzygiâ aut quadraturâ: additur verò medio motui Lunæ, si Sol distat à Nodo sibi proximo in antecedentia; subducitur, si in consequentia; & in octantibus, ubi maxima est, ascendit ad  $47''$  in mediocri Solis distantia à Terrâ, uti ex theoriâ Gravitatis colligo. In aliis Solis distantis hæc æquatio maxima in octantibus Nodorum est reciproce ut cubus distantiae Solis à Terrâ; ideoque in Perigæo Solis ad  $49''$ , in Apogæo ejus ad  $45''$  circiter, ascendit.

Per eandem Gravitatis theoriam Apogæum Lunæ progreditur quàm maximè, ubi vel cum Sole conjungitur, vel eidem opponitur; & regreditur, ubi cum Sole quadraturam facit. Et eccentricitas fit maxima in priore casu, & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæc inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem Apogæi generant, quam semestrem vocabo. Et æquatio maxima semestris est  $12^{\text{st}}. 18'$  circiter, quantum ex observationibus colligere potui. Horroxius noster Lunam in Ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. Halleius centrum Ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ, in progressu & regressu Apogæi, & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocri Solis à Terrâ in partes 100000, & referat  $\tau$  terram, &  $\tau c$  eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur  $\tau c$  ad  $B$ , ut sit  $CB$  sinus æquationis maximæ semestris  $12^{\text{st}}. 8'$  ad radium.

dium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus, erit epicyclus ille, in quo centrum orbis lunaris locatur, & secundum



ordinem literarum BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantie veri loci Solis ab Apogæo Lunæ semel æquato, & erit CTB æquatio semestris Apogæi lunæ, & TC eccentricitas orbis

ejus in Apogæum secundò æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & eccentricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruatur verus Lunæ locus in orbe, & distantia ejus à Terrâ, idque per methodos notissimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum orbis Lunæ velocius movetur circum centrum C quàm in Aphelio, idque in triplicatâ ratione distantie Terræ à Sole inversè. Ob æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis Lunæ velocius movetur in epicyclo BDA in duplicatâ ratione distantie Terræ à Sole inversè. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantie inversè; ab orbis centro, D, agatur recta DE versus Apogæum Lunæ, seu rectæ TC parallela; & capiatur angulus EDF æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam Apogæi Lunæ à Perigæo Solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomalie veræ Solis ad gradus 360. Et sit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem Solis à Terrâ, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id est, ut  $33\frac{1}{2}$  ad 1000 &  $52'. 27''. 16'''$  ad  $59'. 8''. 10'''$  conjunctim, five ut 3 ad 100. Et concipe centrum orbis Lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radius DF, interea revolve, dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli DABD. Hæc enim ratione velocitas, quâ centrum orbis Lunæ in lineâ quâdam curvâ, circum centrum C descriptâ, movebitur, erit reciproce ut cubus distantie solis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ à Terrâ

Terrâ sit partium 100000, & eccentricitas, TC, sit partium 5505 <sup>LIBER</sup> ut supra: recta CB vel CD invenietur partium 1172 $\frac{1}{2}$ , & recta DF <sup>ERTIUS.</sup> partium 35 $\frac{1}{2}$ . Et hæc recta ad distantiam TC subtendit angulum ad Terram, quem translatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata, in situ parallelo, ad distantiam superioris umbilici orbis Lunæ à Terrâ, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici; & ad distantiam Lunæ à Terrâ subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri secunda dici potest. Et hæc æquatio, in mediocri Lunæ distantia à Terrâ, est ut sinus anguli, quem recta illa DF cum rectâ à puncto F ad Lunam ductâ continet quamproximè; & ubi maxima est, evadit  $2'. 25''$ . Angulus autem, quem recta DF & recta à puncto F ad Lunam ductâ comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum EDF ab anomaliâ mediâ Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ à Sole ad distantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita  $2'. 25''$ . sunt ad æquationem centri secundam; addendam, si summa illa sit minor semicirculo; subducendam, si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

Cum Atmosphæra terræ, ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40, refringat lucem Solis, & refringendo spargat eandem in umbram Terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria verò Lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. ft. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis  $W 20^{\text{gr.}} 43'. 40''$ , & Apogæi ejus  $\odot 7^{\text{gr.}} 44'. 30''$ ; & motum medium Lunæ  $\approx 15^{\text{gr.}} 21'. 00''$ , & Apogæi ejus  $\text{H} 8^{\text{gr.}} 20'. 00''$ , & Nodi ascendentis  $\Omega 27^{\text{gr.}} 24'. 20''$ ; & differentiam Meridianorum Observatorii hujus & Observatorii Regii *Parisiensis*  $0^{\text{hor.}} 9^{\text{min.}} 20^{\text{sec.}}$ . Motus autem





dictum fuit; seu proximè sequuntur tertium Lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post harum à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt verò in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè sequuntur appulsum lunæ ad meridianum, ubi Luna distat à Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & hyems maximè vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi Sol distat à solstitiis decimâ circiter parte totius circuitûs; seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat à Sole decimâ circiter parte motûs totius ab æstu ad æstum. Sit distantia illa graduum plus minus 18½. Et vis Solis, in hac distantia Lunæ à syzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris, à vi Lunæ oriundum, quàm in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiae hujus duplicatæ, seu anguli graduum 37; hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355<sup>(mm)</sup>. Ideoque in analogiâ superiore pro s scribi debet 0,7986355 s<sup>(nn)</sup>.

Sed & vis Lunæ in quadraturis, ob declinationem Lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu 18½ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13' versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis, ab mare movendum, diminuitur in duplicatâ ratione sinûs complementi inclinationis quamproximè. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 s ad 0,8570327 L - 0,7986355 s ut 9 ad 5.

Præterea

<sup>(mm)</sup> Imo, ut mihi videtur, in duplicatâ ratione radii ad cosinum hujus distantiae. Et persuadere mihi nequeo, quin id ipsum Newtonus voluerit.

<sup>(nn)</sup> At si diminutio vis Solaris ea sit quam modò posuimus (Not. II) in analogiâ superiore pro s scribi debet 0,899317 s.

<sup>(oo)</sup> Calculis subductis, eam invenio Lunæ à centro Terræ distantiam, quando arcu graduum 18 cum semisse à loco coitus vel à dimidiatâ loco remota sit, quæ ad distantiam mediam rationem habeat quam 69,10068 vel 69,89932 ad 69,5. Quare si ea sit vis solaris diminutio, quam suprà posuimus (Not. II) analogiâ à Newtono posita in hanc migraverit.

1,017292 L + 0,899317 s = 0,982861 × 0,8570327 L - 0,899317 s = 9 : 5.

Unde ea efficietur vis Lunar, quæ ad Solarem rationem habeat quam 5,0469 ad 1.

Præterea diametri orbis, in quo Luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ à Terrâ in syzygiis est ad distantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiae ejus in gradu 18½ à syzygiis, ubi æstus maximus generatur, & in gradu 18½ à quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad 69½. Vires autem Lunæ ad mare movendum sunt in triplicatâ ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maximâ & minimâ harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 s ad 0,9830427 × 0,8570327 L - 0,7986355 s ut 9 ad 5. Et s ad L ut 1 ad 4,4815 (°). Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

*Corol. I.* Cum aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum tricesimâ parte digiti, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum 7½, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi Luna est in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè sufficit, & quantitati motuum probè respondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacífico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindécim. In mari autem *Pacífico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quàm in *Atlantico* & *Æthiopico*. Et enim ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quàm in zonis tempe-

Si enim pro coefficiente 1,017292 scribatur litera a; pro 0,899317 litera b, pro 0,982861 × 0,8570327 litera c, erit  $al + bs : cl - bs = 9 : 5$ .

Quare  $5al + 5bs = 9cl - 9bs$ . Et  $14bs = 9c - 5a.L$ .

Sed  $9c = 7,581102$

$5a = 5,086360$

$9c - 5a = 2,494742$

Quare  $2,494742.L = 14bs$ .

Et  $0,178189.L = bs = 0,899317.s$ .

Quare  $s : L = 178189 : 899317 = 1 : 5,0469$ .

O 2

fatis,

DE MUNDI SYSTEMATE ratis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque, & orientale & occidentale; simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in insulis, quæ à littoribus longissimè absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores; uti ad *Plymutum*, & pontem *Chepstowæ* in *Angliâ*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normanniâ*; ad *Cambaïam* & *Pegu* in *Indiâ* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa millaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimatur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadis, uti *Magellanicis*, & ejus quo *Anglia* circumdatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursûs & recurûs supra modum augetur. Ad littora verò quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstûs respondet viribus Solis & Lunæ.

*Corol. 2.* Cum vis Lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400; perspicuum est, quòd vis illa sit longè minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydrostaticis quibuscunque sentiri possit. In æstû solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

*Corol. 4.* Quoniam vis Lunæ ad mare movendum est ad Solis vim consimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per *Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. 1.*) sunt ut densitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas Lunæ erit ad densitatem Solis ut 4,4815 ad 1 directè, & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inversè: id est (cum diametri mediores apparentes Lunæ & Solis sint 31'. 16'' $\frac{1}{2}$  & 32'. 12'') ut 4891 ad 1000. Densitas autem Solis erat ad densitatem Terræ ut 1000 ad 4000; & propterea densitas Lunæ est ad densitatem Terræ ut

ut 4891 ad 4000, seu 11 ad 9. Est igitur corpus Lunæ densius & magis terrestre quàm Terra nostra.

*Corol. 4.* Et cum vera diameter Lunæ ex observationibus astronomis sit ad veram diametrum Terræ ut 100 ad 365; erit massa Lunæ ad massam Terræ ut 1 ad 39,788.

*Corol. 5.* Et gravitas acceleratrix in superficie Lunæ erit quasi triplo minor quàm gravitas acceleratrix in superficie Terræ.

*Corol. 6.* Et distantia centri Lunæ à centro Terræ erit ad distantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

*Corol. 7.* Et mediocris distantia centri Lunæ à centro Terræ in octantibus Lunæ erit semidiametrorum maximarum terræ 60 $\frac{2}{3}$  quamproximè. Nam Terræ semidiameter maxima fuit pedum *Parisiensium* 19658600, & mediocris distantia centrorum Terræ & Lunæ, ex hujusmodi diametris 60 $\frac{2}{3}$  constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc distantia (per *Corollarium superius*) est ad distantiam centri Lunæ à communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cum Luna revolvatur, respectu Fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis 43 $\frac{1}{4}$ ; sinus versus anguli, quem Luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illâ, quâ retinetur in orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione 178 $\frac{2}{3}$  ad 177 $\frac{2}{3}$ , habebitur vis tota gravitatis in orbe Lunæ per *Corol. Prop. III.* Et hæc vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi describet pedes 14,8538067. Et ad sexagesimam partem distantie Lunæ à centro Terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 à centro Terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt Terræ semidiameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15,11175, seu pedes 15, dig. 1, & lin. 4 $\frac{1}{17}$ . Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per Tabulam præcedentem in *Prop. xx.* descriptam, descensus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Parisiorum*, existente

existente excessu quasi  $\frac{1}{3}$  partium lineæ. Gravia igitur, per hoc computum, in latitudine *Lutetie* cadendo in Vacuo describent tempore unius secundi pedes *Parisienses* 15, dig. 1, & lin.  $4\frac{2}{3}$  circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno Terræ in illâ latitudine; gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, & lin.  $1\frac{1}{2}$ . Et hæc velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetie* supra ostensum est ad Prop. IV. & XIX.

*Corol. 8.* Distantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in syzygiis Lunæ, est sexaginta semidiametrorum maximarum Terræ, demptâ tricesimâ parte semidiametri circiter. Et in quadraturis Lunæ, distantia mediocris eorundem centrorum est  $60\frac{1}{6}$  semidiametrorum Terræ. Nam hæ duæ distantie sunt ad distantiam mediocrem Lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad  $69\frac{1}{2}$  per Prop. XXVIII.

*Corol. 9.* Distantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, in syzygiis Lunæ, est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte semidiametri. Et in quadraturis Lunæ, distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium Terræ, demptâ tricesimâ parte semidiametri.

*Corol. 10.* In syzygiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est 57'. 20", 57'. 16", 57'. 14", 57'. 12", 57'. 10", 57'. 8", 57'. 4", respectivè.

In his computationibus attractionem magneticam Terræ non consideravi, cujus utique quantitas per parva est, & ignoratur. Si quando verò hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum Maris, & Parallaxis Lunæ, cum diametris apparentibus Solis & Lunæ, ex phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

#### PROP. XXXVIII. PROB. XIX.

*Invenire Figuram corporis Lunæ.*

Si corpus lunare fluidum esset, ad instar maris nostri, vis Terræ, ad Fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset

#### PRINCIPIA MATHEMATICA.

esset ad vim Lunæ, quâ mare nostrum in partibus & sub Lunâ & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes  $8\frac{1}{3}$ , Fluidum lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura Lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. Q. E. I.

*Corol.* Inde verò fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in Prop. XVII. allatam) respicere, neque statim abinde retrahi, & in Terram converti.

#### SECTIO IV.

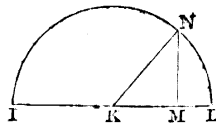
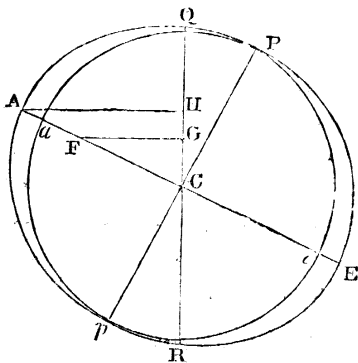
*De Præcessionē Æquinoctiorum.*

#### LEMMA I.

Si APEP Terram designet uniformiter densam, centroque C, ☉ polis P, p, ☽ æquatore AE, delineatam; ☽ si centro C, radio CP, describi intelligatur sphaera pape; sit autem QR planum, cui recta à centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insitit; ☽ Terræ totius exterioris PAPAPEPE, quæ sphaerâ modò descriptâ altior est, particule singule contentur recedere hinc inde à plano QR, sitque conatus particule cujusque ut ejusdem distantia à plano: dico primò, quòd tota particularum omnium in æquatoris circulo AE, extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis ☽ efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto A, quod à plano QR maximè distat, consistentium vim ☽ efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum.

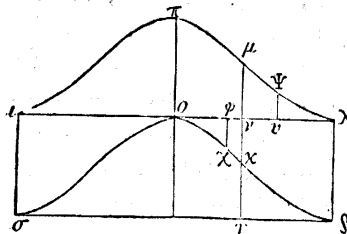
centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani QR jacentem, peragetur.

Nam centro K, diametro IL, describatur semicirculus INLK. Dividi intelligatur semicircumferentia INL in partes innumeras æquales; & à partibus singulis, N, ad diametrum, IL, demittantur sinu NM. Et summa quadratorum ex sinibus omnibus, NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus KM, & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris KN; ideoque summa quadratorum ex omnibus MN erit duplo



minor quam summa quadratorum ex totidem semidiametris KN<sup>(a)</sup>.

Jam



(\*) PUTA rectam  $\lambda$ , positione datam, semicirculo INL æqualem esse. Media dividatur recta  $\lambda$  in puncto o. Et in rectis  $o\pi$ ,  $\lambda\phi$ , ut ad perpendicularum eductis, capiantur  $o\pi$ ,  $\lambda\phi$ , ut semicirculi INL radio, KL, singulatin æquales. Semicirculi arcui cuilibet LN ponatur recta  $\lambda$ , æqualis. Et in recta  $\mu\nu$ , quæ rectam  $\lambda$  in puncto o ad perpendicularum inflectat, capiatur hinc inde  $\mu\nu$ ,  $\kappa$ ; quarum altera quidam  $\mu$ , duarum KL, NM, altera verò  $\kappa$  duarum KL, KM, proportionem sit tertia, ut sint rectangula KL x NM, KL x KM quadratis ex NM, KM singulatin æqualia. Sint  $\lambda\pi$ ,  $\phi\sigma$  Curvæ, ad quas sunt puncta  $\mu$ ,  $\kappa$ . Com-

pletoque rectangulo  $\lambda\sigma\phi$ ; dico aream,  $\lambda\pi\sigma\phi$ , Curvis conclusam huic rectangulo æqualem. Quin et areas  $\lambda\pi\sigma$ ,  $\phi\sigma\sigma\lambda$  inter se æquales.

Primum enim, producta  $\mu\kappa$  rectæ  $\sigma\pi$  in  $\tau$  occurrat. Jam cum sint rectangula KL x NM, KL x KM quadratis ex NM, KM singulatin æqualia; rectangula illa simul sumpta quadratis simul sumptis æqualia erunt. Sed rectangula illa simul sumpta rectangulo KL x  $\mu\kappa$  sunt æqualia; et quadrata simul sumpta quadrato ex KN, vel KL. Quare et rectangulum KL x  $\mu\kappa$  quadrato ex KL æquale erit. Quare

Jam dividatur perimenter circuli AE in particulas totidem æ- quales; & ab earum unâquâque, F, ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypothesin; & hæc vis ducta in distantiam CG erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut FG x GC ad AH x HC, hoc est, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq, hoc est (per jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. E. D.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eadem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quàm in plano æquatoris jacentem.

### LEMMA II.

*Hisdem positis: dico secundò quòd vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circuli AE uniformiter per totum circuitum in morem*

Quare recta  $\mu\kappa$  rectæ KL, five  $\pi\tau$  æqualis. Et in omni magnitudine rectæ  $\lambda\pi$ , seu arcus LN, manebit rectarum  $\mu\kappa$ ,  $\pi\tau$  æqualitas. Quare fluente rectâ  $\lambda\pi$ , erit  $\mu\kappa \times \lambda\pi = \pi\tau \times \lambda\pi$ . Sed  $\mu\kappa \times \lambda\pi$  fluxio est areæ  $\lambda\pi\mu$ , et  $\pi\tau \times \lambda\pi$  rectanguli  $\lambda\pi\tau$  est fluxio. Quare fluentes ipsæ, nempe area curvis conclusa  $\lambda\pi\mu$ , et area rectanguli  $\lambda\pi\tau$ , quoniam cum ipsâ rectâ  $\lambda\pi$  simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare et area tota  $\lambda\phi\sigma\pi\tau\chi$  rectangulo  $\lambda\sigma$  æqualis erit. Quod primum demonstrandum erat.

Dico præterea areas  $\lambda\pi\mu$ ,  $\phi\sigma\sigma\lambda$  inter se æquales.

Capiantur enim  $\lambda\phi$ ,  $\phi\sigma$  inter se æquales; quæ eâ lege fluant, ut semper inter se æquales maneant. Et à punctis  $\nu$ ,  $\phi$ , educantur ad perpendicularum  $\phi\psi$ ,  $\phi\chi$ , quarum illa  $\phi\psi$  Curvæ  $\lambda\pi$  in  $\psi$ , altera  $\phi\chi$  Curvæ  $\phi\sigma$  in  $\chi$  occurrat. E naturâ Curvæ  $\lambda\pi$ , rectangulum KL x  $\phi\psi$  æquale erit quadrato à sinu arcus  $\lambda\nu$ . Et è naturâ Curvæ  $\phi\sigma$ , rectangulum KL x  $\phi\chi$  quadrato è sinu arcus  $\phi\sigma$  æquale erit. Sed arcus illi,  $\lambda\nu$ ,  $\phi\sigma$ , cum sint inter se æquales, sinus etiam æquales habent. Rectangula igitur KL x  $\phi\psi$ , KL x  $\phi\chi$  inter se æqualia. Quare et rectæ  $\phi\psi$ ,  $\phi\chi$  inter se æquales. Sed  $\lambda\pi = \phi\sigma$ .

Quare  $\phi\psi \times \lambda\nu = \phi\chi \times \phi\sigma$ . Id est fluxio areæ  $\lambda\nu\psi$  fluxioni areæ  $\phi\sigma\chi$  æqualis. Quare et areæ ipsæ, quoniam cum rectis  $\lambda\nu$ ,  $\phi\sigma$  simul à nihilo generari incipiant, erunt semper inter se æquales. Quare tota area  $\lambda\sigma\pi$ , areæ toti  $\phi\sigma$  æqualis.

Simili modo ostendetur area  $\lambda\sigma\pi$  areæ  $\phi\sigma$  æqualis. Quare et area tota  $\lambda\pi\sigma$  toti  $\lambda\phi\sigma\sigma\lambda$  æqualis. Q. E. D.

VOL. III.

P

annuli





tis<sup>(d)</sup>: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphaeram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiae in cylindro ad triplum materiae in annulo<sup>(e)</sup>; & annuli motus iste, circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri<sup>(f)</sup>.

## HYPOTHESIS II.

*Si annulus praedictus, Terrâ omni reliquâ sublata, solus in orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, ☉ interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum 23½ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Aequinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida ☉ firmâ constaret.*

## PROP. XXXIX. PROB. XX.

*Invenire Præcessionem Aequinoctiorum.*

Motus mediocris horarius. Nodorum Lunæ in orbe circulari, ubi

(<sup>d</sup>) Puta sphaeram et cylindrum plano quodam secari secundum axem communem; quod planum, cylindrum secando, efficiat quadratum  $KNMA$  (vid. fig. Lemm. H. II.) & sphaeram secando, circulum  $ABCD$  quadrato inscriptum. In axe  $AC$  capiatur punctum quodvis  $r$ . Puta sphaeram & cylindrum denuo secari plano ad planum primum recto, & cum plano æquatoris parallelo, quod per punctum  $r$  transeat, & secando planum illud primum faciat rectam  $pr$ , quæ axem  $AC$  ad perpendicularum insiliet. Occurrat recta  $pr$  circulo in punctis  $g, a$ ; & capiatur  $FN$ , ad quam  $FG$  rationem habeat quam quadratum ex  $EA$ , vel  $pr$ , ad quadratum ex  $GA$ . Sit  $AMBDA$  Curva, quæ, fluenterectâ  $AF$ , locus erit punctorum  $n$ . Fluxio motûs in Cylindro  $KNP$  erit ut motus in circulo, cujus radius est  $pr$ . Et fluxio motûs in sphaeræ segmento  $OAG$  erit ut motus in circulo, cujus radius  $rg$ . Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphaeræ rationem habebit, quam cubus ex  $pr$  ad cubum ex  $rg$  (Lemm. H. I.); sive eam, quam cubus ex  $pr$  ad solidum  $pr^2 \times FN$ ; sive eam quam recta  $pr$  ad rectam  $FN$ . Sed  $pr$  ad  $FN$  rationem habet quam fluxio rectanguli  $KP$  ad fluxionem areæ  $NAB$ . Quare fluxio motûs in Cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphaeræ rationem habet, quam fluxio rectanguli  $KP$  ad fluxionem areæ  $NAB$ . Jam verò fluente rectâ  $AF$  rectangulum  $KP$  ita fluat, ut motûs in cylindro fluente  $KNP$  rationem semper servet. Nam motus in cylindro erit semper ut cylindrus; et cylindrus erit semper ut  $AF$ ; id est ut rectangulum  $KN$  &  $AV$ , sive  $KP$ . Literâ  $z$  significetur spatium, quod eâ lege fluat, ut ad rectangulum  $KP$  rationem habeat, quam motus in segmento fluente sphaeræ,  $OAG$ , ad motum in Cylindro fluente  $KNP$ . Spatium igitur  $z$  motûs in segmento sphaeræ  $OAG$  rationem semper servabit. Quare et fluxio rectanguli  $KP$  erit ad fluxionem spatii  $z$  ut fluxio motûs in cylindro ad fluxionem motûs in segmento sphaeræ, sive ut fluxio rectanguli  $KP$  ad fluxionem areæ  $NAB$ . Quare  $\dot{z} = \dot{NAB}$ . Quare et fluentes ipse,  $z$ ,  $NAB$  cum nascente primum rectâ  $AF$  simul à nihilo generari inceperint, erunt semper inter se æquales. Quare  $z : KP = NAB : KP$ . Id est motus in sphaeræ segmento  $OAG$  ad motum in cylindro  $KNP$  ut

area

ubi Nodi sunt in quadraturis, erat  $16''.35''$ .  $16''$ .  $36''$ , & hujus dimidium  $8''$ .  $17''$ .  $38''$ .  $18''$ . (ob rationes suprà explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidero  $20^{\text{gr}}.11'.46''$ . Quoniam igitur nodi Lunæ in tali orbe conficerent annuatim  $20^{\text{gr}}.11'.46''$  in antecedentia; & si plures essent Lunæ, motus Nodorum cujusque (per Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) forent ut tempora periodica; si Lunæ spatio diei siderci juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad  $20^{\text{gr}}.11'.46''$  ut dies sidereus horarum 23. 56' ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43'; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunæ Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquecant, & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat, & inflexibilis reddatur (g).

Pingamus igitur quòd annulus iste, quoad quantitatem materiae, æqualis sit Terræ omni  $\rho\rho\rho\rho\rho\rho$ , quæ globo  $\rho\rho\rho$  superior est; (vid. fig. pag. 114) & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut  $ac$  qu. ad  $AC$  qu. —  $ac$  qu. id est (cùm Terræ semidiameter minor  $FC$  vel  $ac$  sit ad semidiametrum majorem  $AC$  ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secun-

area  $ANB$  ad rectangulum  $KP$ . Quare motus in sphaerâ totâ ad motum in cylindro circumscripto rationem habebit quam tota area  $ANBDBA$  ad quadratum  $KN$ : sive eam, quæ componitur è rationibus areæ  $ANBDBA$  ad circulum  $ABCD$  circuli quæ ad quadratum circumscriptum. Sed area  $ANBDBA$  ad circulum  $ABCD$  rationem habet quam 3 ad 4. (Lemm. H. III.) Quare motus in sphaerâ ad motum in Cylindro rationem habet, quæ componitur è rationibus ternarii ad quaternarium circuli quæ ad quadratum circumscriptum: sive eam, quam tres circuli æquales ad quatuor quadrata circumscripta. Q. E. D.

(<sup>e</sup>) Lemm. H. I. Cor. 6.

(<sup>f</sup>) Lemm. H. III. Jam vero literâ  $r$  significetur circuli radius; literâ  $q$  arcus quadrantis; literâ  $m$ , materia in cylindro; literâ  $n$ , materia in sphaerâ inscriptâ; literâ  $\mu$ , materia in annulo Cylindrum & sphaeram, apud contactum communem, ambiente.

Motus Annuli circum diametrum propriam erit ad motum ejus circum axem sphaeræ ut  $r : q$ . (Lemm. H. III.)

Motus annuli circum axem sphaeræ ad motum cylindri ut  $3\mu : 2m$ . (Lemm. H. Cor. 6.)

Motus Cylindri ad motum sphaeræ ut  $4r^2 : \frac{3q}{2} = 8r : 3q$ .

Quare motus Annuli ad motum sphaeræ ut  $8r^2\mu : 2q^2m$ .

Sed  $m = \frac{2}{3}\mu$ .

Quare motus Annuli ad motum sphaeræ ut  $8r^2\mu : 3q^2\mu$ .

Sed  $8r^2 : 3q^2 = 1000000 : 925275$ .

Erit igitur motus Annuli ad motum sphaeræ ut  $1000000 \times \mu$  ad  $925275 \times m$ . Q. E. D.

(<sup>g</sup>) Si hoc verè dictum sit, nescio qui fieri possit, ut alius sit punctorum æquinoctialium motus, à vi solis oriundus, quàm calculi Newtoniani suadent. Quem tamen longè alium invenerunt viri permagni Eulerus & Simson nostras; quos velim Lector consulat. Ipse nil definio.

dum æquatorem cingeret, & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. 3.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius Nodi, seu Puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus, qui restabit in annulo, erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis, ex annulo & globo compositi, ad motum  $20^{\text{gr}}. 11'. 46''$ , ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem, quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque ideo quibus Puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur, id est vires 317 *in fig. pag. 72 & 74*, sunt in singulis particulis ut distantiae particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. 2.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *papapepe*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda Puncta Æquinoctialia, evaderet minor quàm prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad  $20^{\text{gr}}. 11'. 46''$ , ut 10 ad 73092: ac proinde fieret  $9''. 56''' . 50^{\text{iv}}$ .

Cæterum hic motus ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ minuendus est, idque in ratione sinûs 91706 (qui sinus est complementi graduum  $23\frac{1}{2}$ ) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet  $9''. 7''' . 20^{\text{iv}}$ . Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum à vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad mare movendum erat ad vim Solis, ut 4;4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda est ad vim Solis in eadem proportionem. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio, à vi Lunæ oriunda,  $40''. 52''' . 52^{\text{iv}}$ , ac tota Præcessio annua, à vi utrâque oriunda,  $50''. 00''' . 12^{\text{iv}}$ . Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum

noctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minuto-  
rum secundorum plus minus quinquaginta. LIBER  
TERTIUS.

Si altitudo Terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quàm  $17\frac{1}{6}$ , materia ejus rarior erit ad circumferentiam quàm ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Descripsimus jam systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum. Superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

## S E C T I O V.

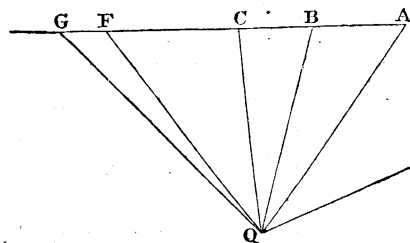
*De Cometis.*

## L E M M A IV.

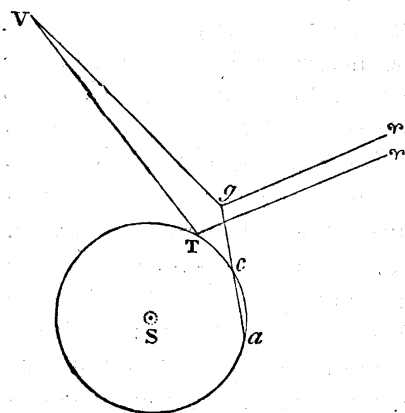
*Cometas esse Lunâ superiores ☾ in regione Planetarum versari.*

Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores, si Terra vergit ad oppositionem. Et contrâ, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi, si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis; qui pro motu Terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc verò celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum Cometâ, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa è Terrâ spectatus, ob motum suum tardiozem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ (detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem, vel retardatione, vel motu retrogrado, distantia Cometæ in hunc mo-





dum colligitur. Sinto  $\angle QGA$ ,  $\angle QFB$ ,  $\angle QCC$  observatæ tres longitudines Cometæ sub initio motûs; fitque  $\angle QFG$  longitudo ultimò observata, ubi Cometa videri desinit. Agatur recta  $ABC$ , cujus partes,  $AB$ ,  $BC$ , rectis  $QA$  &  $QB$ ,  $QB$  &  $QC$  interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur  $AC$  ad  $G$ , ut sit  $AG$  ad  $AB$  ut tempus inter observationem primam & ultimam ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur  $QG$ . Et si Cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progredere; foret angulus  $\angle QGC$  longitudo Cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur  $\angle FQG$ , qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo  $\angle QGC$ , & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: sin Cometa pergit in easdem partes cum Terrâ, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorum reddit, vel fortè retrogradum; uti modò exposui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est; neglecto videlicet ejus incremento vel decremento non-



nullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri possit.

Distantia verò Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet  $s$  solem;  $act$ , orbem magnum;  $a$ , locum Terræ in observatione primâ;  $c$ , locum Terræ in observatione tertiâ;  $t$ , locum Terræ in observatione ultimâ; &  $tr$ , lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus  $\angle TV$  æqualis angulo

angulo  $\angle QF$ , hoc est, æqualis longitudini Cometæ, ubi Terra veritatur in  $t$ . Jungatur  $ac$ , & producatur ea ad  $g$ , ut sit  $ag$  ad  $ac$  ut  $AT$  ad  $AC$ ; & erit  $g$  locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in rectâ  $ac$  uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur  $gr$  ipsi  $tr$  parallela, & capiatur angulus  $\angle gv$  angulo  $\angle QG$  æqualis, erit hic angulus  $\angle gv$  æqualis longitudini Cometæ à loco  $g$  spectati; & angulus  $\angle vg$  parallaxis erit, quæ oritur è translatione Terræ de loco  $g$  in locum  $t$ : ac proinde  $v$  locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus,  $v$ , orbe Jovis inferior esse solet <sup>(a)</sup>.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora præpmodum in Circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursûs, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his Circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes Cometas satis longè infra Jovem. Unde consequens est, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum <sup>(b)</sup>.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitem. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantie: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diametrum Cometæ, dabitur distantia; dicendo quòd distantia sit ad distantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione subduplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diametrum, per tubum opticum sexdecim pedum à Flamstedio observata, & micrometro mensurata, æquabat  $2'. 0''$ ; nucleus autem, seu stella, in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum  $11''$  vel  $12''$ . Luce

<sup>(a)</sup> De Syst. Mund. § 58.

<sup>(b)</sup> Vid. Lib. De Syst. Mund. § 59.

DE MUNDI  
SYSTEMATE

verò & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellæque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21", ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter efflet 30": erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad  $\sqrt{4}$  inversè, & 12" ad 30" directè, id est, ut 24 ad 30, seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665, mense Aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ penè Fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6'; at nucleus, cum Planetis ope tubi optici collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum rarò superet 8' vel 12', diameter verò nuclej, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hæc ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quòd Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longè supra. Errant igitur toto cœlo, qui Cometæ in regionem Fixarum propè ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quàm Planetæ, qui hîc sunt, illustrantur à stellis fixis (c).

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copiâ lucis à se reflexæ Planetas æmuletur. Inde verisimile sit Cometæ longè infra sphaeram Saturni descendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex Caudis. Hæc vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu mi-

(c) De Syst. Mund. § 61.

nuenda

-LIBER  
TERTIUS.

nuenda est distantia Cometarum, ne fumus, à capite semper ornatus, per spatia nimis ampla, incredibili cum velocitate & expansione, propagetur. In posteriore referenda est lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari, & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur à Sole, ideoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole delitescant, & caudas cum maximas tum fulgentissimas, instar trabium ignitarum, nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas, quandoque superaret (d).

Idem denique colligitur ex luce capitem crescente in recessu Cometarum à Terrâ Solem versus, ac decrecente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat Perigæum; splendor verò capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa, radiis solaribus obtektus, desit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad Sept. 4, quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis, micrometro mensuratâ, colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit Aug. 6, esse tantum 6'. 5" inclusâ comâ, at Sept. 2, esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quàm in fine motus; at initio tamen in vicinâ solis longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium mensis Decembris,

(d) De Syst. Mund. § 62.

&amp;c

& iste anni 1680, circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in Perigæis. Verùm splendor maximus capitum contigit ante duas ferè septimanas, ubi modò exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1, majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in Perigæo exillens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis, plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velocissimè motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3, apparebat ut stella quartæ. *Jan.* 9, ut stella quintæ. *Jan.* 13, ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25, vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si fumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita, quæ, temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terrâ distantias æqualiter lucere debuissent, in plagâ Solis maximè splenduerunt, ex alterâ Perigæi parte evanuerunt. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentiâ, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere, ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in viciniâ Solis (e).

*Corol.* 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexâ.

*Corol.* 2. Ex dictis etiam intelligitur, cur Cometæ tantoperè frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniore, qui in his partibus versarentur; & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio opposito; præter alios proculdubio non paucos, quos lux

(e) De Syst. Mund. § 63 & 64.

solaris

solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quàm sint ipsò Jove propiores. Spatii autem, tantillo intervallo circa Solem descripti, pars longe major sita est à latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniore, magis illuminari solent (f).

*Corol.* 3. Hinc etiam manifestum est, quòd Cœli resistentiâ destituuntur. Nam Cometæ, vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos, etiam contra cursum Planetarum diutissimè conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quòd scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphære infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra, si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus propè delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

## PROP. XL. THEOR. XX.

*Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.*

Patet per *Corol.* 1. *Prop.* XIII. Libri Primî, collatum cum *Prop.* VIII. XII & XIII. Libri Tertii (g).

*Corol.* 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt; orbis erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquuplicatâ. Ideoque Come-

(f) De Mund. Syst. § 65.

(g) De Mund. Syst. § 71, 72, 73, 74.

tæ,

tæ, maximâ ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardiùs revolventur. Ut si axis orbis Cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut  $4\sqrt{4}$  (feu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

*Corol. 2.* Orbes autem erunt Parabolæ adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

*Corol. 3.* Et propterea (per *Corol. 7. Prop. xvi. Lib. 1.*) velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cuiusvis, circa solem in circulo revolventis, in subduplicatâ ratione duplæ distantie Planetæ à centro solis, ad distantiam Cometæ à centro solis quaxproximè. Ponamus radium orbis magni, feu Ellipseos in quâ Terrâ revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 100000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes 71675½. Ideoque Cometa, in eâdem telluris à sole distantia mediocri, eâ cum velocitate quæ fit ad velocitatem telluris ut  $\sqrt{2}$  ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes 101364½. In majoribus autem vel minoribus distantis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciproçè, ideoque datur.

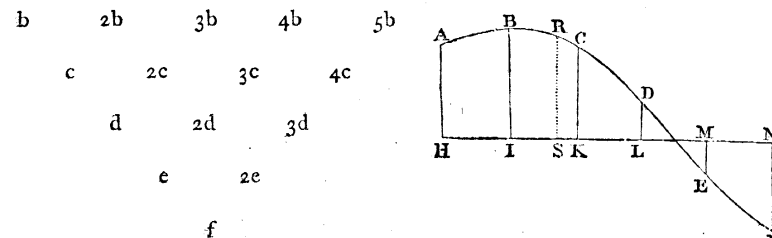
*Corol. 4.* Unde si latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area, quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium 1216373½, & singulis horis area illa erit partium 50682½. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

## L E M M A V.

*Invenire lineam Curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.*

Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam, HN, demitte perpendiculara quotcunque AH, BI, CK, DL, EM, FN.

*Caf. 1.* Si punctorum H, I, K, L, M, N æqualia sunt intervalla LIBER TERTIUS. HI, IK, KL, &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK, &c. differentias primas,  $b, 2b, 3b, 4b, 5b$ , &c. secundas,  $c, 2c, 3c, 4c$ , &c. tertias,  $d, 2d, 3d$ , &c. id est, ita ut sit  $AH - BI = b$ ,  $BI - CK = 2b$ ,  $CK -$



$DL = 3b$ ,  $DL + EM = 4b$ ,  $-EM + FN = 5b$ , &c. dein  $b - 2b = c$ , &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam, quæ hîc est  $f$ . Deinde erectâ quâcunque perpendiculari  $rs$ , quæ fuerit ordinatim applicata ad Curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla HI, IK, KL, LM, &c. unitates esse, & dic  $AH = a$ ;  $-HS = p$ ;  $\frac{1}{2}p$  in  $-IS = q$ ;  $\frac{1}{3}q$  in  $+SK = r$ ;  $\frac{1}{4}r$  in  $+SL = s$ ;  $\frac{1}{5}s$  in  $+SM = t$ ; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendicularum  $ME$ , & præponendo signa negativa terminis  $HS, IS$ , &c. qui jacent ad partes puncti  $s$  versus  $A$ , & signa affirmativa terminis  $SK, SL$ , &c. qui jacent ad alteras partes puncti  $s$ . Et signis probè observatis, erit  $rs = a + bp + cq + dr + es + ft$ , &c.

*Caf. 2.* Quod si punctorum H, I, K, L, &c. inæqualia sint intervalla HI, IK, &c. collige perpendicularorum AH, BI, CK, &c. differentias primas, per intervalla perpendicularorum divisas,  $b, 2b, 3b, 4b, 5b$ ; secundas, per intervalla bina divisas,  $c, 2c, 3c, 4c$ , &c. tertias, per intervalla terna divisas,  $d, 2d, 3d$ , &c. quartas, per intervalla quaterna divisas,  $e, 2e$ , &c. & sic deinceps; id est, ita ut sit  $b = \frac{AH - BI}{HI}$ ,  $2b = \frac{BI - CK}{IK}$ ,  $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ , &c. dein  $c = \frac{b - 2b}{HK}$ ,  $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$ ,  $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ , &c. postea  $d = \frac{c - 2c}{HL}$ ,  $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ , &c. Inventis differentiis, dic  $AH = a$ ;  $-HS = p$ ;  $p$  in  $-IS = q$ ;  $q$  in  $+SK = r$ ;  $r$  in  $+SL = s$ ;  $s$  in  $+SM = t$ ; pergendo scilicet ad usque perpendicularum penultimum  $ME$ , & erit ordinatim applicata  $rs = a + bp + cq + dr + es + ft$ , &c.

*Corol. 1.* Hinc arcæ Curvarum omnium inveniri possunt quamproximè.

proxime. Nam si Curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quamproximè cum areâ Curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola per methodos notiffimas semper quadrari Geometricè.

## L E M M A VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

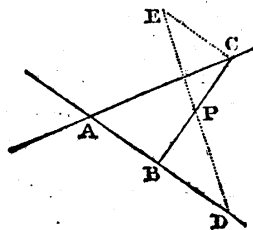
Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes (in fig. præced.) HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudes Cometæ; HS, tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur Curva regularis ABCDE; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsitâ.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

## L E M M A VII.

Per datum punctum, P, ducere rectam lineam, BC, cujus partes, PB, PC, rectis duabus positione datis AB, AC abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.

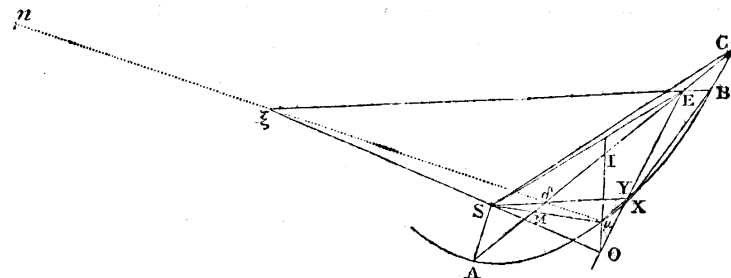


A puncto illo P ad rectarum alterutram AB ducatur recta quævis PD, & producat eadem versus rectam alteram AC usque ad E, ut sit PE ad PD in datâ illâ ratione. Ipsi AD parallela sit EC; & si agatur CPB, erit PC ad PB ut PE ad PD. Q. E. F.

## L E M M A

## L E M M A VIII.

Sit ABC Parabola, umbilicum habens s. Chordâ AC bisectâ in I abscindatur segmentum ABCA, cujus diameter sit  $1\mu$  & vertex  $\mu$ .



In  $1\mu$  productâ capiat  $\mu\sigma$  æqualis dimidio ipsius  $1\mu$ . Jungatur os, & producat eam ad  $\xi$ , ut sit  $s\xi$  æqualis  $2\sigma\sigma$ . Et si Cometa B moveatur in arcu CBA, & agatur  $\xi B$  secans AC in E: dico quod punctum E abscindet de chordâ AC segmentum AE tempori proportionale quamproximè.

Jungatur enim EO secans arcum parabolicum ABC in Y, & agatur  $\mu X$ , quæ tangat eundem arcum in vertice  $\mu$ , & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea  $AEX\mu A$  ad aream curvilineam  $ACY\mu A$  ut AE ad AC. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota  $ASEX\mu A$  ad aream totam  $ASCY\mu A$  ut AE ad AC. Cum autem  $\xi O$  sit ad  $\sigma O$  ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX<sup>(h)</sup>, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si a l aream  $ASEX\mu A$  addatur triangulum EXB, & de summâ auferatur triangulum SEB, manebit area  $ASBX\mu A$  arcæ  $ASEX\mu A$  æqualis, atque ideo ad aream  $ASCY\mu A$  ut AE ad AC. Sed arcæ  $ASBX\mu A$  æqualis est area  $ASBY\mu A$  quamproximè, & hæc area  $ASBY\mu A$  est ad aream  $ASCY\mu A$ , ut tempus descripti arcûs AB ad tempus descripti arcûs totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè. Q. E. D.

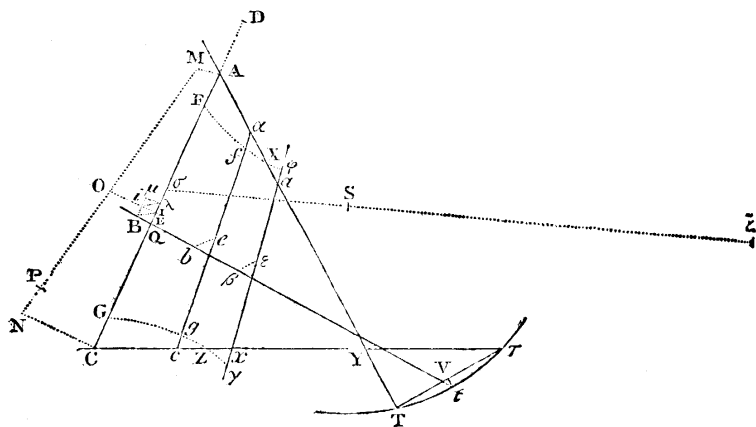
Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem  $\mu$ , est AE ad AC in ratione temporum accurate.

(h) — si jungatur BX] si jungantur BX, SB.





DE MUNDI SYSTEMATE Prop. XIX. Lib. I.) umbilico s, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit trajectory Cometæ. Q. E. L



Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum, per Lemma VII. ut oportet per Lem. VIII. & BE per Lem. XI. sit pars rectæ BS vel BZ, in plano Eclipticæ, arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. x.) longitudo sit chordæ arcus, quem Cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modò B sit verus cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQT, in quo vestigium orbis in plano Eclipticæ descriptum secatur rectam TB, præterpropter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ sit ad  $\frac{4}{3}$  TT in subduplicatâ ratione SQ ad SZ. Et agendo rectam SEB, cujus pars EB æquetur longitudini VT, determinabitur punctum B, quod primâ vice usurpare licet. Tum rectâ AC deletâ & secundum præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine MP; in TB capiatur punctum b, eâ lege, ut si TA, TC se mutuo secuerint in Y, sit distantia Yb ad distantiam YB, in ratione compositâ ex ratione MP ad MN & ratione subduplicatâ SB ad sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β, si modò operationem tertio repetere lubet. Sed hæc methodo operationes

duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua observaverit; postquam inventa sunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ ff & gg secabunt TA & TC in punctis quæsitis x & z\*.

### Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum à Flamstedio observatum & ex observationibus computatum, atque ab Halleio ex hisdem observationibus correctum, Tabula sequens exhibet.

Cometæ					
	Tem. appar.	Tem. verum.	Long. Solis.	Longitudo.	Lat. bor.
1680. Dec. 12	h. 4. 46	h. 4. 46. 0	13° 1. 51. 23	13° 6. 32. 30	8. 28. 0
21	6. 32½	6. 36. 59	11. 6. 44	5. 8. 12	21. 42. 13
24	6. 12	6. 17. 52	14. 9. 26	18. 49. 23	25. 23. 5
26	5. 14	5. 20. 44	16. 9. 22	28. 24. 13	27. 0. 52
29	7. 55	8. 3. 2	19. 19. 43	13. 10. 41	28. 9. 58
30	8. 2	8. 10. 26	20. 21. 9	17. 38. 20	28. 11. 53
1681. Jan. 5	5. 51	6. 1. 38	26. 22. 18	8. 48. 53	26. 15. 7
9	6. 49	7. 0. 53	0. 29. 2	18. 44. 4	24. 11. 56
10	5. 54	6. 6. 19	1. 27. 43	20. 40. 50	23. 43. 52
13	6. 56	7. 8. 55	4. 33. 20	25. 59. 48	22. 17. 28
25	7. 44	7. 58. 42	16. 45. 36	8. 35. 0	17. 56. 30
30	8. 7	8. 21. 53	21. 49. 58	13. 19. 51	16. 42. 18
Feb. 2	6. 20	6. 34. 51	24. 46. 59	15. 15. 53	16. 4. 1
5	6. 50	7. 4. 41	27. 49. 51	16. 59. 6	15. 27. 3

His adde observationes quædam è nostris.

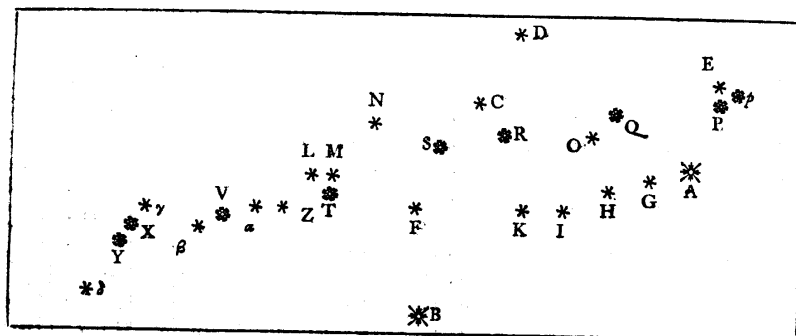
	Temp. appar.	Cometæ Longitudo.	Cometæ Lat. bor.
1681. Feb. 25	h. 8. 30	8. 26. 18. 35	12. 46. 46
27	8. 15	27. 4. 30	22. 36. 12
Mar. 1	11. 0	27. 52. 42	12. 23. 40
2	8. 0	28. 12. 48	12. 19. 38
5	11. 30	29. 18. 0	12. 3. 16
7	9. 30	11. 0. 4. 4	11. 57. 0
9	8. 30	0. 43. 4	11. 45. 52

Hæ observationes telescopio septupedali, & micrometro filisque in foco telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis & po-

\* Confer Problemata ad finem Libri de Sy&. Mund.



positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet A stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (Bayero o) B stellam sequentem tertie magnitudinis in sinistro pede (Bayero ζ) & c stellam sextæ magnitudinis (Bayero n) in talo ejusdem pedis, ac D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ stellas alias minores in eodem pede. Sintque p, P, Q, R, s, T, v, x, loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia AB partium  $80\frac{7}{12}$ , erat AC partium  $52\frac{1}{2}$ , BC  $58\frac{5}{8}$ , AD  $57\frac{5}{12}$ , BD  $82\frac{6}{11}$ , CD  $23\frac{2}{3}$ , AE  $29\frac{4}{7}$ , CE  $57\frac{1}{2}$ , DE  $49\frac{11}{12}$ , AI  $27\frac{7}{12}$ ,



BI  $52\frac{1}{6}$ , CI  $36\frac{7}{12}$ , DI  $53\frac{5}{12}$ , AK  $38\frac{1}{3}$ , BK 43, CK  $31\frac{5}{9}$ , FK 29, FB 23, FC  $36\frac{1}{4}$ , AH  $18\frac{6}{7}$ , DH  $50\frac{7}{8}$ , BN  $46\frac{5}{12}$ , CN  $31\frac{1}{3}$ , BL  $45\frac{5}{12}$ , NB  $31\frac{5}{7}$ . Hæc erat ad HI ut 7 ad 6, & producta transibat inter stellas D & E, sic ut distantia stellæ D ab hac rectâ esset  $\frac{1}{6}$  CD. LM erat ad LN ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam H. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Tandem Poudius noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, & earum longitudes & latitudes in Tabulam sequentem retulit.

Fixarum

Fixarum	Longitudes.	Lat. boreæ.
A	8 26.41.50	12. 8. 36
B	28.40.23	17. 17. 54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4. 58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudes.	Lat. boreæ.
L	8 29.33.34	12. 7. 48
M	29.18.54	12. 7. 20
N	28.48.29	12.31. 9
Z	29.44.48	11.57.13
α	29.52. 3	11.55.48
β	30. 8.23	11.48.56
γ	0.40.10	11.55.16
δ	1. 3.20	11.30.42

Positiones verò cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die veneris Feb. 25. ft. vet. hor.  $8\frac{1}{2}$  p. m. Cometæ in p existentis distantia à stellâ E erat minor quàm  $\frac{1}{13}$  AE, major quàm  $\frac{1}{5}$  AE, ideoque æqualis  $\frac{1}{14}$  AE proximè; & angulus APE nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad pE perpendiculum ab A, distantia cometæ à perpendiculo illo erat  $\frac{1}{5}$  pE.

Eadem nocte horâ  $9\frac{1}{2}$ , Cometæ in P existentis distantia à stellâ E erat major quàm  $\frac{1}{42}$  AE, minor quàm  $\frac{1}{54}$  AE, ideoque æqualis  $\frac{1}{4}$  AE, feu  $\frac{8}{39}$  AE quamproximè. A perpendiculo autem à stellâ A ad rectam PD demisso distantia cometæ erat  $\frac{4}{5}$  pE.

Die solis Feb. 27. hor.  $8\frac{1}{4}$  p. m. Cometæ in Q existentis distantia à stellâ O æquabat distantiam stellarum O & H, & recta QO producta transibat inter stellas K & B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis Mart. 1. hor. 11. p. m. Cometa, in R existens, stellis K & C accuratè interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quàm  $\frac{1}{3}$  CK, & paulo minor quàm  $\frac{1}{3}$  CK +  $\frac{1}{5}$  CR, ideoque æqualis  $\frac{1}{3}$  CK +  $\frac{1}{16}$  CR, feu  $\frac{16}{43}$  CK.

Die mercurii Mart. 2. hor. 8. p. m. Cometæ existentis in s distantia à stellâ C erat  $\frac{4}{9}$  FC quamproximè. Distantia stellæ F à rectâ CS productâ erat  $\frac{1}{14}$  FC; & distantia stellæ B ab eadem rectâ erat quintuplo major quàm distantia stellæ R. Item recta NS producta transibat inter stellas H & I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quàm stellæ I.

Die saturni Mart. 5. hor. 11. p. m. Cometâ existente in T, recta MT æqualis erat  $\frac{1}{2}$  ML, & recta LT producta transibat inter B

DE MUNDI  
SYSTEMATE

& F, quadruplo vel quintuplo propior F quàm B, auferens à BF quintam vel sextam ejus partem versus F. Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quàm stellæ F. Erat M stella perexigua, quæ per telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Die lunæ Mart. 7. hor. 9 $\frac{1}{2}$  p. m. Cometâ existente in v, recta vx producta transibat inter B & F, auferens à BF versus F  $\frac{1}{10}$  BF, & erat ad rectam v $\beta$  ut 5 ad 4. Et distantia cometæ à rectâ  $\alpha\beta$  erat  $\frac{1}{2}$  v $\beta$ .

Die mercurii Mart. 9. horâ 8 $\frac{1}{2}$  p. m. Cometâ existente in x, recta  $\gamma x$  æqualis erat  $\frac{1}{4}\gamma\delta$ , & perpendiculum demissum à stellâ  $\delta$  ad rectam  $\gamma x$  erat  $\frac{2}{5}\gamma\delta$ .

Eâdem nocte horâ 12, cometâ existente in v, recta  $\gamma v$  æqualis erat  $\frac{1}{3}\gamma\delta$ , aut paulo minor, puta  $\frac{1}{6}\gamma\delta$ , & perpendiculum demissum à stellâ  $\delta$  ad rectam  $\gamma v$  æqualis erat  $\frac{1}{6}\gamma\delta$ , vel  $\frac{1}{7}\gamma\delta$  circiter. Sed cometa, ob viciniam horizonis, cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam longitudes & latitudes Cometæ, & Poundius noster ex correctis fixarum locis loca Cometæ correxit, & loca correctâ habentur supra. Micrometro parum affabrè constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores, quatenus ex observationibus nostris oriantur, minutum unum primum vix superant. Cometa autem, juxta observationes nostras, in fine motûs sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, à parallelo quem in fine mensis Februarii tenuerat.

Jam ad orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hætenus descriptis tres, quas Flamstedius habuit Dec. 21, Jan. 5, & Jan. 25. Ex his inveni st partium 9842,1 & vt partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo  $\tau B$  partium 5657; inveni s $\mu$  9747, BE primâ vice 412, s $\mu$  9593,  $\lambda$  413: BE secundâ vice 421, OD 10186, x 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam  $\tau B$  5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 &  $\tau Z$  11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in  $\odot$  &

LIBER  
TERTIUS.

& ascendentem in  $\varpi$  1 $^{\text{st}}$ . 53'; inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61 $^{\text{st}}$ . 20' $\frac{1}{2}$ ; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare à nodo 8 $^{\text{st}}$ . 38', & esse in  $\nearrow$  27 $^{\text{st}}$ . 43' cum latitudine australi 7 $^{\text{st}}$ . 34'; & ejus latus rectum esse 236,8, arcumque radio ad solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri orbis magni posito 100000000; cometam verò in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, & Decemb. 8 $^{\text{d}}$ . 0 $^{\text{h}}$ . 4' p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum, ex Tabulâ sinuum naturalium collectas, determinavi graphicè; construendo schema factis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16 $\frac{1}{2}$  pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi, per operationes partim arithmeticas partim graphicas, loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabulâ sequente videre licet.

	Distant Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
Dec. 12	2792	$\varpi$ 6. 32	8. 18 $\frac{1}{2}$	$\varpi$ 6. 31 $\frac{1}{2}$	8. 26	+1	-7 $\frac{1}{2}$
29	8403	$\kappa$ 13. 13 $\frac{1}{2}$	28. 0	$\kappa$ 13. 11 $\frac{1}{2}$	28. 10 $\frac{1}{2}$	+2	-10 $\frac{1}{2}$
Feb. 5	16669	8 17. 0	15. 29 $\frac{1}{2}$	8 16. 59 $\frac{1}{2}$	15. 27 $\frac{1}{2}$	+0	+2 $\frac{1}{2}$
Mar. 5	21737	29. 19 $\frac{1}{2}$	12. 4	29. 20 $\frac{1}{2}$	12. 3 $\frac{1}{2}$	-1	+ $\frac{3}{2}$

Postea verò Halleius noster orbitam per calculum arithmeticum accuratius determinavit, quàm per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in  $\odot$  &  $\varpi$  1 $^{\text{st}}$ . 53', & inclinationem plani orbitæ ad Eclipticam 61 $^{\text{st}}$ . 20' $\frac{1}{2}$ , ut & tempus perihelii cometæ Decemb. 8 $^{\text{d}}$ . 0 $^{\text{h}}$ . 4': distantiam verò perihelii à nodo ascendente, in orbitâ cometæ mensuratam, invenit esse 9 $^{\text{st}}$ . 20', & latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri solis à terrâ distantia partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca Cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tempus

Tempus verum.	Distantia Cometæ à ☉.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in	
				Long.	Lat.
d. h.		gr. ' "	gr. ' "	' "	' "
Dec. 12. 4.46	28028	19 6.29.25	8.26. 0 Bor.	-3. 5	-2. 0
21. 6.37	61076	5. 6.30	21.43.20	-1.42	+1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	-1. 3	-0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	-1.28	0.44
29. 8. 3	84021	13.12.40	28.10.10	+1.59	+0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+1.15	-0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	8.49.49	26.15.15	+0.56	+0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+0.32	+0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+0.10	+0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+0.33	+0. 2
25. 7.59	145370	8 9.33.40	17.57.55	-1.20	+1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	-2.10	-0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	-2.42	+0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	-0.41	+2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	-2.49	+1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+0.35	+2.24

Apparuit etiam hic Cometa mense *Novembri* præcedente, & *Coburgi* in *Saxonia* à D<sup>no</sup>. *Gottfried Kirch* observatus est diebus mensis hujus quarto, sexto & undecimo, stylo veteri; & ex positionibus ejus ad proximas stellas fixas, ope telescopii nunc bipedalis nunc decempedalis fatis accuratè observatis, ac differentiâ longitudinum *Coburgi* & *Londini*, graduum undecim, & locis Fixarum, à *Poundio* nostro observatis, *Halleius* noster loca Cometæ determinavit ut sequitur.

*Novem.* 3<sup>d</sup>. 17<sup>h</sup>. 2', tempore apparente *Londini*, Cometa erat in  $\Omega$  29<sup>gr</sup>. 51' cum lat. bor. 1<sup>gr</sup>. 17'. 45".

*Novem.* 5<sup>d</sup>. 15<sup>h</sup>. 58' Cometa erat in  $\mathbb{M}$  3<sup>gr</sup>. 23' cum lat. bor. 1<sup>gr</sup>. 6'.

*Novem.* 10<sup>d</sup>. 16<sup>h</sup>. 31' Cometa æqualiter distabat à stellis leonis  $\sigma$  ac  $\tau$  *Bayero*; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo *Flamstediano*  $\sigma$  tunc habuit  $\mathbb{M}$  14<sup>gr</sup>. 15' cum lat. bor. 1<sup>gr</sup>. 41' fere,  $\tau$  verò  $\mathbb{M}$  17<sup>gr</sup>. 3½', cum lat. austr. 0<sup>gr</sup>. 34'. Et medium punctum inter has stellas fuit  $\mathbb{M}$  15<sup>gr</sup>. 39½', cum lat. bor. 0<sup>gr</sup>. 33½'. Sit distantia Cometæ à rectâ illâ 10' vel 12' circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7', & differentia latitudinum 7½', circiter. Et inde Cometa erat in  $\mathbb{M}$  15<sup>gr</sup>. 32' cum lat. bor. 26' circiter.

Observatio

Observatio prima, ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas, ab <sup>LIBER</sup> undè fatis accurata fuit. Secunda etiam fatis accurata fuit. In <sup>TERTIUS.</sup> tertia, quæ minùs accurata fuit, error minorum sex vel septem fuisse potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat  $\Omega$  29<sup>gr</sup>. 30'. 22". latitudo borealis 1<sup>gr</sup>. 25'. 7". & distantia ejus à sole 115546.

Porro *Halleius*, observando quòd Cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense *Septembri* post cædem *Julii Cæsaris*, anno *Christi* 531 *Lampadio* & *Oreste Coss.* anno *Christi* 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & insigni (præterquam quòd sub mortem *Cæsaris*, cauda, ob incommodam telluris positionem, minùs apparuisset): quæsit orbem ellipticum, cujus axis major esset partium 1382957, existente mediocri distantia telluris à sole partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 revolvi possit. Et ponendo nondum ascendentem in  $\odot$  2<sup>gr</sup>. 2'; inclinationem plani orbis ad planum *Eclipticæ* 61<sup>gr</sup>. 6'. 48"; perihelium Cometæ in hoc plano  $\mathbb{J}$  22<sup>gr</sup>. 44'. 25"; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7<sup>d</sup>. 23<sup>h</sup>. 9'; distantiam perihelii à nodo ascendente in plano *Eclipticæ* 9<sup>gr</sup>. 17'. 35"; & axem conjugatum 18481,2: computavit motum Cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus, tam ex observationibus deducta quàm in hoc orbe computata, exhibentur in Tabulâ sequente.

Tempus verum.	Long. obf.	Lat. Bor. obf.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in	
d. h. m.	gr. min. sec.	gr. min. sec.	gr. min. sec.	gr. min. sec.	Long.	Lat.
Nov. 3. 16. 47	29. 51. 0	1. 17. 45	29. 51. 22	1. 17. 32 B	+0.22	-0.13
5. 15. 37	3. 23. 0	1. 6. 0	3. 24. 32	1. 6. 9	+1.32	+0.9
10. 16. 18	15. 32. 0	0. 27. 0	15. 33. 2	0. 25. 7	+1.2	-1.53
16. 17. 0			8. 16. 45	0. 53. 7 A		
18. 21. 34			18. 52. 15	1. 26. 54		
20. 17. 0			28. 10. 36	1. 53. 35		
23. 17. 5			13. 22. 42	2. 29. 0		
Dec. 12. 4. 46	6. 22. 30	8. 28. 0	6. 31. 20	8. 29. 6 B	-1.10	+1.6
21. 6. 37	5. 8. 12	21. 42. 13	5. 6. 14	21. 44. 42	-1.58	+2.29
24. 6. 18	18. 49. 23	25. 23. 5	18. 47. 30	25. 23. 35	-1.53	+0.30
26. 5. 21	28. 24. 13	27. 0. 52	28. 21. 42	27. 2. 1	-2.31	+1.9
29. 8. 3	13. 10. 41	28. 9. 58	13. 11. 14	28. 10. 38	+0.33	+0.40
30. 8. 10	17. 38. 20	28. 11. 53	17. 38. 27	28. 11. 37	+0.7	-0.16
Jan. 5. 6. 11	8. 48. 53	26. 15. 7	8. 48. 51	26. 14. 57	-0.2	-0.10
9. 7. 1	18. 44. 4	24. 11. 56	18. 43. 51	24. 12. 17	-0.13	+0.21
10. 6. 6	20. 40. 50	23. 43. 32	20. 40. 23	23. 43. 25	-0.27	-0.7
13. 7. 9	25. 59. 48	22. 17. 28	26. 0. 8	22. 16. 32	+0.20	-0.56
25. 7. 59	9. 53. 0	17. 56. 30	9. 34. 11	17. 56. 6	-0.49	-0.24
30. 8. 22	13. 19. 51	16. 42. 18	13. 18. 28	16. 40. 5	-1.23	-2.13
Feb. 2. 6. 35	15. 13. 53	16. 4. 1	15. 11. 59	16. 2. 7	-1.54	-1.54
5. 7. 41	16. 59. 6	15. 27. 3	16. 59. 17	15. 27. 0	+0.11	-0.3
25. 8. 41	26. 18. 35	12. 46. 46	26. 16. 59	12. 45. 22	-1.36	-1.24
Mar. 1. 11. 10	27. 52. 42	12. 23. 40	27. 51. 47	12. 22. 28	-0.55	-1.12
5. 11. 39	29. 18. 0	12. 3. 16	29. 20. 11	12. 2. 50	+2.11	-0.26
9. 8. 38	0. 43. 4	11. 45. 52	0. 42. 43	11. 45. 35	-0.21	-0.17

Observationes Cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam descripto, quàm motus Planetarum congruere solent cum eorum theoriis; & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejusque orbem hîc rectè definitum fuisse.

In Tabulâ præcedente omisimus observationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus observatus fuit. *Pontheus* utique & socii, *Novem.* 17. ft. vet. horâ sextâ matutinâ *Romæ*, id est, horâ 5. 10' *Londini*, Filis ad fixas applicatis, cometam observârunt in  $\approx 8^{\text{gr.}}$  30' cum latitudine australi  $0^{\text{gr.}}$  40'. Extant eorum observationes in tractatu, quem *Pontheus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & observationes suas in epistolâ ad *D. Cassinum* misit, cometam eâdem horâ vidit in  $\approx 8^{\text{gr.}}$  30' cum latitudine australi  $0^{\text{gr.}}$

$0^{\text{gr.}}$  30'. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id est, horâ matutinâ *LIBER* 5. 42 *Londini*) cometam vidit in  $\approx 8^{\text{gr.}}$  fine latitudine. Cometa autem per theoriâ jam fuit in  $\approx 8^{\text{gr.}}$  16'. 45" cum latitudine australi  $0^{\text{gr.}}$  53'. 7".

*Nov.* 18. horâ matutinâ 6. 30' *Romæ* (id est, horâ 5. 40' *Londini*) *Pontheus* cometam vidit in  $\approx 13^{\text{gr.}}$  30' cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  20'. *Cellius* in  $\approx 13^{\text{gr.}}$  30' cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  00'. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30' *Avenioni* cometam vidit in  $\approx 13^{\text{gr.}}$  00', cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  00'. Et *R. P. Anglo* in *Academiâ Flexiensî* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 5. 9' *Londini*) cometam vidit in medio inter stellas duas parvas, quarum una media est trium in rectâ lineâ in virginis australi manu, *Bayero*  $\psi$ , & altera est extrema alæ, *Bayero*  $\theta$ . Unde cometa tunc fuit in  $\approx 12^{\text{gr.}}$  46' cum latitudine australi 50'. Eodem die *Bostonia* in *Novâ-Angliâ* in latitudine  $42\frac{1}{2}$  graduum, horâ quintâ matutinâ (id est *Londini* horâ matutinâ 9. 44') cometa visus est prope  $\approx 14^{\text{gr.}}$  cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  30', uti à cl. *Halleio* accepi.

*Nov.* 19. horâ mat.  $4\frac{1}{2}$  *Cantabrigiæ*, cometa (observante juvene quodam) distabat à spicâ  $\approx$  quasi  $2^{\text{gr.}}$  boreazephyrum versus. Erat autem spica in  $\approx 19^{\text{gr.}}$  23'. 47" cum lat. austr.  $2^{\text{gr.}}$  1'. 59". Eodem die hor. 5. mat. *Bostonia* in *Novâ-Angliâ*, cometa distabat à spicâ  $\approx$  gradu uno, differentiâ latitudinum existente 40'. Eodem die in insulâ *Jamaicâ*, cometa distabat à spicâ intervallo quasi gradus unius. Eodem die *D. Artburus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginie* in lat.  $38\frac{1}{2}^{\text{gr.}}$  horâ quintâ matutinâ (id est, horâ 10<sup>a</sup> *Londini*) cometam vidit supra spicam  $\approx$ , & cum spicâ propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi  $\frac{3}{4}^{\text{gr.}}$ . Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod horâ 9. 44' *Londini* Cometa erat in  $\approx 18^{\text{gr.}}$  50' cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  25' circiter. Cometa autem per theoriâ jam erat in  $\approx 18^{\text{gr.}}$  52'. 15" cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  26'. 54".

*Nov.* 20. *D. Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, horâ sextâ matutinâ *Venetis* (id est, horâ 5. 10' *Londini*) cometam vidit in  $\approx 23^{\text{gr.}}$  cum latitudine australi  $1^{\text{gr.}}$  30'. Eodem die *Bostonia*, distabat

distabat cometa à spicâ  $\pi$ , 4<sup>gr</sup>. longitudinis in orientem, ideoque erat in  $\approx 23^{\text{gr}}. 24'$  circiter.

Nov. 21. *Pontbaeus* & focii hor. mat. 7<sup>h</sup> cometam observârunt in  $\approx 27^{\text{gr}}. 50'$  cum latitudine australi 1<sup>gr</sup>. 16', *Cellius* in  $\approx 28^{\text{gr}}$ . *Ango* horâ quintâ matutinâ in  $\approx 27^{\text{gr}}. 45'$ , *Montenarus* in  $\approx 27^{\text{gr}}. 51'$ . Eodem diē in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2<sup>gr</sup>. 2'. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaforæ* in *Indiâ Orientali* (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20' *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ  $\pi$  7<sup>gr</sup>. 35' in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in  $\approx 26^{\text{gr}}. 58'$  cum lat. australi 1<sup>gr</sup>. 11' circiter; & post horas 5 & 40' (ad horam scilicet quintam matutinam *Londini*) erat in  $\approx 28^{\text{gr}}. 12'$  cum lat. austr. 1<sup>gr</sup>. 16'. Per theoriam verò cometa jam erat in  $\approx 28^{\text{gr}}. 10'. 36''$ , cum latitudine australi 1<sup>gr</sup>. 53'. 35".

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in  $\pi$  2<sup>gr</sup>. 33'. *Bosloniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in  $\pi$  3<sup>gr</sup>. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1<sup>gr</sup>. 30'. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaforæ* cometa observabatur in  $\pi$  1<sup>gr</sup>. 50'; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in  $\pi$  3<sup>gr</sup>. 5' circiter. Eodem die *Londini* horâ mat. 6 $\frac{1}{2}$  *Hookius* noster cometam vidit in  $\pi$  3<sup>gr</sup>. 30' circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis; non exactè quidem, sed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quòd lineâ à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis, interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, Eclipticam secuit in  $\pi$  3<sup>gr</sup>. 46'; in angulo 2<sup>gr</sup>. 51'. Et si cometa locatus fuisset in hac lineâ, in  $\pi$  3<sup>gr</sup>, ejus latitudo fuisset 2<sup>gr</sup>. 26'. Sed cum cometa, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hac lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ  $\pi$ , eratque 1<sup>gr</sup>. 30' circiter; & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone*, perpetuò augebatur; ideoque jam sensibilibus major erat quàm 1<sup>gr</sup>. 30'. Inter limites autem jam constitutos 2<sup>gr</sup>. 26' & 1<sup>gr</sup>. 30', magnitudine mediocri latitudo erit 1<sup>gr</sup>. 58' circiter. Cauda cometæ,

cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam  $\pi$ , declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda, æquatori ferè parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. ft. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est horâ 4 $\frac{1}{2}$  *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in  $\pi$  8<sup>gr</sup>. 8', cum latitudine australi 2<sup>gr</sup>. 31', captis scilicet ejus distantis à stellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in  $\pi$  12<sup>gr</sup>. 52', ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quàm 2<sup>gr</sup>. 38'. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulo major erat quàm 1<sup>gr</sup>. 58'; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2<sup>gr</sup>. 18'. Latitudinem *Pontbaeus* & *Galletius* jam decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Craffiores sunt observationes *Pontbaei* & *Cellii*, ex præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & ex *Galletii*: meliores sunt eæ, quæ per positiones cometæ ad Fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Pontbaeo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaforæ* cometa observabatur in  $\pi$  11<sup>gr</sup>. 45'; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in  $\pi$  13<sup>gr</sup>. circiter. Per theoriam verò cometa jam erat in  $\pi$  13<sup>gr</sup>. 22'. 42".

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in  $\pi$  17 $\frac{3}{4}$ <sup>gr</sup>. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore, quòd cometa erat in lineâ rectâ inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in  $\pi$  18<sup>gr</sup>. 36'. Per theoriam verò cometa jam erat in  $\pi$  18 $\frac{1}{2}$ <sup>gr</sup>. circiter.

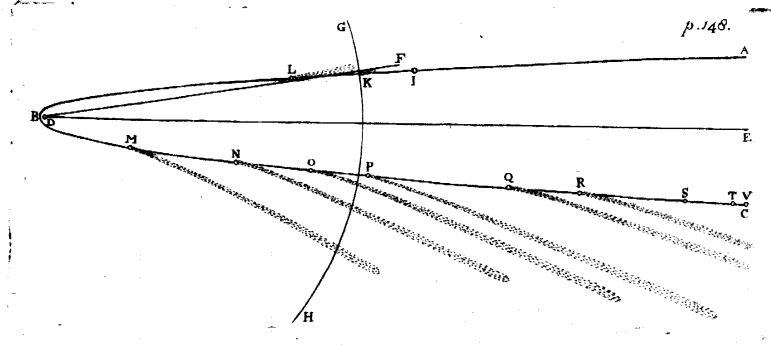
Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ, quatenus congruunt inter se; & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque novum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis secuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam se-

DE MUNDO  
SYSTEMATE

cui non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Eclipticâ in austrum declinabat; & postea, mense *Decembri*, gradibus 29 vergebat ab Eclipticâ in septentrionem; partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarius*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26 & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò, motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ Planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.

Cæterum trajectoriam quam Cometa descripsit, & caudam veram, quam singulis in locis projecit, visum est annexo schémate in plano trajectoriæ delineatas exhibere (*vid. Tab.*): ubi ABC denotat trajectoriam cometæ, D solem, DE trajectoriæ axem, DF lineam nodorum, GH intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, I locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, K locum ejusdem *Nov.* 11, L locum *Nov.* 19, M locum *Dec.* 12, N locum *Dec.* 21, O locum *Dec.* 29, P locum *Jan.* 5 *sequent.* Q locum *Jan.* 25, R locum *Feb.* 5, S locum *Feb.* 25, T locum *Mar.* 5, & U locum *Mar.* 9. Observationes verò sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

*Nov.* 4 & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta, non nisi semissim gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Pontæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30<sup>gr.</sup> longa, solique directè opposita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam  $\delta$ , quæ



quæ tunc erat in  $\pi$   $9^{\text{gr}}. 54'$ . Nov. 19. In *Mary-land* cauda visa <sup>LIBER TERTIUS.</sup> fuit gradus 15 vel 20 longa. Dec. 10. Cauda (observante *Flam- stedio*) transibat per medium distantiae inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam  $\delta$  in aquilæ australi alâ, & definebat prope stellas A,  $\omega$ ,  $b$  in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in  $\varpi$   $19\frac{1}{2}^{\text{gr}}$ . cum latitudine boreali  $34\frac{3}{4}^{\text{gr}}$ . circiter. Dec. 11. Cauda surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero*  $\alpha$ ,  $\beta$ ) definens in  $\varpi$   $26^{\text{gr}}. 43'$ , cum latitudine boreali  $38^{\text{gr}}. 34'$ . Dec. 12. Cauda transibat per medium sagittæ, nec longè ultra protendebatur, definens in  $\varpi$   $4^{\text{gr}}$ . cum latitudine boreali  $42^{\text{gr}}$ . circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis fereno, cauda Dec. 12, horâ 5. 40' *Romæ* (observante *Pon- thro*) supra cygni uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à stellâ illâ  $2^{\text{gr}}. 15'$  austrum versus, & terminus superior erat in  $\chi$   $22^{\text{gr}}$ . cum latitudine boreali  $61^{\text{gr}}$ . Et hinc longa erat cauda  $70^{\text{gr}}$ . circiter. Dec. 21. Eadem surgebat ferè ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans à  $\beta$  & *Schedir*, & distantiam ab utrâque distantiae earum ab invicem æqualem habens, ideoque definens in  $\gamma$   $24^{\text{gr}}$ . cum latitudine  $47\frac{1}{2}^{\text{gr}}$ . Dec. 29. Cauda tangebatur *Scheat* sitam ad sinistram, & interval- lum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè com- plebat, & longa erat  $54^{\text{gr}}$ ; ideoque definebat in  $\gamma$   $19^{\text{gr}}$ . cum la- titudine  $35^{\text{gr}}$ . Jan. 5. Cauda tetigit stellam  $\pi$  in pectore *Andro- medæ* ad latus ejus dextrum, & stellam  $\mu$  in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat  $40^{\text{gr}}$ ; curva autem erat, & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per solem & caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum, & chorda cau- dæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. Jan. 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Al- gol*, & luce tenuissimâ definebat è regione stellæ  $\kappa$  in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat  $3^{\text{gr}}. 50'$ , & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum  $8\frac{1}{2}^{\text{gr}}$ . Jan. 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel

6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente, ubi cœlum valdè serene-  
num erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longi-  
tudinem graduum duodecim, & paulo ultra. Dirigebatur autem  
ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque  
declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum  
decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus  
duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit.  
*Pontæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12  
vidisse scribit. *Feb.* 25 & deinceps Cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti, & reliqua Cometæ hujus  
phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quòd  
corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad  
instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm  
vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa  
hicce, in transitu suo per viciniam Solis, statim dissipari debuif-  
set. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè  
ut quadratum distantiae locorum à Sole. Ideoque cùm distantia  
Cometæ à centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio versabatur, ef-  
fet ad distantiam Terræ à centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor  
Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud  
nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebul-  
lientis est quasi triplo major, quàm calor quem terra arida concipit  
ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si  
rectè conector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor aquæ  
ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud Cometam in  
Perihelio versantem ex radiis solaribus concipere possèt, quasi  
2000 vicibus major quàm calor ferri candentis. Tanto autem ca-  
lore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim con-  
sumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem  
concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam  
globus ferri candentis, digitum unum latus, calorem suum om-  
nem spatio horæ unius, in aère consistens, vix amitteret. Globus  
autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, prop-  
terea quòd superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris  
ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate ma-  
teriae

teriae suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic  
Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, die-  
bus totidem\*, & idcirco annis 50000, vix refrigereret. Suspicio  
tamen quòd duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in mi-  
nore ratione quàm ea diametri: & optârim rationem veram per  
experimenta investigari.

Porro notandum est quòd Cometa mense *Decembri*, ubi ad So-  
lem modò incaluerat, caudam emittebat longè majorem & splen-  
didiorè quàm antea mense *Novembri*, ubi Perihelium nondum  
attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissi-  
mæ è Cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem  
Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem cau-  
dæ. Et inde colligere videor, quòd cauda nihil aliud sit quàm  
vapor tenuissimus, quem caput seu nucleus Cometæ per calorem  
suum emittit.

Cæterum de Cometarum Caudis triplex est opinio; eas vel ju-  
bar esse Solis, per translucida Cometarum capita propagatum; vel  
oriri ex refractione lucis, in progressu ipsius à capite Cometæ in  
Terram; vel denique nubem esse, seu vaporem, à capite Cometæ  
jugiter furgentem, & abeuntem in partes à Sole averfas. Opinio  
prima eorum est, qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum Optica-  
rum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi  
quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per  
aërem semper volitantibus: ideoque in aère fumis crassioribus in-  
fecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aère clariore te-  
nuius est, & ægrius sentitur: in Coelis autem sine materiâ re-  
flectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in ju-  
bare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam  
visio non fit nisi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur  
igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum to-  
tum, luce Solis illustratum, uniformiter splendeat. Opinio se-  
cunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegan-  
tur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites insepa-  
rabiles. Lux Fixarum & Planetarum, distinctè ad nos transmissa,  
demonstrat Medium coeleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam  
quod dicitur Fixas ab *Aegyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse,

\* Rectius ut opinor diebus 20000000.



id, quoniam rarissime contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones, tum oculorum, tum Aëris tremuli, referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo telescopiis evanescunt. Aëris & ascendentium vaporum tremore fit, ut radii facile de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde est, quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cessat: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos, sine omni refractione sensibili. Nequis contendat, quod Caudæ non soleant videri in Cometis, cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: sciendum est, quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: Cometæ autem sæpè caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valdè obtusa. Sic enim Cometa anni 1680, mense *Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat, splendore notabili, usque ad gradus 40, 50, 60 & 70 longitudinis & ultrâ: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis; cauda verò, luce quidem pertenui sed satis sensibili, longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissimâ, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultrâ: ut suprâ dictum est. Sed & *Feb.* 9 & 10, ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflectio illa, in iisdem cœli regionibus, in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa anni 1680 *Decemb.* 28. horâ 8½ p. m. *Londini*, versabatur in  $\Upsilon$  8°. 41', cum latitudine boreali 28°. 6', Sole existente in  $\Psi$  18°. 26'. Et cometa anni 1577, *Dec.* 29 versabatur in  $\Upsilon$  8°. 41' cum latitudine boreali 28°. 40', Sole etiam existente in  $\Psi$  18°. 26' circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum 4½ ab oppositione

positione Solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiât cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri, & in regiones à Sole averfas ascendere, confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in planis orbium Cometarum, per Solem transeuntibus, jacentes deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quod spectatori, in his planis constituto, apparent in partibus à Sole directè averfis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque ideo quod cauda, convexo sui latere, partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiore, & limite minus indistincto terminatæ, quàm ad concava. Pendent igitur phænomena Caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus: ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit, à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit, ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinâ Solis, & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate

incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De Caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hîc nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus Aeris nostri, & motibus nubium, caudas aliquâ ex parte obscurantium, oriantur; vel fortè à partibus Viæ Lactææ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari<sup>(1)</sup>.

Vapores autem, qui spatii tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligitur ex raritate Aeris nostri. Nam Aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus, quàm Aqua ejusdem ponderis; ideoque aeris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columnâ pedali latitudinis ejusdem. Columna autem Aeris ad summitatem Atmosphære affurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde verò, per regulam multis experimentis confirmatam, quod compressio Aeris sit ut pondus Atmosphære incumbens, quodque gravitas sit reciprocè ut quadratum distantie locorum à centro Terræ, computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. 2. in eundo, inveni quod Aer, si ascendatur à superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quàm apud nos in ratione longè majori, quàm spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus Aeris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleteret omnes Planetarum regiones usque ad sphaeram Saturni, & longè ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immensum rarefcat; & coma, seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quàm superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè craffiorem Cometarum atmosphæram, magnamque corporum gra-

(1) De Mund. Syst. §. 67. & 70.

itationem

itationem Solem versus, & gravitationem particularum aeris & vaporum in se mutuò, fieri possit ut Aer in spatiis cœlestibus, inque Cometarum caudis, non adeo rarefcat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas transfluentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, craffitudinè suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat, & extinguit penitus: per immensam verò caudarum craffitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento transflucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quàm Aeris nostri in tenebroso cubiculo, latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis<sup>(k)</sup>.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci ferè potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam fecat. Nam vapor in termino caudæ, si rectâ ascendat à Sole, ascendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectâ ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensûs sui eundem componendo, ascendit obliquè. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem fecat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à lineâ caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ Jan. 25, ascendere cœperat à capite ante Dec. 11, ideoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10 apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore Perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio, in viciniâ Solis, celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiu apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui à tempore Perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit, quàm ob nimiam suam tam à Sole illustrante quàm ab oculis nostris distantiam vi-

(k) De Mund. Syst. §. 68.

deri defuit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescent, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum, quem habuere sub initio, per cœlos unâ cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt, ac diutissimè conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum, & progressum in partes à Sole averfas *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quòd substantiæ crassiæ impeditissimis in regionibus nostris à radiis Solis sensibilibiter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, ideoque servatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu Aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii solares non agitant Media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa, calore sibi communicato, rarefiet; & ob diminutam eâ raritatem gravitatem suam specificam, quâ prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes, ex quibus cauda componitur. Ad ascensum vaporum conducit etiam, quòd hi gyantur circa Solem, & eâ actione conantur à Sole recedere: at Solis Atmosphæra, & materia cœlorum, vel planè quiescit, vel motu suo quem à Solis rotatione acceperit, tardius gyatur. Hæ sunt causæ ascensûs caudarum in viciniâ Solis, ubi orbis curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & eâ ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt,

consistunt, & caudas quàm longissimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsis pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur, & iis liberrimè adhærebunt. Gravitatis enim vaporum in Solem non magis efficiet, ut caudæ postea decendant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit, ut hæc decendant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadent, vel simul in ascensu suo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quo minùs caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis, aut aliis quibuscunque, facillimè accipiant, & postea liberrimè servant<sup>(1)</sup>.

Caudæ igitur, quæ in Cometarum Periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde, post longam annorum seriem, cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde in Periheliis Cometarum illorum, qui ad usque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuò rarefcit, ac dilatatur. Quâ ratione fit, ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quàm juxta caput Cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem, & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum Atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omninò requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiosè fatis excitentur, qui vel in nubes coacti decendant in pluviis, & Terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutrant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur, & in Terram aridam convertitur, continuò suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus om-

(1) De Mund. Syst. § 69.

ainò crescunt, dein magnâ ex parte in Terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decil. Hinc moles terræ aridæ indies augetur; & liquores, nisi aliunde augmentum fumerent, perpetuò decrefcere deberent, ac tandem deficere. Porro fufpisor Spiritum illum, qui Aeris nostri pars minima est fed subtiliffima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ Cometarum in defcenfu eorum in Solem excurrendo in caudas, diminuuntur; & eâ certe in parte quæ Solem respicit, anguftiores redduntur: & viciffim in reccffu eorum à Sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; fi modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modò ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentiffimas abiere, & nuclei fumo forfan craffiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus craffior & nigrior effe folet. Sic caput Cometæ, de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terrâ distantiiis obfcurius apparuit post Perihelium fuum quàm antea. Menfe enim *Decembri* cum ftellis tertix magnitudinis conferri solebat, at menfe *Novembri* cum ftellis primæ & fecundæ. Et qui utrumque viderant, majorem defcribunt Cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigienfi*, *Novem. 19*, Cometa hicce luce fuâ quantumvis plumbeâ & obtufâ, æquabat Spicam Virginis, & clariùs micabat quàm pofttea. Et *Montenaro Nov. 20. ft. vet.* Cometa apparebat major ftellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, fcripfit caput ejus menfe *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentiffimam emittebat, parvum effe & magnitudine vifibili longe cedere Cometæ, qui menfe *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem effe conjectabatur, quòd materia capitis sub initio copiofior effet, & paulatim confumeretur.

Eodem fpectare videtur, quòd capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentiffimas emiferunt, apparuerint fubobfcura & exigua. Nam anno 1668 *Mart. 5. ft. nov. horâ feptimâ vespertinâ R. P. Valentinus Eftancius, Brafilie* agens, Cometam vidit horizonti proximum ad occafum Solis brumalem, capite minimo

nimo & vix confpicio, caudâ verò fuprà modum fulgente, ut ftantes in littore fpeciem ejus è mari reflexam facillè cernerent. Speciem utique habebat trabis fplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auftum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem fplendor tres folùm dies durabat, fubinde notabiliter decrefcens; & interea decrefcente fplendore aucta eff magnitudine cauda. Unde etiam in *Lufitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eff, gradus 45) occupâffe dicitur, ab occidente in orientem fplendore cum infigni protenfa; nec tamen tota apparuit, capite femper in his regionibus infra horizontem delitefcente. Ex incremento caudæ & decremento fplendoris manifeflum eff, quòd caput à Sole reccffit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et in Chronico *Saxonico* fimilis legitur cometa anni 1106, *cujus ftella erat parva ☿ obfcura* (ut ille anni 1680) *fed fplendor qui ex eâ exivit valdè clarus, ☿ quafi ingens trabs ad orientem ☿ aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio menfis *Februarii*, ac deinceps circa vefperam, ad occafum Solis brumalem. Inde verò & ex fitu caudæ colligitur caput fuiffe Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Parisienfis*, *diffabat quafi cubito uno, ab borâ tertiâ* [rectiùs sextâ] *ufque ad boram nonam radium ex fe longum emittens*. Talis etiam erat ardentiffimus ille Cometa ab *Ariftotele* defcriptus Lib. 1. *Meteor. 6. cujus caput primo die non confpectum eff, eo quòd ante Solem vel faltem sub radiis folaribus occidiffet, fequente verò die quantum potuit vifum eff. Nam quàm minimâ fieri poteft diftantiâ Solem reliquit, ☿ mox occubuit*. Ob nimium ardorem [caudæ fcilicet] *nondum apparebat capitis fparfus ignis, fed procedente tempore* (ait *Ariftoteles*) *cum* [cauda] *jam minus flagra-ret, reddita eff* [capiti] *Cometæ fua facies. Et splendorem fuum ad tertiam ufque cœli partem* [id eff, ad 60<sup>gr.</sup>] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* [An. 4. *Olymp. 101.*] *☿ afcendens ufque ad cingulum Orionis ibi evanuit*. Cometa ille anni 1618, qui è radiis folaribus caudatiffimus emerfit, ftellas primæ magnitudinis æquare, vel paulo fuperare, videbatur; fed majores apparuere Cometæ non pauci, qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquâffe traduntur.

Diximus

Diximus Cometas esse genus Planetarum in orbibus valde eccentricis circa Solem revolvuntur. Et quemadmodum è Planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyantur; sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, nè Solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium verò transversas diametros, & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem orbibus, post longa temporum intervalla, redeuntium, determinanda reliquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

## P R O P. XLII. P R O B. XXII.

*Inventam Cometæ Trajectoriam corrigere.*

*Operatio 1.* Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem inventa; & feligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàm maximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longè à Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur sectio conica: & ejus areæ, radiis à Sole ad loca inventa ductis terminatæ, funto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

*Oper. 2.* Augeatur longitudo Nodorum plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20' vel 30', quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut supra: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t, quo area tota d+e describi debeat.

*Oper.*

*Oper. 3.* Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20' vel 30', quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota δ+ε describi debeat.

Jam sit c ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut δ ad ε, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque s tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & - probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit  $2G - 2C = mG - mg + nG - nγ$ , &  $2T - 2S$  æquale  $mT - mt + nT - nτ$ . Et si in operatione primâ i designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & k longitudinem nodi alterutrius; erit  $1+nQ$  vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eclipticæ, &  $k+mP$  vera longitudo nodi. Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ρ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates  $\frac{1}{L}$ ,  $\frac{1}{T}$ ,  $\frac{1}{\lambda}$  ejusdem latera transversa respectivè; erit  $R+mR-mR+nR-nR$  verum latus rectum, &  $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$  verum latus transversum trajectoriæ, quam Cometa describit. Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. Q. E. I.

Cæterum Cometarum revolvuntur tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem orbe revolventem. Et tum demum, ex revolutionum temporibus, dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothefi quòd sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantum ex trajectoriâ parabolicâ Cometæ anni 1680, quam cum observationibus supra contuli, sed etiam ex eâ Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab Hevelio

observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum ascendentem in  $\Pi$   $21^{\text{gr.}}$   $13'.55''$ ; Inclinationem orbitæ ad planum Eclipticæ  $21^{\text{gr.}}$   $18'.40''$ ; distantiam Perihelii à Nodo in orbitâ  $49^{\text{gr.}}$   $27'.30''$ ; Perihelium in  $\Omega$   $8^{\text{gr.}}$   $40'.30''$  cum latitudine austrinâ heliocentricâ  $16^{\text{gr.}}$   $1'.45''$ ; Cometam in Perihelio *Novem.*  $24^{\text{d.}}$   $11^{\text{h.}}$   $52^{\text{p.}}$  m. tempore æquato *Londini*, vel  $13^{\text{h.}}$   $8'$  *Gedani*, stylo veteri; & latus rectum Parabolæ 410286, existente mediocri Terræ à Sole distantia 100000. Quàm probè loca Cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex Tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

Temp.

Temp. Appar. Genadi, st. vet.	Observatæ Cometæ distantie.	Loca observata.	Locacomputata in Orbe.
<i>Decemb.</i> $3^{\text{d.}}$ $18^{\text{h.}}$ $29^{\text{m.}}$ $\frac{1}{2}$	à Corde Leonis $46.24.20$ à Spicâ Virginis $22.52.10$	Long. $\approx$ $7.1.0$ Lat. austr. $21.39.0$	$\approx$ $7.1.29$ $21.38.50$
4.18. $\frac{1}{2}$	à Corde Leonis $46.2.45$ à Spicâ Virginis $23.52.40$	Long. $\approx$ $16.15.0$ Lat. austr. $22.24.0$	$\approx$ $6.16.5$ $22.24.0$
7.17.48	à Corde Leonis $44.48.0$ à Spicâ Virginis $27.56.40$	Long. $\approx$ $3.6.0$ Lat. austr. $25.22.0$	$\approx$ $3.7.33$ $25.21.40$
17.14.43	à Corde Leonis $53.15.15$ ab Hum. Orionis dext. $45.43.30$	Long. $\Omega$ $2.56.0$ Lat. austr. $49.25.0$	$\Omega$ $2.56.0$ $49.25.0$
19.9.25	à Procyone $35.13.50$ à Lucid. Mandib. Ceti $52.56.0$	Long. $\Pi$ $28.40.30$ Lat. austr. $45.48.0$	$\Pi$ $28.43.0$ $45.46.0$
20.9.53 $\frac{1}{2}$	à Procyone $40.49.0$ à Lucid. Mandib. Ceti $40.4.0$	Long. $\Pi$ $13.3.0$ Lat. austr. $39.54.0$	$\Pi$ $3.5.0$ $39.53.0$
21.9.9 $\frac{1}{2}$	ab Hum. dext. Orionis $26.21.25$ à Lucid. Mandib. Ceti $29.28.0$	Long. $\Pi$ $2.16.0$ Lat. austr. $23.41.0$	$\Pi$ $2.18.30$ $33.39.40$
22.9.0	ab Hum. dext. Orionis $29.47.0$ à Lucid. Mandib. Ceti $20.29.30$	Long. $\gamma$ $24.24.0$ Lat. austr. $27.45.0$	$\gamma$ $24.27.0$ $27.46.0$
26.7.58	à Lucidâ Arietis $23.20.0$ ab Aldebaran $26.44.0$	Long. $\gamma$ $9.0.0$ Lat. austr. $12.36.0$	$\gamma$ $9.2.28$ $12.34.13$
27.6.45	à Lucidâ Arietis $20.45.0$ ab Aldebaran $28.10.0$	Long. $\gamma$ $7.5.40$ Lat. austr. $10.23.0$	$\gamma$ $7.8.45$ $10.23.13$
28.7.39	à Lucidâ Arietis $18.29.0$ à Palilicio $29.37.0$	Long. $\gamma$ $5.24.45$ Lat. austr. $8.22.50$	$\gamma$ $5.27.52$ $8.23.37$
31.6.45	à Cing. Androm. $30.48.10$ à Palilicio $32.53.30$	Long. $\gamma$ $2.7.40$ Lat. austr. $4.13.0$	$\gamma$ $2.8.20$ $4.16.25$
<i>Jan.</i> 1665. 7.7.37 $\frac{1}{2}$	à Cing. Androm. $25.11.0$ à Palilicio $37.12.25$	Long. $\gamma$ $28.24.47$ Lat. bor. $0.54.0$	$\gamma$ $28.24.2$ $0.53.0$
13.7.0	à capite Androm. $28.7.10$ à Palilicio $38.55.20$	Long. $\gamma$ $27.6.54$ Lat. bor. $3.6.50$	$\gamma$ $27.6.39$ $3.7.40$
24.7.29	à Cing. Androm. $20.32.15$ à Palilicio $40.5.0$	Long. $\gamma$ $26.29.15$ Lat. bor. $5.25.50$	$\gamma$ $26.28.50$ $5.26.0$
<i>Feb.</i> 7.8.27		Long. $\gamma$ $27.4.46$ Lat. bor. $7.3.29$	$\gamma$ $27.24.55$ $7.3.15$
22.8.46		Long. $\gamma$ $28.29.46$ Lat. bor. $8.12.36$	$\gamma$ $28.29.58$ $8.10.25$
<i>Mar.</i> 1.8.16		Long. $\gamma$ $29.18.15$ Lat. bor. $8.38.26$	$\gamma$ $29.18.20$ $8.36.12$
7.8.37		Long. $\gamma$ $0.2.48$ Lat. bor. $8.56.30$	$\gamma$ $0.2.42$ $8.56.56$

Mense *Februario* anni ineuntis 1665, stella prima arietis, quam in sequentibus vocabo  $\gamma$ , erat in  $\gamma$  28<sup>gr</sup>. 30'. 15" cum latitudine boreali 7<sup>gr</sup>. 8'. 58". Secunda arietis erat in  $\gamma$  29<sup>gr</sup>. 17'. 18" cum latitudine boreali 8<sup>gr</sup>. 28'. 16". Et stella quædam alia septimæ magnitudinis, quam vocabo A, erat in  $\gamma$  28<sup>gr</sup>. 24'. 45" cum latitudine boreali 8<sup>gr</sup>. 28'. 33". Cometa verò *Feb.* 7<sup>d</sup>. 7'. 30" *Parisijs* (id est *Feb.* 7<sup>d</sup>. 8'. 37" *Gedani*) ft. vet. triangulum constituebat cum stellis illis  $\gamma$  & A. rectangulum ad  $\gamma$ . Et distantia cometæ à stellâ  $\gamma$  æqualis erat distantia stellarum  $\gamma$  & A, id est 1<sup>gr</sup>. 19'. 46" in circulo magno, atque ideo ea erat 1<sup>gr</sup>. 20'. 46" in parallelo latitudinis stellæ  $\gamma$ . Quare si de longitudine stellæ  $\gamma$  detrahatur longitudo 1<sup>gr</sup>. 20'. 26", manebit longitudo Cometæ  $\gamma$  27<sup>gr</sup>. 9'. 49". *Auzoutius* ex hac suâ observatione Cometam posuit in  $\gamma$  27<sup>gr</sup>. 0' circiter. Et ex schemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in  $\gamma$  26<sup>gr</sup>. 59'. 24". Ratione mediocri posui eundem in  $\gamma$  27<sup>gr</sup>. 4'. 46". Ex eâdem observatione *Auzoutius* latitudinem Cometæ jam posuit 7<sup>gr</sup>. & 4' vel 5' boream versus. Eandem rectius posuisset 7<sup>gr</sup>. 3'. 29", existente scilicet differentiâ latitudinum cometæ & stellæ  $\gamma$  æquali differentiâ longitudinum stellarum  $\gamma$  & A.

*Feb.* 22<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 30' *Londini*, id est *Feb.* 22<sup>d</sup>. 8<sup>h</sup>. 46' *Gedani*, distantia Cometæ à stellâ A, juxta observationem *Hookii* à seipso in schemate delineatam, ut & juxta observationes *Auzoutii* à *Petito* in schemate delineatas, erat pars quinta distantia inter stellam A & primam arietis, seu 15'. 57". Et distantia cometæ à lineâ jungente stellam A & primam arietis erat pars quarta ejusdem partis quintæ, id est 4'. Ideoque Cometa erat in  $\gamma$  28<sup>gr</sup>. 29'. 46", cum lat. bor. 8<sup>gr</sup>. 12'. 36".

*Mart.* 1<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 0' *Londini*, id est *Mart.* 1<sup>d</sup>. 8<sup>h</sup>. 16' *Gedani*, Cometa observatus fuit prope secundam arietis, existente differentiâ inter eisdem ad distantiam inter primam & secundam arietis, hoc est ad 1<sup>gr</sup>. 33', ut 4 ad 45 secundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 secundum *Gottignies*. Unde distantia Cometæ à secundâ arietis erat 8'. 16" secundum *Hookium*, vel 8'. 5" secundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8'. 10". Cometa verò secundum *Gottignies* jam modò prætergressus fuerat secundam arietis, quasi spatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti, id est 1'. 35" circiter

citer (quocumq; fatis consentit *Auzoutius*) vel paulo minorem secundum *Hookium*, puta 1'. Quare si ad longitudinem primæ arietis addatur 1', & ad latitudinem ejus 8'. 10", habebitur longitudo Cometæ  $\gamma$  29<sup>gr</sup>. 18', & latitudo borealis 8<sup>gr</sup>. 36'. 26".

*Mart.* 7<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 30' *Parisijs* (id est *Mart.* 7<sup>d</sup>. 8<sup>h</sup>. 37' *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantia Cometæ à secundâ arietis æqualis erat distantia secundæ arietis à stellâ A, id est 52'. 29". Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45' vel 46', vel ratione mediocri 45'. 30". Ideoque Cometa erat in  $\delta$  0<sup>gr</sup>. 2'. 48". Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8<sup>gr</sup>. 54'. Sed sculptor viam cometæ sub finem motûs ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii*, à se constructo, incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8<sup>gr</sup>. 55'. 30". Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8<sup>gr</sup>. 56', vel 8<sup>gr</sup>. 57'.

Visus etiam fuit hic Cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in  $\delta$  0<sup>gr</sup>. 18', cum lat. bor. 9<sup>gr</sup>. 3½' circiter.

Apparuit hic Cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, & uno die gradus ferè virginti confecit. Cursus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoria à principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quàm theoriæ Planetarum cum eorum observationibus congruere solent; ut inspicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo angulum illum 49<sup>gr</sup>. 27'. 18". Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit; & inde demonstratur motus annuus Terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano Eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in  $\alpha$  23<sup>gr</sup>. 23; inclinatio orbitæ ad Eclipticam 83<sup>gr</sup>. 11'; Perihelium in  $\Pi$  25<sup>gr</sup>. 29'. 30"; distantia Perihelia à Sole 56020, existente radio orbis magni

DE MUNDT SYSTEMATE 100000, & tempore perihelii *Julii* 2<sup>d</sup>. 3<sup>h</sup>. 50'. Loca autem Cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in Tabulâ sequente.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Comp. Lat. Bor.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. m.	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "		
<i>Jul.</i> 13.12.55	♌ 1. 2.30	♌ 13. 5.42	♌ 29.28.13	♌ 13. 6.42	♌ 29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	♌ 2.53.12	♌ 11.37. 4	♌ 29.34. 0	♌ 11.39.43	♌ 29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	♌ 4.45.45	♌ 10. 7. 6	♌ 29.33.30	♌ 10. 8.40	♌ 29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	♌ 10.38.21	♌ 5.10.27	♌ 28.51.42	♌ 5.11.30	♌ 28.50.28	+1. 3	-1.14
25.14. 5	♌ 12.35.28	♌ 3.27.53	♌ 24.24.47	♌ 3.27. 0	♌ 28.23.40	-0.53	-1. 7
31. 9.42	♌ 18. 9.22	♌ 27.55. 3	♌ 26.22.52	♌ 27.54.24	♌ 26.22.25	-0.39	-0.27
31.14.55	♌ 18.21.53	♌ 27.41. 7	♌ 26.16.57	♌ 27.41. 8	♌ 26.14.50	+0. 1	-2. 7
<i>Aug.</i> 2.14.56	♌ 20.17.16	♌ 25.29.32	♌ 25.16.19	♌ 25.28.46	♌ 25.17.28	-0.46	+1. 9
4.10.49	♌ 22. 2.50	♌ 23.18.20	♌ 24.10.49	♌ 23.16.55	♌ 24.12.19	-1.25	+1.30
6.10. 9	♌ 23.56.45	♌ 20.42.23	♌ 22.47. 5	♌ 20.40.32	♌ 22.49. 5	-1.51	+2. 0
9.10.26	♌ 26.50.52	♌ 16. 7.57	♌ 20. 6.37	♌ 16. 5.55	♌ 20. 6.10	-2. 2	-0.27
15.14. 1	♌ 2.47.13	♌ 3.30.48	♌ 11.37.33	♌ 3.26.18	♌ 11.32. 1	-4.30	-5.32
16.15.10	♌ 3.48. 2	♌ 0.43. 7	♌ 9.34.16	♌ 0.41.55	♌ 9.34.13	-1.12	-0. 3
18.15.44	♌ 5.45.33	♌ 24.52.53	♌ 5.11.15	♌ 24.49. 5	♌ 5. 9.11	-3.48	-2. 4
			Austr.		Austr.		
22.14.44	♌ 9.35.49	♌ 11. 7.14	♌ 5.16.53	♌ 11. 7.12	♌ 5.16.50	-0. 2	-0. 3
23.15.52	♌ 10.36.48	♌ 7. 2.18	♌ 8.17. 9	♌ 7. 1.17	♌ 8.16.41	-1. 1	-0.28
26.16. 2	♌ 13.31.10	♌ 24.45.31	♌ 16.38. 0	♌ 24.44. 0	♌ 16.38.20	-1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum Cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in  $\gamma$  21<sup>gr</sup>. 16'. 30"; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 17<sup>gr</sup>. 56'. 0"; Perihelium in  $\gamma$  2<sup>gr</sup>. 52'. 50"; Distantia Perihelia à Sole 58328, existente radio orbis magni 100000; et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 39'. Loca verò ex observationibus *Flamstedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in Tabulâ sequente.

1682

LIBER  
TERTIUS.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. m.	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "		
<i>Aug.</i> 19.16.38	♌ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	♌ 25.50. 7	♌ 18.14.40	♌ 25.49.55	-0.12	+0.12
20.15.38	♌ 7.55.52	♌ 24.46.23	♌ 26.14.42	♌ 24.46.22	♌ 26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	♌ 8.36.14	♌ 29.37.15	♌ 26.20. 3	♌ 29.38. 2	♌ 26.17.37	-0.47	+2.26
22. 8. 8	♌ 9.33.35	♌ 6.29.53	♌ 26. 8.42	♌ 6.30. 3	♌ 26. 7.12	-0.10	+1.30
29. 8.20	♌ 16.22.40	♌ 12.37.54	♌ 18.37.47	♌ 12.37.49	♌ 18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	♌ 17.19.41	♌ 15.36. 1	♌ 17.26.43	♌ 15.35.18	♌ 17.27.17	+0.43	-0.34
<i>Sept.</i> 1. 7.33	♌ 19.16. 9	♌ 20.30.53	♌ 15.13. 0	♌ 20.27. 4	♌ 15. 9.19	+3.49	+3.11
4. 7.22	♌ 22.11.28	♌ 25.42. 0	♌ 12.23.48	♌ 25.40.58	♌ 12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	♌ 23.10.29	♌ 27. 0.46	♌ 11.33. 8	♌ 26.59.24	♌ 11.33.51	+1.22	-0.43
8. 7.16	♌ 26. 5.58	♌ 29.58.44	♌ 9.26.46	♌ 29.58.45	♌ 9.26.43	-0. 1	+0. 3
9. 7.26	♌ 27. 0. 9	♌ 0.44.10	♌ 8.49.10	♌ 0.44. 4	♌ 8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum Cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus Nodus ascendens (computante *D. Bradleio*, Astronomiæ apud *Oxonienfes* Professore *Saviliano*) erat in  $\gamma$  14<sup>gr</sup>. 16'; Inclinatio orbitæ ad planum Eclipticæ 49<sup>gr</sup>. 59'; Perihelium in  $\gamma$  12<sup>gr</sup>. 15'. 20"; Distantia Perihelia à Sole 998651, existente radio orbis magni 1000000; & tempore æquato Perihelii *Septem.* 16<sup>d</sup>. 16<sup>h</sup>. 10'. Loca verò Cometæ in hoc orbe à *Bradleio* computata, & cum locis à seipso & patruo suo *D. Pouldio*, & à *D. Halleio* observatis collata, exhibentur in Tabulâ sequente.

1723 Temp. Æquat.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Obs.	Com. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. m.	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "	gr. ' "		
<i>Obs.</i> 9.8. 5	♌ 7.22.15	♌ 5. 2. 0	♌ 7.21.26	♌ 5. 2.47	+49	-47
10.6.21	♌ 6.41.12	♌ 7.44.13	♌ 6.41.42	♌ 7.43.18	-50	+55
12.7.22	♌ 5.39.58	♌ 11.55. 0	♌ 5.40.19	♌ 11.54.55	-21	+ 5
14.8.57	♌ 4.59.49	♌ 14.43.50	♌ 5. 0.37	♌ 14.44. 1	-48	-11
15.0.35	♌ 4.47.41	♌ 15.40.51	♌ 4.47.45	♌ 15.40.55	- 4	- 4
21.6.22	♌ 4. 2.32	♌ 19.41.49	♌ 4. 2.21	♌ 19.42. 3	+11	-14
22.6.24	♌ 3.59. 2	♌ 20. 8.12	♌ 3.59.10	♌ 20. 8.17	- 8	- 5
24.8. 2	♌ 3.55.29	♌ 20.55.18	♌ 3.55.11	♌ 20.55. 9	+18	+ 9
29.8.56	♌ 3.56.17	♌ 22.20.27	♌ 3.56.42	♌ 22.20.10	-25	+17
30.6.20	♌ 3.58. 9	♌ 22.32.28	♌ 3.58.17	♌ 22.32.12	- 8	+16
<i>Nov.</i> 5.5.53	♌ 4.16.30	♌ 23.38.33	♌ 4.16.23	♌ 23.38. 7	+ 7	+26
8.7. 6	♌ 4.29.36	♌ 24. 4.30	♌ 4.29.54	♌ 24. 4.40	-18	-10
14.6.20	♌ 5. 2.16	♌ 24.48.46	♌ 5. 2.51	♌ 24.48.16	-35	+30
20.7.45	♌ 5.42.20	♌ 25.24.45	♌ 5.43.13	♌ 25.25.17	-53	-32
<i>Dec.</i> 7.6.45	♌ 8. 4.13	♌ 26.54.18	♌ 8. 3.55	♌ 26.53.42	+18	+16

His



His exemplis abundè satis manifestum est, quòd motus Cometarum per Theoriam à nobis expositam non minùs accuratè exhibentur, quàm solent motus Planetarum per eorum theorias. Et propterea orbes Cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ, in quolibet orbe revolvantis, tandem sciri, & tum demum orbium Ellipticorum latera transversa, & Apheliorum altitudines innotescunt.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in  $8^{\circ} 20^{\text{st}}$ .  $21'$ ; Inclinatio plani orbis ad planum Eclipticæ erat  $17^{\text{st}}$ .  $2'$ ; Perihelium erat in  $22^{\text{st}}$ .  $16'$ ; & distantia Perihelia à Sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.*  $16^{\text{d}}$ .  $3^{\text{h}}$ .  $50'$ . Congruit hic orbis quamproximè cum orbe Cometæ, qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut  $\sqrt{c:75 \times 75}$  ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia Aphelia Cometæ hujus à Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ à Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si Cometa spatio annorum septuaginta quinque in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur, & altius ascendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum à Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum, ut Cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenierint, quàm quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco, more Planetarum, sed inde migrent, & motibus variis in omnes coelorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quàm longissimè distent ab invicem, & se mutuo quàm minimè trahant. Quæ de causâ Cometæ,

tæ, qui altius descendunt, ideoque tardissimè moventur in Apheliis, debent altius ascendere.

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à Sole in Perihelio suo quàm parte sextâ diametri Solis (<sup>m</sup>); & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propius ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio, ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest, & subinde in Solem incidere. Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quàm maximè splendent, & subinde paulatim evanescent. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ, quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serenâ minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidior, & luce suâ vix cedentem Veneri. Hanc *Tycho Brabæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; & ex eo tempore paulatim decreascentem, & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primùm apparuit, Venerem lucē suâ æquabat. Mense *Decembri*, nonnihil diminuta, Jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat Jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maiò*, stellis secundæ magnitudinis; *Junio*, *Julio* & *Augusto*, stellis tertiæ magnitudinis; *Septembri*, *Octobri* & *Novembri*, stellis quartæ; *Decembri*, & anni 1574 mense *Januario*, stellis quintæ; & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar Martis aut stellæ Aldebaran; *Maiò* autem albiditatem sublividam induxit, qualem in Saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede Serpentarii, quam *Kepleri* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. ap-

(<sup>m</sup>) De Mund. Syst. § 75, 76, 77.

parere cœpisse observârunt, & luce suâ stellam Jovis superâsse, cum nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ, supra modum splendente, *Hipparchus* ad Fixas observandas, & in catalogum referendas, excitatus fuisse dicitur. Sed Fixæ, quæ per vices apparent & evanescent, quæque paulatim crescunt, & luce suâ fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex Sole & stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in Atmosphæras Planetarum, & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos; & subinde per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare.

## SCHOLIUM GENERALE.

**HYPOTHESIS** Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempore proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in duplicatâ ratione distantiarum à Sole. Ut periodica Planetarum tempora sint in proportionem sesquipluatâ distantiarum à Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in sesquipluatâ distantiarum proportionem. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyratione conserventur, & tranquillè natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes suos, quæ cum motibus Vorticum congruere deberent, ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus Cometarum sunt summè regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest, nisi Vortices tollantur.

Projectilia, in Aere nostro, solam aëris resistentiam sentiunt. Sublato Aere, ut fit in Vacuo *Boyleano*, resistentia cessat; siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc Va-

cuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium, quæ sunt supra Atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberè moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges suprà expositas, perpetuò revolvuntur. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hæcè minimè potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motûs directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motûs directione, in planis orbium Planetarum quamproximè. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur: quo motûs genere Cometæ per orbem Planetarum celerrimè & facillimè transeunt; & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quam minimè trahant. Elegantissima hæcè Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia, simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne Fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut universorum Dominus. Et propter dominium suum, Dominus Deus \* *Παντοκράτωρ* dici solet. Nam Deus est vox relativa, & ad servos refertur: & deitas est dominatio Dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus Deus est Anima mundi, sed in servos. Deus summus est Ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed Ens, utcunque perfectum, sine dominio, non est Dominus Deus. Dicimus enim Deus meus, Deus vester, Deus *Israelis*, Deus deorum, & Dominus dominorum: sed non dicimus Æternus meus, Æternus vester, Æternus *Israelis*, Æternus deorum; non dicimus Infinitus meus, vel Perfectus

fectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad fervos.

† *Pocockus* noster vocem *dei* deducit à voce *Arabica* *du* (& in casu obliquo *di*.) quæ dominum significat. Et hoc censu principes vocantur dii, *Psal.* lxxxiv. 6. & *Joan.* x. 45. Et *Moses* dicitur deus fratris *Aaron*, & deus regis *Pharaonis* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem sensu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, sed falsò propter defectum domini.

Vox Deus passim † significat Dominum: sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritalis Deum constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ sequitur Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse, vel summè perfectum. Æternus est & Infinitus, Omnipotens & Omnisciens; id est, durat ab æterno in æternum, & adest ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoscit, quæ fiunt aut fieri possunt. Non est æternitas & infinitas, sed æternus & infinitus; non est duratio & spatium, sed durat & adest. Durat semper, & adest ubique; & existendo semper & ubique, durationem & spatium constituit. Cum unaquæque spatii particula sit *semper*, & unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*, certè rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam, nusquam*. Omnis anima sentiens diversis temporibus, & in diversis sensuum, & motuum organis eadem est persona indivisibilis: Partes dantur successivè in duratione, co-existentes in spatio, neutræ in Personâ hominis, seu principio ejus cogitante; & multo minùs in substantiâ cogitante Dei. Omnis homo, quatenus res sentiens, est unus & idem homo durante vitâ suâ in omnibus & singulis sensuum organis. Deus est unus & idem Deus semper & ubique. Omnipræfens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*: nam virtus sine substantiâ subsistere non

† Ita sentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de *Natura deorum*, lib. 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius* *Georgic.* lib. 4. v. 220, & *Æneid.* lib. 6. v. 721. *Philo Allegor.* lib. 1. sub initio. *Aratus* in *Phæn.* sub initio. Ita etiam scriptores sacri, ut *Paulus* in *Act.* xvii. 27, 28. *Johannes* in *Evang.* xiv. 2. *Moses* in *Deut.* iv. 39. & x. 14. *David* *Psal.* cxxxix. 7. 8. 9. *Solomon* 1 Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12, 13, 14. *Jeremias* xxxii. 23, 24. Pingebant autem idololatæ Solem, Lunam, & Astras, animas hominum & alias Mundi partes esse partes Dei summi, & ideo colendas, sed falsò.

potest. In ipso ‡ continentur & moventur universa, sed sine mutuâ passione. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræfentiâ Dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: et eadem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, & agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam

ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus <sup>LIBER</sup> Deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorsus destituitur; ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporei coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores; audimus tantum sonos; tangimus tantum superficies externas; olfacimus odores solos; & gustamus sapes: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; & multo minùs ideam habemus substantiæ Dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras & causas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut servi; & Deus sine dominio, providentiâ, & causis finalibus nihil aliud est quàm Fatum & Natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis & voluntate Entis, necessariò existentis, solummodo oriri potuit. Dicitur autem Deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de Deo à rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de Deo; de quo utique ex *Phænomenis* differere, ad Philosophiam Naturalem pertinet.

Hactenus *Phænomena* cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui; sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra Solis & Planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ Mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitatis in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas; & recedendo à Sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem Saturni, ut ex quiete *Apheliorum* Planetarum manifestum est, & ad

ad usque ultima Cometarum Aphelia, si modò Aphelia illa quiescant. Rationem verò harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & hypothesēs non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *Hypothesis* vocanda est; & hypothesēs, seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum Occultarum, seu Mechanicæ, in *Philosophiâ Experimentalī* locum non habent. In hâc Philosophiâ Propositiones deducuntur ex phænomenis, & redduntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum, & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quòd Gravitās reverā existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quàm attrahendo corpuscula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Sensatio omnis excitatur; & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus Spiritûs, per solida nervorum capillamenta, ab externis sensuum organis ad cerebrum, & à cerebro in musculos, propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritûs accuratè determinari & monstrari debent.

FINIS PRINCIPIORUM.

D E

M U N D I

S Y S T E M A T E

L I B E R.

VOL. III.

Z

---

# MUNDI SYSTEMATE

## L I B E R.

**F**IXAS in supremis mundi partibus immotas persistere, & Caelos esse fluidos. Planetas his inferiores circa Solem revolvi, Terram pariter moveri cursu annuo, diurno verò circa axem proprium, & Solem, ceu focum Univerſi, in omnium centro quiescere, antiquissima fuit Philosophantium sententia. Sic enim fenserant olim *Philolaus*, *Aristarchus Samius*, *Plato* ætate maturiore, *Pythagoreorum* Archimedes in Arenario. Aristot. lib. 2. de cælo. Plutarch. lib. 3. de placitis Philof. & in Numâ. turba <sup>(1)</sup>, & his antiquior *Anaximander*, & *Romanorum* Rex ille sapientissimus *Numa Pompilius*. Is in symbolum Orbis rotundi & ignis Solaris in centro, templum erexit *Vestæ*, formâ rotundâ, & ignem perpetuum in medio affervari sanxit. Ab *Ægyptiis* autem, astrorum antiquissimis observatoribus, propagatam esse hanc sententiam verisimile est. Etenim ab illis, & à gentibus conterminis, ad *Græcos*, gentem magis Philologicam quàm Philosophi-

(1) De antiquissimis Pythagoreis gravem mihi dubitationem movet *Timæus Locrus*, qui in libro *περί φυχῆς κόσμου* Terram discretissimè constituit in centro Mundi; supra hanc Lunam; supra Lunam Solem, anni spatio circulum suum absolventem. Hunc æquis fere passibus comitari dicit Mercurium et Venerem. Tum Planetis tribus reliquis, Marti, Jovi et Saturno, suam cuique velocitatem, suum conversionis spatium tribuit. Omnes autem intra sphaeram Primi Mobilis contineri ait, cujus vertigine, cum alia omnia inferiora, tum Solem ipsum abripi.

cam, Philosophia omnis antiquior juxta & fanior manasse videtur: & sacra *Vestæ* ingenium *Ægyptiorum* sapiunt, mysteria, caput vulgi superantia, sacris ritibus & Hieroglyphicis pingentium. Subinde docuerunt *Anaxagoras*, *Democritus*, & alii nonnulli, Terram in centro mundi immotam stare, & astra omnia in occasum aliqua celerius alia tardius moveri, idque in spatiis liberrimis. Namque orbes solidi postea ab *Eudoxo*, *Calippo*, *Aristotele*, introducti sunt; declinante indies Philosophia primitus introducta, & novis *Græcorum* commentis paulatim prævalentibus. Cum his orbibus malè consistunt Phænomena Cometarum. Hos, inter corpora cœlestia à multis olim numeratos, *Chaldei*, rerum Astronomicarum peritissimi, pro stellis errantibus habuere<sup>(1)</sup>: quasi semel singulis revolutionibus, in orbium valde excentricorum partes infimas descendendo, se nobis per vices conspiciendos exhiberent. Eisdem postea, in regiones infra Lunam necessario detrusit ista orbium solidorum hypothesi; & his iisdem vicissim per nuperas Astronomorum observationes in cœlos Lunâ superiores restitutis, confracti sunt illi orbes, & ex æthere deturbati.

Principium  
motus circula-  
ris in spa-  
tiis liberis.

2. Quibus vinculis Antiqui Planetas in spatiis liberis retineri, deque cursu rectilineo perpetuo retractos, in orbem regulariter agi docuere, non constat. In hujus rei explicationem orbes solidos excogitatos fuisse opinor. Philosophi recentiores aut vortices esse volunt, ut *Keplerus* & *Cartesius*, aut aliud aliquod sive impulsus sive attractionis principium, ut *Borellus*, *Hookius*, & ex nostratibus alii. Ex motus lege primâ certissimum est vim aliquam requiri. Nobis propositum est quantitatem & proprietates ipsius eruere, atque effectus in corporibus movendis investigare mathematicè: proinde ne speciem ejus hypotheticè determinemus, diximus ipsam generali nomine centripetam, quæ tendit in centrum aliquod; vel etiam, sumpto nomine de centro, circumfolarem, quæ tendit in Solem; circumterrestrem, quæ in Terram; circumjovialem, quæ in Jovem; & sic in cæteris.

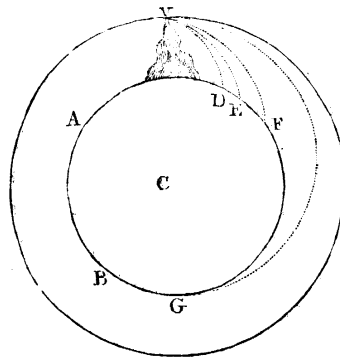
Effectus viri-  
um centripe-  
tarum.

3. Viribus centripetis Planetas in orbibus certis retineri posse, intelligetur ex motibus projectilium. Lapis projectus, urgente gravitate suâ, deflectitur de cursu rectilineo, &, curvam lineam in aëre describendo, tandem cadit in terram; si motu velociore

<sup>(1)</sup> Vide Diodor. Sic. Lib. 15. C. L. et Senecæ Quæst. Nat. Lib. 7.

projiciatur,

projiciatur, pergit longius. Augendo velocitatem, fieri posset, ut arcum describeret milliaris unius, duorum, quinque, decem, centum, mille; ac tandem ut, pergendo ultra terminos Terræ, non amplius in terram caderet. Designet AFB superficiem Terræ; c centrum ejus; & VD, VE, VF, lineas curvas, quas projectile de montis præalti vertice v, secundum lineas horizonti parallelas, auctis cum velocitatis gradibus, successivè emissum describat. Et ne aëris resistencia, quâ motus cœlestes vix retardantur, in computum veniat, fingamus hunc omnem tolli, vel saltem nil resistere. Et eadem ratione quâ corpus velocitate minore



describit arcum minorem VD, & majore arcum majorem VE, & auctâ adhuc velocitate pergit longius ad F, & longius ad G; idem tandem, si augeatur semper velocitas, superabit totum telluris ambitum, & redibit ad montem, unde fuerat projectum. Cumque area, quam, radio ad centrum terræ ducto, describit, sit (per Prop. I. Lib. 1. Princip. Math.) proportionalis tempori, velocitas ejus in reditu ad montem non minor erit quàm sub initio: servatâ autem velocitate, potest idem sæpius eadem lege revolvi. Imaginemur jam corpora de regionibus altioribus secundum lineas horizontales projici; puta de locis milliaria quinque, decem, centum, mille vel plura, totidemve Telluris semidiametros, altis; &, pro variâ corporum velocitate, & vi gravitatis in singulis regionibus exercitâ, describentur arcus Telluri vel concentrici, vel variè excentrici; inque his trajectoriis pergent corpora ad modum Planetarum cœlos transcurrere.

4. Et quemadmodum ex descensu lapidis demissi, demonstrativè colligitur eundem gravitare, neque minus certum gravitatis indicium est perpetua illa projectorum deflexio in terram: sic omnis omnium in spatiis liberis motorum corporum de recto tramite deviatio, & perpetua in locum quemvis deflexio, certissimum est indicium, vim aliquam extare, quâ corpora undique in locum illud urgentur. Utque ex concessâ gravitate necesse est corpora omnia

Certitudo  
argumenti.

omnia in his terris inferiora petere; atque adeo, vel rectâ cadere, si quiescentia demittantur, vel de recto tramite perpetuò deflectere in terram, si projiciantur obliquè: ita, ex concessâ vi in centrum quodcunque tendente, non minùs necessarium est omnia, in quæ vis illa exercetur, vel rectâ descendere ad centrum illud; vel si obliquè moveantur, perpetuò de recto tramite in centrum vergere. Quâ autem ratione vires ex motibus, & motus ex viribus colligendi sunt, copiosè expositum est in Libris de Motu.

Vires centri-  
petas ad fin-  
gula Plane-  
tarum centra  
tendere.

5. Tendere autem vires centripetas ad corpora Solis, Telluris, & Planetarum, sic colligo. Gyratur Luna circa Terram nostram, radiisque ad ipsius centrum ductis, describit areas temporibus proportionales quàm proximè. Id ex velocitate Lunæ, cum ipsius apparentibus diametris collatâ, certissimum est: diametro minore, quæ majorem arguit distantiam, tardior est motus; majore velocior. Motibus magis regularibus gyranur Satellites Jovis circa Jovem, circulos Jovi concentricos æquabili motu describentes quoad sensum. Sic & comes Saturni circa hanc Planetam motu fatis circulari & æquabili revolvitur, excentricitate vixdum animadvertâ. Venerem & Mercurium circa Solem revolvî, demonstratur ex eorum phasibus lunaribus: plenâ facie fiti sunt ultra Solem, dimidiatâ è regione Solis, falcatâ cis Solem, per discum ejus nonnunquam transeuntes. Et Venus quidem orbem circumlarem, Solique concentricum, uniformi motu describit quamproximè. Mercurius autem, motu magis excentrico, ad Solem notabiliter accedit, & inde per vices recedit: sed velocior semper est ubi Soli propior, quo fit, ut, radio ad Solem ducto, describat areas temporibus proportionales. Terram denique circa Solem, aut Solem circa Terram, radio intercedente areas describere temporibus exactè proportionales, demonstratur ex Solis diametro apparente cum ipsius motu apparente collatâ. Hæc sunt experimenta Astronomica: & ex his (per Libri Primi Propositiones tres primas & earum Corollaria) consequens est, quòd dentur vires centripetæ, aut accuratè aut sine errore notabilî, ad centra Terræ, Jovis, Saturni, & Solis tendentes. In Mercurio, Venere, Marte, & Planetis minoribus, cum desint experimenta, valeat argumentum ex analogiâ.

6. Ex

6. Ex Propositionis autem quartæ Corollario sexto consequitur, quòd hæ vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum à centro Planetæ cujusque. Nam tempora periodica Satellitum Jovis sunt inter se in sesquuplicatâ proportionem distantiarum à centro hujus Planetæ. In his jam diu notata fuit hæc proportio; eamque tam accuratè obtinere, quàm sit possibile sensibus discernere, significavit mihi *Flamstedius* noster, has distantias micrometro & per satellitum eclipses sæpius mensus. Easdem, ante inventionem micrometri, *Galileus*, pergendo ab intimo Satellite ad extimum, definivit esse semidiametrorum Jovis 6, 10, 16, 28, respectivè; *Simon Marius*, 6, 10, 16, 26; *Cassinus*, 5, 8, 13, 23; *Borellus* magis exactè,  $5\frac{2}{3}$ ,  $8\frac{2}{3}$ , 14,  $24\frac{2}{3}$ . Et, post inventionem micrometri, *Tounleius*, 5,51. 8,78. 13,47. 24,72; *Flamstedius* autem, 5,31. 8,85. 13,98. 24,23. & exactiùs per eclipses 5,578. 8,876. 14,159. 24,903. Sunt autem Satellitum ex observationibus *Flamstedianis* periodica tempora,  $1^d. 18^h. 28'. 36''$ ;  $3^d. 13^h. 17'. 54''$ ;  $7^d. 3^h. 59'. 36''$ ; &  $16^d. 18^h. 5'. 13''$ : & ex his derivatæ distantie ut numeri, 5,578. 8,878. 14,168. 24,968. qui cum distantis observatione collectis fatis accuratè congruunt. In Planetis autem circumfolaribus, Mercurio & Venere, proportio illa obtinet accuratissimè; quantum hætenus dimensiones orbitarum, ex observationibus melioris notæ, determinarunt Astronomi.

7. Martem quoque circa Solem revolvî, demonstratur ex ipsius phasibus, & proportionem diametrorum apparentium. Nam ex phasi plenâ prope conjunctionem Solis, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quòd is Solem ambit: & cum diameter ejus quasi quintuplo major appareat in oppositione Solis quàm in conjunctione, & distantia ejus à Terrâ sit reciproce ut diameter apparens, erit distantia illa quintuplo minor circiter in oppositione quàm in conjunctione; at Martis à Sole eadem circiter erit distantia, in utroque casu, cum distantia ejus in quadraturis, quæ ex phasi gibbosâ colligitur. Utque Solem æquabili ferè distantia, Terram valdè inæquabili cingit: sic etiam, radio ad Solem ducto, describit aream fatis uniformiter; at radio ad Terram ducto, nunc velox est, nunc stationarius, nunc retrogradus. Jovem Marte superiorem esse, & motu quoque, quoad distantiam & areæ descriptionem, fatis æquabili Solem circumire, sic colligo. In literis ad



ad me datis scripsit *Cl. Flamstedius*, omnes intimi Satellitis, quas noverat hæcenus accuratè observatas, Eclipses cum theoriâ suâ, absque errore duorum in tempore scrupulorum primorum, congruere; extimum non multo magis errare, penextimum vix triplo magis; penintimum verò multo magis; sed minùs tamen à computationibus suis dissidere, quàm solet Luna à Tabulis vulgaribus: se verò per solos Satellitum motus medios, & æquationem lucis à *Romero* inventam, Eclipses computare. Ponamus igitur Theoriam à motu Satellitis extimi, hæcenus observato, minùs dissidere quàm errore duorum scrupulorum primorum: et erit ut Periodus integra dierum 16. 18<sup>hor.</sup> 5'. 13'', ad tempus 2', ita circulus integer graduum 360, ad arcum 1'. 48'' (c). Proinde error computi *Flamstediani*, ad orbitam Satellitis reductus, minor erit quàm 1'. 48''; id est longitudo Satellitis, è centro Jovis spectati, determinabitur absque errore 1'. 48''. At longitudo illa, ubi Satelles in medio umbræ versatur, eadem est cum Jovis longitudine heliocentricâ; & propterea hypothesis quam *Flamstedius* sequitur, nempe *Keplero-Copernicæ*, à se nuper (quoad motum Jovis) correctâ, longitudinem illam rectè exhibet absque errore 1'. 48''. Hâc longitudine, & notissimâ semper longitudine geocentricâ, determinatur distantia Jovis à Sole: quæ proinde ea semper est, quam exhibet ista hypothesis. Namque maximus ille in longitudine heliocentricâ error, 1'. 48'', insensibilis ferè est, & planè contemnendus; sed & ex Satellitis ignotâ excentricitate oriri potest. Longitudine autem & distantia rectè definitis, necesse est ut Jupiter, radio ad Solem ducto, describat areas eâ lege quam hypothesis requirit, & propterea temporibus proportionales. Idem de Saturno ex hujus affectâ, per observationes *Hugenii* & *Halleji*, colligere licebit; quanquam observationum series diuturnior in rei confirmationem & calculum satis accuratum desideretur.

Vim, quâ Planetæ superiores reguntur, non diriguntur ad Terram. Eandem diriguntur ad Solem.

8. Jupiter igitur, si quis hunc spectaret à Sole, nunquam appareret retrogradus, nunquam stationarius, ut ex Terrâ cernitur, sed motu satis uniformi semper progrediretur. Ex motûs apparentis geocentrici inæqualitate summâ colligitur, per Propositionis tertiæ Corollarium quartum, quòd vis illa, quâ Jupiter deflectere cogitur

(c) Quòd si tempus conversionis Satellitis extimi verius sumas 16<sup>d</sup> - 16<sup>h</sup> - 32 - 9, tamen arcus circularis,

cogitur de motu rectilineo, & in orbem revolvitur, non dirigitur ad centrum Terræ. Et idem valet argumentum in Marte & Saturno. Quærendum est, per Prop. II & III. & hujus Corollaria, aliud harum virium centrum; circum quod, radiis intercedentibus, æquabilis sit arearum descripto: et hoc esse Solem, jam probatum est in Marte quidem & Saturno præterpropter, in Jove verò abundè satis accuratè. Fingere licet Solem & Planetas vi quâvis aliâ æqualiter, & secundum lineas parallelas, urgeri. Verùm tali vi, per Legum Corol. 6. non mutabitur situs Planetarum inter se; nullus produceretur effectus sensibilis: nos autem agimus de causis effectuum sensibilium. Rejiciatur igitur hujusmodi vis omnis ut precaria, & ad cœlorum phænomena nil spectans; & vis omnis reliqua, quâ stella Jovis urgetur, tendet, per Propositionis tertiæ Corollarium primum, ad centrum Solis.

9. Distantiæ Planetarum à Sole eadem prodeunt, siue Terram cum *Tychone*, siue Solem cum *Copernico*, collocemus in centro systematis: & veras esse has distantias, jam probavimus in Jove. In his definiendis *Keplerus* & *Bullialdus* apprimè navarunt operam: unde & cum cœlis melius concordant ipsorum Tabulæ. Sunt autem harum distantiarum cubi in omnibus Planetis, in Jove inquam & Marte, Saturno & Tellure, æquè ac in Venere & Mercurio, ut quadrata temporum periodicorum; & propterea, per Corol. 6. Prop. IV. vis centripeta circumfolaris decrescit, per universâ Planetarum coela, in duplicatâ ratione distantiarum à Sole. In examinandâ hâcce proportionem fumendæ sunt distantie mediores, siue orbium semiaxes transversæ (per Prop. XV.) & negligendæ minutie, quæ, in definiendis orbibus, ex insensibilibus observationum erroribus oriri potuerint, quæve causis post assignandis tribuendæ sunt. Sic incidetur semper in proportionem præfinitam exactè. Nam cum distantie Saturni, Jovis, Martis, Terræ, Veneris & Mercurii à Sole, ex observationibus Astronomicis collectæ, sint inter se, juxta computum *Kepleri*, ut numeri 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806; juxtaque computum *Bullialdi*, ut numeri 954198, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; eadem ex temporibus periodicis col-

Vim circumfolarem per omnes Planetarum regiones decrescere, in duplicatâ ratione distantiarum à Sole.

circularis, qui ad integrum circuitum rationem habeat quam spatium illud temporis ad spatium 2, is amplitudinem 1 - 48 non superabit.

lectæ, sunt ut numeri 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710. Distantiæ *Kepleri* & *Bullialdi*, vix differunt sensibilibiter, & ubi maximè differunt, claudunt inter se distantias ex temporibus periodicis collectas.

10. In duplicatâ itidem distantiarum proportionem vim circumterrestrem decrescere, sic colligo. Lunæ distantia mediocris à centro Terræ est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemaum*, *Keplerum* in Ephemeridibus, *Bullialdum*, *Hevelium*, & *Riccium*, 59; secundum *Flamstedium*,  $59\frac{1}{3}$ ; secundum *Vendelinum*, 60; secundum *Copernicum*,  $60\frac{1}{3}$ ; secundum *Kircherum*,  $62\frac{1}{2}$ ; secundum *Tychonem*,  $56\frac{1}{2}$ : verum *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ, omninò contra naturam lucis, majores quàm Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ scrupulis totidem; hoc est, quasi duodecimâ, vel decimâ quintâ, parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi 61 semidiametrorum terrestrium; ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, uti ab Astronomis definitum est: & per Corollarium sextum Propositionis quartæ, corpus, revolvens in aëre nostro juxta superficiem Terræ quiescentis, vi centripetâ, quæ esset ad vim eandem in distantia Lunæ in duplicatâ ratione distantiarum à centro Terræ reciproce, hoc est ut 3600 ad 1; revolutionem, sublatâ aëris resistentiâ, compleret horâ 1, minutis primis 24, secundis 27. Pone ambitum Terræ esse pedum *Parisiensium* 123249600, uti à *Gallis* mensurantibus nuper definitum est: & corpus idem, sublato motu suo circulari, & urgente eadem vi centripetâ ac prorsus, describeret cadendo pedes *Parisienses*  $15\frac{1}{12}$  tempore minuti unius secundi. Colligitur hoc ex calculo per Propositionem xxxvi. inito, & congruit cum experienciâ. Nam factis Pendulorum experimentis, & computo inde inito, demonstravit *Hugenius*; quod corpora, omni illâ cujuscunque generis vi centripetâ, quâ juxta superficiem Terræ urgentur, descendentia, describunt tempore minuti unius secundi pedes *Parisienses*  $15\frac{1}{12}$ .

11. Quod si motus concedatur Terræ, gyretur hæc & Luna, per Legum Corol. 4. & Prop. LVII. circa commune gravitatis centrum

Vim circumterrestrem decrescere in duplicatâ ratione distantiarum à Terrâ. Probatur ex hypothese quod Terra quiescit.

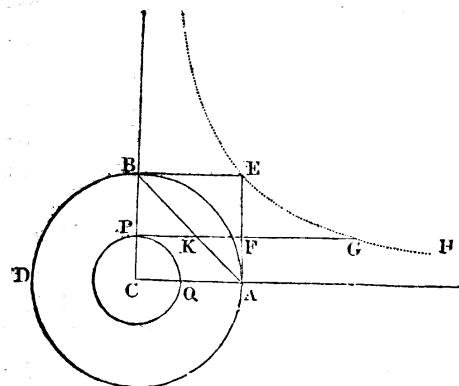
Probatur ex Hypothese quod Terra movetur.

centrum. Et Luna (per Prop. LX.) eodem tempore periodico dierum 27, hor. 7. 43', vi eadem circumterrestri diminutâ in duplicatâ ratione distantiae, revolvitur in orbitâ, cujus semidiameter est ad semidiametrum prioris, hoc est ad 60 semidiametros terrestres, ut summa corporum Terræ & Lunæ, ad primam duarum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus terræ: hoc est, si ponamus Lunam, ob mediocrem suam diametrum apparentem  $31\frac{1}{2}$ , esse quasi quadragesimam secundam partem Terræ, ut 43 ad  $\sqrt[3]{42 \times 43}$ ; five ut 128 ad 127 circiter: ideoque semidiameter hujus orbitæ, hoc est distantia inter centra Lunæ & Terræ, jam erit  $60\frac{1}{2}$  semidiametrorum terrestrium, ferè ut assignavit *Copernicus*, non abludentibus observationibus *Tychonicis*. In hac distantia valet igitur duplicata illa proportio decrementi virium. Augmentum orbitæ ab actione Solis oriundum, ut planè contemnendum neglexi: eo subducto, relinquetur vera distantia quasi  $60\frac{1}{2}$  semidiametrorum terrestrium.

12. Confirmatur præterea hæc ratio decrementi virium ex Planetarum excentricitate, & Apfidum tardissimo motu. Nam (per Corollaria Prop. XLV.) manifestum est, quod nullâ aliâ ratione possint Planetæ omnes circumsolares, singulis revolutionibus, semel ad minimam à Sole distantiam descendere, & semel ad maximam ascendere, atque loca harum distantiarum manere immobilia. Parvus error in ratione duplicatâ efficeret motum Apfidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem. At motus ille in Orbibus Planetarum circumsolarium vixdum post innumeras revolutiones sensibilis extitit. Astronomorum aliqui motum omnem negant; cæteri non majorem statuunt quàm qui ex causis post assignandis facile oriri possit, quique in quæstione, de quâ agitur, nullius est momenti. Sed & motus longe major Aphelii Lunarîs, qui singulis revolutionibus est graduum trium, contemni potest. Hoc motu demonstratur vim circumterrestrem decrescere in ratione distantiae non minori quàm duplicatâ, & longè minori quàm triplicatâ: nam si ratio duplicata mutetur gradatim in triplicatam, augebitur motus Aphelii in infinitum, adeoque mutatione perexiguâ superabit motum Aphelii Lunarîs. Oritur motus ille tardissimus ex actione vis circumsolari, ut posthac dicetur.

Decrementum in duplicatâ ratione distantiarum à Terrâ & Planetis, probatur ex Planetarum excentricitate & Apfidum motu tardissimo.





perbolam centro c, asymptotis CA, CB, descriptam; PG, perpendicularum ad ipsius BC punctum quodvis, P, erectum, & occurrens Hyperbolæ in G, rectisque AB, AE in K & F: & lucis densitas in loco quovis P erit, ex computo meo, ut longitudo FG, adeoque in centro infinita, prope circumferentiam quàm mi-

nima: lux autem tota intra circellum PQ est ad totam extra, ut area quadrilatera CAKP ad triangulum PKB. Ibi concipe circellum PQ terminari, ubi lucis densitas FG minor esse incipit, quàm quæ sensui movendo sufficit. Et hinc est, quòd ignis trium pedum latitudinis, in distantia 191382 pedum, per Telescopium tripedale apparuit *Picarto* quasi 8" latus, qui solum 3'. 14". latus apparere debuisset. Hinc est, quòd Fixarum lucidiores per telescopia apparent latæ 5". vel 6"; idque luce fatis plenâ, luce autem debiliore latius excurrunt. Hinc est, quòd *Hevelius*, minuendo aperturam Telescopii, sustulit bene magnam partem lucis in circuitu, effecitque ut discus Stellæ distinctius circinaretur, & minor evaderet, verùm tamen etiamnum latus appareret 5", vel 6": *Hugenius* autem, vitris juxta oculum fuligine leviter infectis, lucem undique erraticam adeo extinxit, ut Stellæ, punctorum instar, sensibili omni latitudine privatæ viderentur. Hinc est, quòd *Hugenius* latitudine obstaculi quod lucem omnem interciperet, majores exhibuit Planetarum diametros, quàm ab aliis Micrometro definitum est: nam lux erratica, tecto Planetâ, latius cernitur, radiis fortioribus non amplius obscurata. Hinc denique est, quòd Planetæ in Sole tam graciles appareant, luce dilatâ attenuati. Neque enim Mercurius *Hevelio*, *Galletio* & *Halleio*, superavit 12", vel 15", & Venus *Crabtrio* solum 1'. 3", *Horroxio* 1'. 12", occupare visa est; quæ tamen, juxta mensuras *Hevelii* & *Hugenii* extra discum Solis captas, implere debuisset 84", ad minimum.

nimum. Sic & Lunæ diameter apparens, quæ anno 1684, paucis diebus ante & post eclipsin Solis, mensurata fuit in Observatorio *Parisiensi* 31'. 30", in ipsâ eclipsi non superabat 30', vel 30'. 5". Igitur diametri Planetarum extra Solem minuendæ sunt, & intra augendæ, minutis aliquot secundis. At in mensuris micrometro-captis errores videntur esse solito minores. Semidiametrum Jovis, ex umbræ diametro per Eclipses Satellitum inventâ, *Flamsteedius* determinavit esse ad elongationem maximam Satellitis extimi, ut 1 ad 24,903. Unde cum elongatio illa sit 8'. 13", diameter Jovis erit 39 $\frac{1}{2}$ ". Igitur diameter micrometro inventa, 40", vel 41", rejiciendo lucem erraticam, reducitur ad 39 $\frac{1}{2}$ ". Et simili correctione minuenda est Saturni diameter 21", & statuenda 20", vel paulo minor. At Solis diameter ob lucem fortiorem paulo magis, nifallor, minuenda est, & statuenda quasi 32' vel 32'. 6".

17. Corpora, magnitudinis tam diversæ, ad analogiam cum viribus tam propè accedere, mysterio certè non caret. Possibile est ut Planetæ posteriores, defectu caloris, careant substantiis illis metallicis & mineris ponderosis, quibus Terra referta est: utque corpora Veneris & Mercurii, majore Solis calore, magis concocta & coagulata sint. Experimento speculi ustorii constat calorem augeri cum densitate lucis; hæc autem augetur in duplicatâ ratione accessus ad Solem. Inde colligitur calorem Solis ad Mercurium septuplo majorem esse quàm apud nos tempore æstivo; tanto autem calore aqua ebullit, & graves illi Vitrioli & Mercurii spiritus leniter exhalant, ut thermometro expertus sum: proinde nulli apud Mercurium consistunt liquores nisi graviores, qui magnum sustinent calorem, & ex quibus substantiæ densissimæ nascantur. Quidni si Deus corpora singula, calore temperiei conveniente alenda, in totidem à Sole distantis locaverit; sintque adeo densiora semper, quæ Soli propria: eâ ratione constabit optimè, pondera Planetarum omnium esse inter se ut vires. Pervelim verò diametros Planetarum definiri exactiùs. Id fiet, si Lampas ad magnam aliquam distantiam luceat per foramen circulare, & minuatur tum foramen tum lux Lampadis, usque eò ut spectrum per Telescopium appareat instar Planetæ, & iisdem mensuris definatur. Tum latitudo foraminis erit ad sui ipsius distantiam à vitro objectivo, ut vera Planetæ diameter ad ipsius distantiam à nobis.

Cur Planetæ sint aliqui magis alii minus densi, sintque vires ut quantitas materiæ in singulis.

nobis. Diminui potest lux Lampadis interpositione pannorum, aut vitri infecti fuligine.

Alia virium  
& corporum  
analogia.  
Probatur in  
caelestibus.

18. Analogiæ jam descriptæ affinis est altera inter vires & attracta corpora. Quoniam actio vis centripetæ in Planetas decrescit in duplicatâ ratione distantiae, & tempus periodicum augetur in ratione sesquuplicatâ; manifestum est, quod in æqualium Planetarum æqualibus à Sole distantis, æquales forent actiones, & æqualia tempora periodica: quoddque in æqualibus inæqualium distantis, actiones collectitiæ forent ut Planetarum corpora. Namque actiones, quæ non essent ut corpora movenda, non possent corpora illa æqualiter retrahere de tangentibus orbitalium; & efficere ut revolutiones, æqualibus temporibus, in Orbitis item æqualibus complerentur. Sed nec motus Satellitum Jovis tam regulares esse possent, nisi vis circumfolaris æqualiter in Jovem & Satellites omnes, pro ratione ponderum, exerceretur. Estque eadem ratio Saturni & Satellitis ipsius; ut & Terræ & Lunæ nostræ, uti (ex Corol. 2 & 3. Prop. LXV.) manifestum est. Paribus igitur distantis æqualis est actio vis centripetæ in omnes Planetas, pro ratione corporum, seu quantitate materiæ in corporibus; atque adeo in omnes etiam ejusdem quantitatis particulas, ex quibus Planetæ componuntur. Nam si actio major esset in particulas unius generis, minor in illas alterius, quàm pro ratione quantitatis materiæ, foret etiam actio major vel minor in Planetas, non solum pro ratione quantitatis, sed etiam pro genere materiæ quæ in uno copiosius, in alio parcius, reperiretur.

Probatur in  
terrestribus.

19. Analogiam certè in corporibus diversorum generum quæ in Terrâ nostrâ extant, tentavi quàm accuratissimè. Actio vis circumterrestris, corporibus movendis proportionalis, movebit eadem æqualibus temporibus, æquali cum velocitate (per Motus Leg. 2.) facietque tum omnia demissa, temporibus æqualibus, per æqualia spatia descendere; tum omnia, filis æqualibus suspensa, æqualibus temporibus oscillari. Actione majore minora erunt tempora, minore majora. Descensus autem corporum omnium (demptâ saltem aëris perexiguâ resistantiâ) æqualibus temporibus fieri jamdudum observârunt alii: & exactissimè notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam

parabam pyxides duas ligneas æquales: unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Æqualibus, pedum undecim, filis pendentes pyxides constituebant Pendula, quoad pondus, figuram & aëris resistantiam omninò paria: & paribus oscillationibus juxta positæ ibant unâ, & redibant diutissimè. Proinde copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad actionem ejus in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus: & sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuisset.

20. Cùm autem actio vis centripetæ in corpus attractum, paribus distantis, proportionalis sit materiæ in hoc corpore; rationi etiam consentaneum est, ut sit etiam proportionalis materiæ in corpore trahente. Etenim actio mutua est, facitque corpora conatu mutuo (per Motus Legem 3.) accedere ad invicem, & proinde sibi ipsi conformis esse debet in corpore utroque. Considerari potest corpus unum ut attrahens, alterum ut attractum, sed hæc distinctio magis mathematica est quàm naturalis. Attractio reverâ est corporis utriusque in utrumque, atque adeo ejusdem generis in utroque.

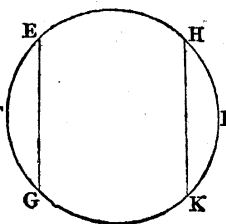
21. Et hinc est quod vis attractiva reperiatur in utroque. Sol trahit Jovem & cæteros Planetas, Jupiter trahit Satellites; & paritate rationis, Satellites agunt in se invicem & in Jovem, & Planetæ omnes in se mutuò. Et quamvis binorum Planetarum actiones in se mutuò distingui possint ab invicem, & ut actiones binæ, quibus uterque trahit alterum, considerari: tamen quatenus intermediæ sunt, non sunt binæ, sed operatio simplex inter binos terminos. Contractione funiculi unius intercedentis possunt bina corpora ad invicem trahi. Causa actionis gemina est, nimirum dispositio utriusque corporis; actio item gemina, quatenus in bina corpora: at quatenus inter bina corpora, simplex est & unica. Non est una operatio quâ Sol v. g. trahit Jovem, & alia operatio quâ Jupiter trahit Solem, sed una operatio quâ Sol & Jupiter conantur ad invicem accedere. Actione, quâ Sol trahit Jovem, conantur Jupiter & Sol ad se mutuò accedere (per Motus Leg. 3.) & actione, quâ Jupiter trahit Solem, conantur etiam Jupiter

pitèr & Sol ad se mutuò accedere : Sol autem non attrahitur actione duplici in Jovem, neque Jupiter actione duplici in Solem, sed una est actio intermedia, quâ ambo accedunt ad se mutuò. Ferrum trahit magnetem, æquè ac magnes ferrum ; nam ferrum omne in viciniâ magnetis trahit etiam aliud ferrum. At actio inter magnetem & ferrum simplex est, & à Philosophis consideratur ut simplex : operatio ferri in magnetem ipsa est magnetis operatio seipsum inter & ferrum, quâ ambo conantur accedere ad se mutuò. Id ex eo manifestum est, quòd sublato magnete cessat propè vis tota ferri. Ad hunc modum concipe simplicem exerceri inter binos Planetas ab utriusque conspirante naturâ oriundam operationem ; & hæc eodem modo se habebit ad utrumque : adeò proportionalis existens materiæ in uno eorum, proportionalis erit materiæ in altero.

Insensibiles  
esse corpo-  
rum parvo-  
rum vires.

22. Dicit fortè quis, corpora omnia hâc lege se mutuò trahere debere, contra experientiam in terrestribus. Sed respondeo, quòd experientia in terrestribus planè nulla est. Sphærarum homogenearum attractiones, juxta superficies earum, sunt (per Prop. LXXII.) ut diametri : unde sphæra, Terræ homogenea, diametroque pedis unius descripta, minùs trahet corpusculum juxta superficiem suam, quàm Terra juxta suam, vicibus 20000000 circiter : et vis tantilla nullos edet sensibiles effectus. Hujusmodi globi duo, quartâ tantùm digiti parte ab invicem distantes, in spatiis liberis, haud minori quàm mensis unius intervallo, vi mutuæ attractionis accederent ad invicem. Globorum minorum coitus esset tardior in ratione diametrorum. Sed nec montes toti suffecerint ad sensibiles effectus : ad radices montis hemisphæricis alti tria milliaria & lati sex, Pendulum, vi montis attractum, non deviaabit scrupulis duobus primis à perpendiculo. Vires hæc in solis Planetarum ingentibus corporibus intueri licet ; nisi forte de minoribus disputemus in hunc modum.

Tendere tamen vires ad corpora omnia terrestria proportionalis quantitati materiæ.



23. Designet EFGI globum Telluris, sectum plano quovis EG, in partes duas EFG, EIG. Pars EFG, incumbendo in partem EIG, premit ipsam toto suo pondere. Nec potest pars EIG hanc pressionem sustinere, & immota persistere, nisi æquali conatu in contrarium.

contrarium. Partes igitur ponderibus suis se mutuò æqualiter urgent, id est, trahuntur in se mutuò æqualiter, ut lex tertia requirit : adeoque distractæ ab invicem & demissæ caderent in se mutuò, cum velocitatibus, quæ essent reciproce ut corpora. Quæ omnia in magnete experiri & intueri licet. Designet jam EFG corpus aliquod exiguum in superficie Terræ : & quoniam particulæ hujus & Terræ reliquæ, EIG, attractiones in se mutuò sunt æquales ; attractio autem particulæ in Terram (nimirum pondus ejus) est ut materia particulæ, uti experimento Penduli probatum est ; erit etiam attractio Terræ in particulam ut materia particulæ : adeoque corporum omnium terrestrium vires attractivæ, ut quantitas materiæ in singulis.

24. Vires autem, quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus terrestribus, atque adeo non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis, tam cœlestibus, quàm terrestribus ; & in omnibus esse proportionales materiæ : eò quòd hæc omnia, non genere substantiæ, sed formis & modificationibus solummodo, differunt. Id verò sic etiam probatur in cœlestibus. Constat actionem vis circumfolaris in omnes Planetas, ad æqualitatem distantiarum reductos, esse ut materia in Planetas : idem similiter constat de actione vis circumjovialis in Satellites Jovis ; & par est ratio attractionis omnium Planetarum in unumquemque. Inde verò sequitur (per Prop. LXIX.) quòd eorum vires attractivæ sunt ut materia in singulis.

Probatur  
easdem vires  
in corpora  
cœlestia ten-  
dere.

25. Igitur ut partes Terræ se mutuò trahunt, sic etiam faciunt partes Planetarum. Si Jupiter & Satellites ejus coirent, & in unum formarentur globum ; pergerent singuli proculdubio se mutuò trahere ut priùs : & vice versâ, si corpus Jovis resolveretur in globos plures, credendum est, quòd hi non minùs traherent se mutuò, quàm trahunt Satellites. His attractionibus fit, ut corpora Telluris & omnium Planetarum sphæricam affectent figuram, utque partes eorum cohæreant, & non spargantur per æthera. Oriri verò has vires ex universali naturâ materiæ jam constitit, & propterea ex particularum viribus componi vim globi totius. Inde verò consequens est (per Corol. 3. Prop. LXXIV.) quòd vis particulæ cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae ab eadem particulâ ;

Decrescere  
vires à Pla-  
netarum su-  
perficiebus  
extrorsum in  
duplicatâ ra-  
tione, in-  
trorsum in  
ratione dis-  
tantiarum  
à centrâ.

particulâ; & (per Prop. LXXIII. & LXXV.) quod vis globi totius decrefcit à fuperficie fuâ extrorfum in duplicatâ ratione, & introrfum in ratione fimplici diftantiarum à centro, fi modò globus ex uniformi materia confat: & quamvis globi in progrefſu à centro ad circumferentiam non fint uniformes, valebit tamen decrementum in ratione duplicatâ diftantiæ extrorfum (per Prop. LXXVI.) fi modò fimilis fit inæquabilitas undique in progrefſu per circuitum: & hujufmodi globi duo (per eandem Propositionem) fe mutuò trahent, vi decrefcente in duplicatâ ratione diftantiæ inter centra.

Quantitates  
virium &  
motuum inde  
oriundorum  
in fingulis  
calibus.

26. Eft igitur globi cujuſque vis absoluta ut quantitas materiæ in ipſo. Vis autem motrix, quâ globus unusquifque trahitur in alterum, quamque vulgus in terreſtribus per vocem ponderis designat, eft ut contentum ſub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum diftantiæ inter centra (per Corol. 4. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eft quantitas motûs, quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum: vis autem acceleratrix, quâ globus unusquifque pro ratione materiæ fuæ attrahitur in alterum, eft ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum diftantiæ inter centra (per Corol. 2. Prop. LXXVI.) & huic vi proportionalis eft velocitas, quâ globus attractus, dato tempore, movebitur in alterum. Quibus probè intellectis, jam facile fuerit determinare motus corporum cœleftium inter fe.

Planetas omnes  
circa Solem  
revolvi.

27. Collatis Planetarum viribus, vidimus circumſolarem cæteris majorem eſſe mille vicibus & ampliùs. Urgente autem vi tantâ neceſſe eſt, ut corpora omnia inter ſpatium ſyſtematis Planetarum, & longè ultra, rectâ deſcendant in Solem; niſi aliò moveantur. Neque Terra de numero talium corporum excludenda eſt. Luna certè de genere Planetarum eſt, & iſdem attractionibus obnoxia cum cæteris Planetis: nam & vi circumterreſtri retinetur in orbe ſuo. Terram verò & Lunam æqualiter trahi in Solem probavimus ſuprà: fed & corpora omnia communibus attractionum legibus obnoxia eſſe jam antè probavimus. Quanto autem

(<sup>d</sup>) Vide Princip. Lib. 1. Prop. xxxvi. Cor. H.

(<sup>e</sup>) Subduëtis calculis comperimus caſu recto Solem uſque delatum iri ſtellam Veneris ſpatio dierum

autem tempore corpus unumquodque, motu circumſolari privatum, deſcenderet, & cadendo perveniret uſque ad Solem, innotefcit (per Prop. xxxvi.) ex diftantiâ ejus à Sole: nimirum dimidio temporis periodici, quo corpus ad diftantiâ duplo minorem revolvi poſſet (<sup>d</sup>); five tempore quod eſt ad tempus periodicum Planetæ, ut 1 ad  $4\sqrt{2}$ . Ut, quod Venus cadendo perveniret ad Solem, ſpatio dierum quadraginta; Jupiter ſpatio annorum duorum & menſis unius; Terra & Luna ſpatio dierum 66 & horarum 19 (<sup>e</sup>). Quod cum non accidit, neceſſe eſt ut hæc corpora moveantur alioſum: nec ſufficit motus quilibet; ad impediendum deſcenſum requiritur velocitas ſatis magna. Et inde valet etiam argumentum in Planetis tardeſcentibus. Niſi vis circumſolaris decreſcat in duplicatâ ratione tarditatis, exceſſus ejus efficiet ut corpora deſcendant in Solem: verbi gratiâ, ſi motus, cæteris paribus, fiat duplo tardior, Planeta parte quartâ vis circumſolaris prioris retinebitur in orbitâ fuâ, & exceſſu cæterarum trium partium quartarum deſcendet in Solem. Proinde Planetæ, Saturnus, Jupiter, Mars, Venus, & Mercurius, non retardantur verè in Perigæis, neque fiunt verè ſtationarii, & lento motu retrogradi. Iſta omnia ſunt apparentia tantum: & motus abſoluti, quibus Planetæ perſeverant in orbitis ſuis, ſunt ſemper directi, & æquabiles quamproximè. Tales autem motus circa Solem peragi probavimus; & propterea Sol, ut centrum abſolutorum motuum, qui-eſcit: nam Terræ quies omninò deneganda eſt, ne Planetæ in Perigæis verè tardeſcant, & fiant verè ſtationarii lentèque retrogradi; & ſic defectu motûs deſcendant in Solem. Porro quoniam Planetæ, Venus, Mars, Jupiter, cæterique, radiis ad Solem ductis deſcribunt orbes regulares, areasque temporibus, uti oſtenſum eſt, quoad ſenſum proportionales: conſequens eſt (per Prop. III. & Corol. 3. Prop. LXV.) quod Sol nullâ vi notabili urgetur; niſi quâ Planetæ omnes æqualiter, pro corporum quantitatibus, & ſecundum lineas parallelas, urgentur, adeoque ſyſtema totum transfertur in directum. Rejiciatur tranſlatio illa ſyſtematis totius, & Sol propemodum quieſcet in ipſius centro. Si Sol revolveretur circa Terram, & Planetas reliquos circum ſe deferret;

dierum 39, cum horis  $17\frac{16}{100}$ ; ſtellam Jovis ſpatio annorum duorum cum diebus 35, horis  $9\frac{12}{100}$ ; Tellurem denique noſtram ſpatio dierum 64 cum horis  $13\frac{46}{100}$ .

deberet



deberet Terra Solem trahere vi magnâ; Planetas autem circumfolares vi nullâ sensibilem effectum habente (omninò contra Corol. 3. Prop. LXV.) Adde, quòd si Terra, ob gravitatem partium, in infimâ mundi regione à plerisque hætenus locata fuit: jam Sol potiori jure, ob vim suam centripetam mille vicibus & amplius gravitate terrestri majorem, in locum infimum detrudi debeat, centrumque systematis constitui. Vera autem systematis constitutio sic plenius & exactius intelligitur.

Planetarum omnium commune gravitatis centrum quiescere, & Solem tardissimè moveri. Definatur motus Solis.

28. Quoniam Fixæ quiescunt inter se, concipiamus Solem, Terram & Planetas, tanquam systema corporum utcunque movementum inter se, & omnium commune centrum gravitatis (per Legum Corollarium quartum) vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum. Casu posteriore movebitur etiam systema totum uniformiter in directum. Dura est hæc hypothesis: eâ rejectâ, quiescet commune illud centrum gravitatis. Ab eodem centro Sol nunquam longè recedit. Incidit Solis & Jovis commune gravitatis centrum in superficiem Solis<sup>(1)</sup>. Si Planetæ omnes ad eandem Solis partem cum Jove locarentur, commune Solis & omnium centrum vix duplo longius à centro Solis recederet<sup>(2)</sup>. Igitur Sol, pro vario Planetarum situ diversimodè agitatus, & motu quodam libratorio lentè semper errans, nunquam integrâ sui diametro à centro quiescente Systematis totius recedit. Ex Solis autem & Planetarum ponderibus suprà inventis, & situ omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum: eoque dato, locus Solis ad tempus propositum.

Planetæ nihilo minus revolvuntur in Ellipticis umbilicis habentibus in Sole; & radiis ad Solem ductis areas describere temporibus proportionales.

29. Circa Solem, hoc modo libratum, revolvuntur cæteri Planetæ in Orbibus Ellipticis, & radiis ad Solem ductis describunt areas temporibus proportionales quamproximè, ut (in Prop. LXV.) expositum est. Si Sol quiesceret, & Planetæ cæteri non agerent in se invicem, forent Orbes Elliptici, & areæ temporibus proportionales exactè (per Prop. XI. & Corol. I. Prop. XIII.) Actiones Planetarum in se invicem, collatæ cum actionibus Solis in Planetas, nullius sunt momenti, neque adeò sensibiles errores inducunt: suntque errores illi minores in revolutionibus circa Solem more jam descripto agitatum, quàm in revolutionibus circa Solem quiescentem (per Prop. LXVI. & Corol. Prop. LXVIII.) præsertim si

(1) Vide Princip. Lib. 3. Not. cc.

(2) Ibid.

Orbis

Orbis cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis Planetarum omnium interiorum: nimirum umbilicus Orbis Mercurii in centro Solis, umbilicus Orbis Veneris in communi centro gravitatis Mercurii & Solis, umbilicus Orbis Telluris in communi centro gravitatis Veneris, Mercurii & Solis; & sic deinceps. Hoc pacto umbilici Orbium Planetarum omnium, præter Saturnum, non distabunt sensibilibiter à centro Solis; neque umbilicus Orbis Saturni recedet sensibilibiter à communi centro gravitatis Jovis & Solis. Proinde centrum Solis non malè statuitur ab Astronomis umbilicus communis Orbium cunctorum. In ipso Saturno error inde ortus non est major quàm 1'. 45". Si Orbis iste, locando umbilicum in communi centro gravitatis Jovis & Solis, melius congruerit cum phænomenis, inde confirmabuntur hæc omnia quæ diximus.

30. Si Sol quiesceret, & Planetæ nil agerent in se invicem, quiescerent etiam eorum Aphelia & Nodi (per Prop. I. XI. & Corol. Prop. XIII.) & forent Orbium Ellipticorum axes majores ut latera cubica quadratorum temporum periodicorum (per Prop. XV.) adeoque ex datis temporibus periodicis darentur. Mensuranda sunt hæc tempora non à mobilibus æquinoctiorum punctis, sed à stellâ primâ arietis. Ex motu autem Solis augetur semiaxis quilibet, quasi tertiâ parte distantiae centri Solis à communi centro gravitatis Solis & Planetæ (per Prop. LX.) & actionibus Planetarum exteriorum in interiores nonnihil augentur tempora periodica interiorum, at vix sensibilibiter, & Aphelia moventur tardissimè in consequentia (per Corol. 6 & 7. Prop. LXVI.) Sic & actionibus Cometarum, siqui ultra Saturnum versentur, augebuntur periodica tempora Planetarum omnium; & maximè ea exteriorum: & Aphelia omnium movebuntur in consequentia. Progredientibus autem Apheliis, regredientur Nodi (per Corol. I. & 13. Prop. LXVI.) & regressus eorum, si fortè quiescat planum Eclipticæ, erit (per Corol. 16. Prop. LXVI.) ad progressum Aphelii in Orbe unoquoque, ut regressus Nodorum Lunæ ad progressum Aphelii ipsius quamproximè; hoc est ut 10 ad 21 circiter. Confirmare autem videntur observationes astronomicæ Aphelia tardissimè progredi, & Nodos regredi, respectu Fixarum. Et inde verisimile est, Cometas in regionibus ultra Planetas versari. Hi in Orbibus valde

De Orbium dimensionibus, deque motu Apheliorum & Nodorum.



valde excentricis revoluti, transcurrunt velociter perihelia sua, & motu in apheliis longè tardissimo, tempus ferè totum conerunt in regionibus supra Planetas, ut posthac fusiùs explicabitur.

Ex principiis  
allatis deri-  
vantur motus  
omnes Lu-  
nares hæc-  
nus ab Af-  
tronomis  
notati.

31. Planetas in hunc modum revolventes posse alios, ceu Satellites, aut Lunas, circum se deferre, constat (ex Propositione LXV.) Actione autem Solis fit, ut Luna nostra velociùs moveatur, & radio ad terram ducto describat aream pro tempore majorem, Orbemque habeat minùs curvum, atque adeò propius accedat ad Terram, in syzygiis quàm in quadraturis, nisi quatenus impedit motus excentricitatis. Namque excentricitas maxima est, ubi apogæum Lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde Luna in perigæo velocior est & nobis prior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili: & Apogæum quidem velociùs progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum, annuatim fertur in consequentia. Nodi autem quiescunt in syzygiis suis, & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis quàm in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio Terræ quàm in ipsius aphelio. Plures inæqualitates in motu Lunari nondum ab Astronomis notantur. Hæ autem omnes confectantur ex principiis nostris (per Corol. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Prop. LXVI.) & in cœlis reverà extare noscuntur. Id in *Horraxii* hypothese illà ingeniosissimâ, & ni fallor, omnium accuratissimâ, quam *Flamstedius* ad cœlos aptavit, videre licet. Corrigendæ tamen sunt hypotheses Astronomicæ in motu Nodorum. Hi æquationem, seu prosthaphæresin, maximam admittunt in Octantibus suis, estque hæc inæqualitas maximè conspicua ubi Luna in Nodis, atque adeò in Octantibus, versatur. Inde Tycho, & post eum alii, rejecerunt hanc inæqualitatem in octantes Lunæ, eamque fecerunt mensuram. Docent autem rationes à nobis allatæ hanc ad octantes Nodorum referri debere, & annuam constitui.

32. Præter inæqualitates ab Astronomis notatas, extant aliæ nonnullæ, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nullâ hæcenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates

Ut & alii  
nonnulli  
nondum  
observati  
motus in-  
æquabiles.

locitates enim, seu motus horarii, Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter excentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Estque Variatio præterea in ratione duplicatâ temporis inter quadraturas quamproximè (per Corol. 1 & 2. Lem. x. & Corol. 16. Prop. LXVI.) Sunt & inæqualitates omnes in parte orbis Solem versus paulò majores quàm in parte oppositâ, sed differentiâ vix aut ne vix quidem sensibili.

33. Per computationem quandam, quam brevitatis gratiâ non describo, invenio etiam, quòd area, quam Luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, sit quamproximè ut summa numeri  $237\frac{3}{10}$ , & sinûs versi duplicatæ distantie Lunæ à quadraturâ proximâ, in circulo cujus radius est unitas; atque adeò quòd quadratum distantie Lunæ à Terrâ sit ut summa illa divisa per motum horarium Lunæ<sup>(b)</sup>. Hæc ita se habent, ubi Variatio in octantibus est magnitudinis mediocris: sin Variatio major sit vel minor, augeri debet vel minui sinûs illè versus in eadem ratione. Tentent Astronomi, quàm probè distantie sic inventæ congruerint cum Lunæ diametris apparentibus.

Et distantie  
Lunæ à Terrâ  
ad tempus  
datum.

34. Ex motibus Lunæ nostræ, derivare licet motus Lunarum, seu Satellitum, Jovis & Saturni. Namque motus medius nodorum satellitis extimi Jovialis est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 8<sup>gr</sup>. 24' in antecedentia. Motus medii Nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem Corollarium) & inde dantur. Motus autem Augis satellitis cujusque, in consequentia, est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum (per idem Corol.) & inde datur. Æquationes maximæ nodorum & augis satellitis cujusque sunt ad æquationes

Derivantur  
motus Satel-  
litum Jovis  
& Saturni ex  
motibus  
Lunæ.

<sup>(b)</sup> Vide Princip. Lib. 3. Prop. xxvi & xxvii.

maximas nodorum & augis Lunæ respectivè, ut motus nodorum & augis satellitum, tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio satellitis, è Jove spectati, est ad variationem Lunæ, ut sunt motus toti nodorum temporibus periodicis satellitis & Lunæ ad invicem (per idem Corollarium) adeoque in satellite extimo non superat 5". 12". Parvitate harum inæqualitatum, & tarditate motuum, fit, ut motus satellitum tam regulares reperiantur; utque Astronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut afferant tardissimè retrogradum.

Planetæ respectu Fixarum æquabili motu circum axes suos revolvuntur; hunc motum ad æquationem temporis aptissimum esse.

35. Interea dum Planetæ in hunc modum circum centra longinqua in orbem redeunt, rotantur singuli circum axes proprios; Sol quidem diebus 26; Jupiter horis 9, minutis primis 56; Mars horis 24 $\frac{1}{2}$ ; Venus horis 23; idque in planis ad planum Eclipticæ non multum inclinatis, & secundum ordinem signorum; ut ex maculis in eorum corporibus per vices in conspectum redeuntibus definiunt Astronomi. Similis est revolutio Terræ nostræ facta horis 24. Hos motus actionibus virium centripetarum non accelerari nec retardari constat (per Corol. 22. Prop. LXVI.) Sunt igitur præ cæteris omnibus æquabiles, atque adeo ad mensuram temporis aptissimi. Sed revolutiones ex reditu, non ad Solem, sed ad Stellam aliquam fixam definiendæ sunt æquabiles. Nam situ Planetarum ad Solem inæquabiliter variato, revolutiones eorum à Sole ad Solem redduntur inæquabiles.

Lunam pariter motu diurno circa axem suum revolvit, & inde librationem ipsius oriri.

36. Sic & Luna revolvitur circa axem proprium, motu maximè æquabili respectu Fixarum. Revolvitur autem tempore dierum 27, horarum 7. min. 43. id est mense sidereo; ita ut motus iste diurnus æqualis sit motui medio Lunæ in orbe suo. Proinde eadem Lunæ facies convertetur semper in centrum, circa quod motus iste medius peragitur; hoc est, in orbis lunaris umbilicum anteriorem quamproximè. Inde oritur deflexio faciei de Terrâ, nunc in Orientem quidem, nunc verò in Occidentem, pro situ umbilici quem respicit; estque deflexio illa æqualis prosthaphæresis orbis lunaris, seu differentiae inter motum medium & verum. Hæc est libratio Lunæ in longitudinem. Est & libratio in latitudinem, orta ab inclinatione axis lunaris ad planum orbis in quo Luna

Luna circa Terram revolvitur. Servat enim axis ille situm suum ad Fixas quamproximè, & inde poli nobis per vices in conspectum veniunt. Id intelligere licet ex motu Telluris, cujus poli, ob inclinationem axis ad planum Eclipticæ, per vices illustrantur à Sole. Situm axis ad Fixas, & situm hujus variationem exactè determinare, Problema est Astronomo dignum.

37. Ex Planetarum revolutionibus diurnis conatur materia recedere ab axibus hujus motus; & inde partes liquidæ surgunt paulò altius juxta Æquatorem quàm juxta Polos, partesque solidas inundabunt nisi pariter surgentes. Ideò Planetæ paulò crassiores sunt juxta Æquatorem quàm juxta Polos, & eorum puncta æquinoctialia propterea regrediuntur; axesque motu oscillatorio bis in singulis revolutionibus nutant, & bis redeunt ad inclinationem priorem; ut in Corol. 18. Prop. LXVI. expositum est. Nam & Jupiter, prælongis tubis visus, non omnino rotundus cernitur, sed illius diameter Eclipticæ parallela paulo est oblongior, quàm quæ à Septentrione in Austrum ducitur.

De præcessionis æquinoctiorum, deque motu libratorio axis Telluris & Planetarum.

38. A Telluris etiam motu diurno & attractionibus Solis & Lunæ, mare nostrum singulis diebus, tam Lunaribus, quàm Solaribus, bis intumescere debet, & bis defluere (per Corol. 19 & 20. Prop. LXVI.) & aquæ altitudo maxima præcedere horam sextam diei utriusque, & sequi duodecimam præcedentem. Tarditate motus diurni retrahitur æstus ad horam duodecimam; & vi motus reciprocationis protrahitur idem, & in horam sextæ propiorem differtur. Interea dum tempus per phænomena certius determinabitur, quidni, rationem mediocrem tenentes, conjiciamus æstum maximum in horam tertiam? Hoc pacto aqua toto tempore ascendet, quo vis Luminarium ad ipsam attollendam major est; descendetque, toto tempore quo minor est. Namque vis illa major est ab horâ nonâ ad horam tertiam, & minor à tertiâ ad nonam. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quàm supra: & per horas diei Lunaribus intelligo vigesimas quartas partes temporis, quo Luna, motu apparente diurno, ad Meridianum loci revolvitur.

Mare bis fluere debere & bis refluere singulis diebus, & æstum incidere in horam tertiam ab appulsu luminaris ad meridianum loci.

39. Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non æstus maximos in syzygiis Luminarium ac Terræ, minimos effectus,

in quadraturis effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis fieri; idque hori: tertia ab appulsu Lunæ ad Meridianum loci: aut extra fyzygias & quadraturas deviare aliquantu- lum ab hora illa tertia in horam tertiam ab appulsu solis.

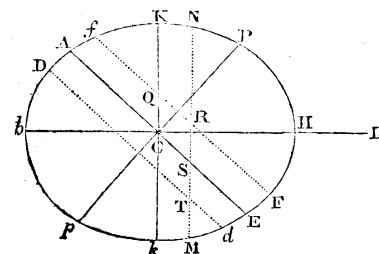
effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit; deprimetque, ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experienciâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra fyzygias & quadraturas, æstus maximus, qui solâ vi lunari incidere semper deberet ad horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem; compositis viribus, incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquius est; adeoque in transitu Lunæ à fyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem, in transitu Lunæ à quadraturis ad fyzygias.

40. Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantis à Terrâ. In minoribus enim distantis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in fyzygiis majores sint, & in quadraturis minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo, singulis mensibus, majores ciet æstus quàm ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit, ut æstus duo omnino maximi in fyzygiis continuis se mutuo non sequantur.

41. Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius declinatione, seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensiōe & remissione, adeoque motus reciproca- tionem nullam cieret. Igitur Luminaria, recedendo de æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores cie- bunt æstus in fyzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores cie- bunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus; eò quod Lunæ, jam in æquatore constitutæ, effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in fyzygias, & minimi in quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque; & æstus maximum

maximum in fyzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experienciâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à Terrâ, tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit, ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum, quàm sequantur; & sæpius sequantur autumnale, quàm præcedant.

42. Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine.



Designet  $APBP$  Tellurem, aquis profundis undique coopertam;  $C$ , centrum ejus;  $P, p$ , polos;  $AE$ , æquatorem;  $Ff$ , locum quemvis extra æquatorem;  $Ff$ , parallelum loci;  $dd$ , parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris;  $L$ , locum quem Luna

ante horas tres occupabat;  $H$ , locum Telluris ei perpendiculariter subiectum;  $b$ , locum huic oppositum;  $k, k$ , loca inde gradibus 90 distantia;  $CH, cb$ , Maris altitudines maximas mensuratas à centro Telluris; &  $ck, ck$ , altitudines minimas: & si axibus  $hb, k\bar{k}$  describatur Ellipsis; deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem,  $hb$ , describatur Sphærois  $HPKbpk$ ; designabit hæc figuram maris quamproximè; & erunt  $cf, cf, cd, cd$ , altitudines maris in locis  $F, f, D, d$ . Quinetiam si in præfatâ Ellipseos revolutione punctum quodvis,  $N$ , describat circulum  $NM$ , secantem parallelos  $Ff, dd$  in locis quibuscumque  $R, r$ , & æquatorem  $AE$  in  $s$ ; erit  $cn$  altitudo Maris in locis omnibus  $R, s, T$ , sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujuscumque  $F$ , affluxus erit maximus in  $F$ , horâ tertiâ post appulsu Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in  $Q$ , horâ tertiâ post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in  $f$ , horâ tertiâ post appulsu Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimò defluxus maximus in  $Q$ , horâ tertiâ post ortum Lunæ: & affluxus posterior, in  $f$ , erit minor quàm affluxus prior in  $F$ . Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluxus ingentes & hemisphæricos; unum in hemisphærio  $kNkc$ , ad boream vergentem; alterum in Hemisphærio opposito  $k\bar{N}\bar{k}$ ; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus, semper sibi mutuo oppositi, veniunt per vias ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo

Æstus extra Æquatorem vicibus alter- nis majores & minores fieri.

intervallo horarum Lunarium duodecim. Cúmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem. Æstus autem major, declinante Lunâ in verticem loci, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Lunâ declinationem mutante, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis. Sic æstus matutini tempore hyberno superant vespertinos, & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Phymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum; observantibus *Colepreffio* & *Sturmio*.

43. Motus autem hæcenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post syzygias majores reddit, eosque proximè post quadraturas minores. Unde fit, ut æstus alterni ad *Phymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ad invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portibus non sint primi à syzygiis, sed tertii.

44. Fieri etiam potest, ut æstus omnium maximus sit quartus vel quintus à syzygiis, vel tardiùs adveniat; eò quòd retardantur motus marium in transitu per loca vadosa ad littora. Sic enim æstus accedit ad littus occidentale *Hiberniæ*, horâ tertiâ lunari; & post horam unam & alteram ad portus in littore australi ejusdem insulæ; ut & ad *Insulas Cassiterides*, vulgo *Sorlings* dictas: dein successivè ad *Falmuthum*, *Phymuthum*, *Portlandiam*, *Insulam Vectam*, *Winchelsea*, *Doveriam*, ostium *Tamefis* & pontem *Londinensem*, consumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipsius alveis haud satis profundis impeditur æstuum propagatio. Incidit enim æstus ad *Insulas Fortunatas*, & ad occidentalia marique *Atlantico* exposita littora *Hiberniæ*, *Galliæ*, *Hispaniæ* & *Africæ* totius, usque ad *Caput bonæ spei*, in horam tertiam lunarem; præterquam in locis nonnullis vadosis, ubi æstus impeditus tardiùs

advenit, inque *Freto Gaditano*, quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æstuat. Pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras *Americæ*, accedit æstus primò ad *Brasiliæ* littora maximè orientalia circa horam lunarem quartam vel quintam; deinde ad ostium *Fluvii Amazonum* horâ sextâ; ad insulas verò adjacentes horâ quartâ; postea ad *Insulas Bermudas* horâ septimâ; & ad *Floridæ* portum *S. Augustini* horâ 7½. Tardiùs igitur progreditur æstus per Oceanum, quàm pro ratione motus Lunæ. Et pernecessaria est hæcce retardatio, ut mare eodem tempore descendat inter *Brasiliam* & *Novam Franciam*, ascendatque ad *Insulas Fortunatas* & littora *Europæ* & *Africæ*, & vice versa. Namque mare ascendere nequit in uno loco, quin simul descendat in altero. Lege jam descriptâ agitari quoque *Mare Pacificum* verisimile est. Namque æstus altissimi in litore *Chiliensi* & *Peruviano* incidere dicuntur in horam tertiam lunarem; sed quâ velocitate propagantur inde ad litus orientale *Japoniæ* & ad *Insulas Philippinas*, cæterasque regno *Sinarum* adjacentes, nondum reperi.

45. Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citiùs transeat per aliqua freta quàm per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successivè advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstum dividi in duos æquales, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam vel tertiam, vel vicesimam septimam, ab impulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce ad Meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus; qui, in mutuos refluxus incidendo, eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient, ut aqua tranquillè stagnet. Sin Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque; affluxus major & minor faciet, ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio; & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem, & semel ad.

Per motus impressi conservationem minui differentiam æstuum, & fieri quoque ut æstus maximus mensurus sit tertius à Syzygiâ.

Motus maris impedito alveorum retardari.

Ex alveorum & littorum impedimentis varia oriri phaenomena: ut quòd mare non nisi semel intumescat diebus singulis.

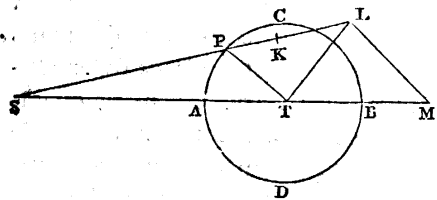


inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus accedendi vel recedendi prius frangi potest, quàm aqua attollitur vel deprimitur ad pedes, 40, vel 50, & amplius. Sic & freta oblonga, vadosa, & ostiis reliquo alveo amplioribus & profundioribus in Oceanum patentia, cujus generis sunt *Britannicum*, & *Magellanicum* ad introitum orientalem, magis fluent & refluunt, cursumve intendunt & remittunt; eaque de causâ altius ascendent ac deprimentur. Ad littora *Americæ australis*, *Mare Pacificum* non raro in refluxu suo remeare dicitur ad milliaria duo, & fugere visum in litore stantis. Unde & ibi æstus fiunt solito altiores. In aquis autem profundioribus semper minor est fluendi & refluendi velocitas, & propterea minor quoque ascensus ac descensus. Nec Oceanus talibus in locis ad pedes plusquam sex, octo vel decem, ascendere noscitur. Ascensus verò quantitatem sic computo.

Ex Principiis  
allatis com-  
putatur vis  
Solis ad per-  
turbandos  
motus Lunæ.

48. Designet s Solem; T, Terram; P, Lunam; PADB, orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST, & SL ad SK in duplicatâ ratione SK ad SP, & ipsi PT agatur parallela LM; & si vis mediocris circumfolaris agens in Terram exponatur per distantiam ST, vel SK; erit SL vis circumfolaris agens in Lunam. Ea com-

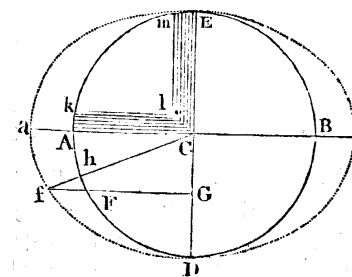
ponitur ex partibus SM, LM; quarum LM, & ipsius SM pars TM, perturbat motum Lunæ (ut in Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est). Quatenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur, urgebitur Terra viribus confimilibus; sed summas tam virium quàm motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas, TM & ML, designare. Vis ML, in mediocri suâ quantitate, est ad vim, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PT revolvitur posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem (per Corol. 17. Prop. LXVI.) hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, min. 43, ad dies 365, hor. 6, min. 9, id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad 178 $\frac{25}{40}$ . Vis, quâ Luna in orbe suo circa Terram quiescentem, ad distantiam PT semidiametrorum terrestrium 60 $\frac{1}{2}$ , revolvitur posset, est ad vim, quâ eodem



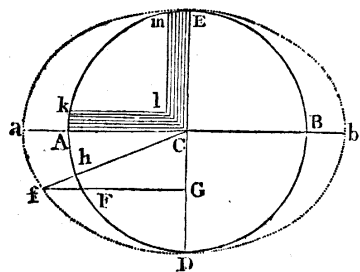
eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvitur posset, ut 60 $\frac{1}{2}$  ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60 x 60. Ideoque vis mediocris ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut 1 x 60 $\frac{1}{2}$  ad 60 x 60 x 60 x 178 $\frac{25}{40}$ , seu 1 ad 638092,6. Unde datur etiam vis TM, ex proportionem linearum TM, ML. Hæ sunt vires Solis, quibus motus Lunæ perturbatur.

49. Si descendatur de orbe Lunæ ad superficiem Terræ, minuentur hæ vires in ratione distantiarum 60 $\frac{1}{2}$  ad 1; adeoque vis ML jam fiet 38604600 vicibus minor quàm vis gravitatis. Hæc vis, Terram undique æqualiter urgendo, vix aut ne vix quidem mutabit motum marium, adeoque in explicatione motus illius negligi possit. Vis altera TM, in locis in quorum Zenith vel Nadir Sol constituitur, est triplo major quàm vis ML, adeoque 12868200 vicibus minor quàm vis gravitatis.

50. Designet jam ADBE Telluris superficiem sphericam; adBE, aquam supernatantem; c, centrum utriusque; A, locum cui Sol perpendiculariter imminet; B, locum oppositum; D, E, loca inde gradibus nonaginta distantia; ACE *mlk*, canalem cylindricum rectangulum transeuntem per centrum Terræ. Vis ML, in loco quolibet, est ut distantia loci à plano DE, cui recta AC perpendicularis est; adeoque in canalis parte *ecm*, nulla est;



in parte alterâ AC/k, est ut gravitas in singulis altitudinibus. Nam gravitas in descensu ad centrum Terræ est ubique ut altitudo (per Prop. LXXIII.) Igitur vis ML, urgendo aquam sursum minuet gravitatem ejus in canalis crure AC/k in datâ ratione. Et propterea aqua in hoc crure ascendet, ut defectus gravitatis compensetur majore altitudine; neque prius stabit in æquilibrio, quàm gravitas totius æquetur gravitati totius in canalis crure *clme*. Quoniam gravitas particulæ cujusque est ut distantia ipsius à centro Terræ, crescet pondus aquæ totius in crure canalis in duplicatâ ratione altitudinis; adeoque altitudo aquæ in crure AC/k fiet ad altitudinem aquæ in crure *clme*, in dimidiatâ ratione numeri 12868201 ad 12868200; sive in ratione numeri 25623053 ad



numerum 25623052; & altitudo in crure alterutro,  $EClm$ , ad differentium altitudinum ut 25623052 ad 1. Est autem altitudo illa in crure  $EClm$  pedum *Parisiensium* 19615800, ut à *Gallis* nuper definitum est: & inde per analogiam illam prodit differentia altitudinum  $9\frac{1}{2}$  digitorum hujus pedis.

Igitur vi Solis major erit altitudo maris ad A quàm ad E digitis circiter novem (<sup>1</sup>). Et quamvis aqua in canali  $ACEmlk$  congeletur, & rigeat; manebunt tamen altitudines aquarum, Terræ supernatantium, ad A & E, locaque omnia intermedia.

Computatur altitudo æstus sub parallelis ex vi solis oriunda.

51. Designet  $aa$  excessum illum altitudinis digitorum novem ad  $a$ ; &  $bf$ , excessum altitudinis in alio quovis loco  $b$ ; & ad  $dc$ , demittatur normalis  $fg$ , occurrens sphaeræ in F. Ob ingentem Solis distantiam, quâ fit ut lineæ omnes ad Solem tendentes pro parallelis haberi possint, est vis  $TM$  in loco quovis  $b$  vel  $f$ , ad vim illam in loco A, ut sinus  $FG$  ad radium  $AC$ ; adeoque cum vires illæ tendant secundum lineas parallelas in Solem, generabunt hæ parallelas altitudines  $Ff$ ,  $Aa$ , in eadem ratione. Et propterea figura aquæ  $dfæb$  sphaerois erit, facta per revolutionem Ellipseos circa majorem axem  $ab$ . Est insuper altitudo perpendicularis  $fb$  ad altitudinem obliquam  $fF$ , ut  $fG$  ad  $fC$ , seu  $FG$  ad  $AC$ ; & propterea altitudo  $fb$  est ad altitudinem  $Aa$  in duplicatâ ratione  $FG$  ad  $AC$ ; id est, in ratione quam habet sinus versus anguli  $dcf$  duplicati ad duplicatum radium, & inde datur. Et hinc Sole circa Terram apparenter revolvente, innotescit ratio intumescentiæ ac detumescentiæ singulis momentis in loco quolibet sub Æquatore. Innotescit etiam decrementum æstus maris tam ex latitudine locorum quàm ex declinatione Solis oriundum. Nimirum quod ex latitudine locorum, ascensus & descensus maris in locis singulis diminuitur in ratione duplicatâ sinûs complementi latitudinis; quodque ex declinatione Solis, ascensus & descensus ille sub Æquatore diminuitur in ratione duplicatâ sinûs complementi declinationis: sed & extra æquatorem semisumma ascensus matutini

(<sup>1</sup>) Princip. Lib. 3. Prop. xxxvi.

&

& ascensûs vespertini, id est ascensus mediocris, diminuitur in eadem ratione quamproximè.

52. Designent  $s$  &  $L$  vires Solis & Lunæ in Æquatore versantium, & mediocriter distantium à Terrâ;  $R$ , radium;  $r$  &  $v$ , sinus versus duplicatorum complementorum declinationis Solis & Lunæ ad tempus datum;  $D$  &  $E$ , mediocres diametros apparentes Solis & Lunæ;  $F$  ac  $G$ , earum diametros apparentes ad tempus illud datum; & erunt vires, ad æstus sub æquatore ciendos, in fyzygiis quidem  $\frac{VG^3}{2RE^3}L + \frac{TF^3}{2RD^3}s$ ; in quadraturis autem,  $\frac{VG^3}{2RE^3}L - \frac{TF^3}{2RD^3}s$ . Si eadem æstuum ratio observetur etiam sub parallelis, habebimus ex observationibus, in boreali nostrâ regione exactè factis, proportionem inter vires  $L$  &  $s$ . Et tum demum per hanc regulam prædicere licebit quantitates æstuum ad singulas fyzygias & quadraturas.

Ratio æstuum sub æquatore in fyzygiis & quadraturis ex vi Solis & Lunæ conjunctim.

53. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Bristoliam*, tempore verno & autumnali, totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmi*, est quasi pedum 45; in quadraturis autem pedum tantum 25. Luminarium diametros apparentes, quæ hîc non definiuntur, assumamus esse mediocres; ut & Lunæ declinationem in quadraturis æquinoctialibus mediocrem esse, seu graduum  $23\frac{1}{2}$ ; & sinus versus duplicati complementi erit 1682 posito radio 1000. Solis autem in æquinoctiis, & Lunæ in fyzygiis, declinatio nulla est; & sinus versus duplicati complementi 2000. Inde fit vis in fyzygiis  $L+s$ , in quadraturis  $\frac{1682}{2000}L-s$ , æstuum altitudinibus 45 pedum & 25 pedum, seu 9 passuum & 5 passuum, proportionalis. Et ductis extremis & mediis in se, fit  $5L+5s = \frac{1682}{2000}L-9s$ , seu  $L = \frac{28000}{5138}s = 5\frac{5}{11}s$ . Porro tempore æstivo ascensum maris in fyzygiis esse ad ascensum in quadraturis ferè ut 5 ad 4 memini me audisse. In ipsis solstitiis verisimile proportionem paulo minorem esse, puta 6 ad 5. Inde verò confectatur esse  $L = 5\frac{1}{5}s$ . Donec aliquid certius ex observationibus constiterit, assumamus  $L = 5\frac{1}{5}s$ ; & cum æstus sint ut vires, vis autem Solaris cieat æstum altum novem digitos, vis Lunarum ciebit æstum altum pedes quatuor. Demus altitudinem illam, per vim reciprocatationis aquarum, quâ motus semel impressus aliquamdiu conservatur, duplicari, vel fortè triplicari;

Computatur vis Lunæ ad æstus ciendos & altitudo aquæ inde oriunda.



triplicari; & generabitur æstuum quantitas illa omnis, quæ in Oceanis reverà conspicitur.

Has vires Solis & Lunæ vix aliter quàm per æstus Maris sentire posse. 54. Sufficiunt igitur hæ vires commovendo Mari: ast alios tamen effectus sensibiles in hac Terrâ, quantum animadverto, producent nullos. Nam cum granum unum in pondere granorum 4000, ope libræ exactissimæ, sentire vix possit, vis autem solaris ad ciendos æstus fit 12868200 vicibus minor vi gravitatis; & summa virium Solis & Lunæ, major existens in ratione  $6\frac{1}{3}$  ad 1, fit 2032890 vicibus minor vi eadem gravitatis: perspicuum est, quod conjunctæ illæ vires sint vicibus quingentis minores, quàm quæ pondus corporis cujusvis, in librâ appensi, sensibilibiter augere vel minuere possint; & propterea corpus nullum appensum movebunt sensibilibiter. Unde nec in experimentis Pendulorum, Barometrorum, Insidentium Aquæ stagnanti, & Staticis similibus, sensibiles edent effectus. Atmosphæra quidem his viribus fluet & refluet ad modum maris, sed motu tam exiguo ut exinde ventus nullus sensibilis oriatur (<sup>m</sup>).

Corpus Lunare esse quàm sexuplo densius quàm Solare. 55. Si Lunæ & Solis tam effectus in æstibus ciendis, quàm diametri apparentes, æquarentur inter se; forent horum vires absolutæ ut magnitudines (per Corol. 14. Prop. LXVI.) At lunaris effectus est ad effectum Solis, ut  $5\frac{1}{3}$  ad 1 circiter: & diameter minor, in ratione  $31\frac{1}{2}$  ad  $32\frac{1}{2}$ , seu 45 ad 46. Augenda est autem vis Lunæ in ratione effectus directè, inque ratione triplicatâ diametri inversè: eoque pacto fiet vis Lunæ, collata cum ipsius magnitudine, ad vim Solis collatam cum hujus magnitudine, ut  $5\frac{1}{3}$  ad 1 semel, & 45 ad 46 ter; id est ut  $5\frac{7}{10}$  ad 1 circiter. Habet igitur Luna vim absolutam centripetam majorem in ratione  $5\frac{7}{10}$  ad 1 pro magnitudine corporis sui, quàm Sol pro magnitudine sui; adeoque densior est in eadem ratione.

Lunam densiorem esse Terrâ nostrâ in ratione 3 ad 2 circiter. 56. Tempore 27<sup>d</sup>. 7<sup>h</sup>. 43', quo Luna revolvitur circa Terram, revolvi posset Planeta circa Solem ad distantiam 18,954 diametrorum Solis ab ipsius centro, posito quod Solis diameter mediocris apparens sit  $32\frac{1}{3}$ . Hoc tempore revolvi posset Luna circa Terram quiescentem ad distantiam 30 diametrorum terrestrium. Si idem esset numerus diametrorum in utroque casu, foret vis absoluta circumterrestris ad vim absolutam circumsolarem, ut mag-

(<sup>m</sup>) Delirant igitur, qui cœli mutationes ex vi Lunæ arcessunt.

nitudo

nitudo Terræ ad magnitudinem Solis (per Corol. 2. Prop. LXXII.) Quoniam plures sunt diametri terrestres in ratione 30 ad 18,954, minus erit corpus Telluris in ratione illâ triplicatâ, hoc est in ratione  $3\frac{8}{29}$  ad 1. Est igitur vis Telluris, pro magnitudine corporis sui, ad vim Solis, pro magnitudine sui, ut  $3\frac{8}{29}$  ad 1; atque adeo densitas Terræ ad densitatem Solis in eadem ratione. Cum igitur densitas Lunæ sit ad densitatem Solis ut  $5\frac{7}{10}$  ad 1, erit densitas Lunæ ad densitatem Terræ ut  $5\frac{7}{10}$  ad  $3\frac{8}{29}$ , seu 23 ad 16. Unde cum magnitudo Lunæ sit ad magnitudinem Terræ ut 1 ad  $41\frac{1}{2}$  circiter, erit vis absoluta centripeta Lunæ ad vim absolutam centripetam Terræ, ut 1 ad 29 circiter; nec non quantitas materiæ in Lunâ ad quantitatem materiæ in Terrâ, in eadem ratione. Hinc datur commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ exactius quàm antè: quo cognito, licebit jam distantiam Lunæ à Terrâ magis accuratè colligere. Sed malim expectare donec proportio corporum Lunæ ac Terræ ad invicem ex phænomenis æstus marini determinetur exactius: sperans etiam interea confore, ut ambitus Terræ ex majoribus stationum intervallis mensuretur, quàm hæctenus à quoquam factum fuit.

57. HÆCTENUS exposui Systema Planetarum. Stellas autem De Fixarum distantia. fixas immensis intervallis ab hoc systemate distare, colligitur ex defectu parallaxeos annuæ. Hanc minuto primo minorem esse certissimum est, & propterea distantias Fixarum superare distantiam Saturni à Sole, vicibus plusquam 360. Qui Terram Planetis, & Solem Fixis annumerant, longius amovebunt Fixas argumentis sequentibus. Ex Telluris motu annuo oriri debet translatio Fixarum inter se, parallaxi duplicatæ propemodum æqualis. At Stellæ majores & propiores, respectu ulteriorum, quæ per Telescopia solummodo videntur, nondum moveri notantur. Demus motum eorum minorem esse minutis viginti secundis, & distantia Fixarum proximarum superabit mediocrem distantiam Saturni vicibus 2000. Rursus Saturnus disco suo 17", vel 18", lato excipit  $\frac{1}{1700000000}$  partem circiter lucis Solaris. Namque tanto minor est discus ille superficie totâ sphericâ orbis Saturnii. Si Saturnus reflectere supponatur quasi partem quartam hujus lucis, lux



lux tota quæ ab ejus hemisphærio lucido reflectitur, erit quasi  $\frac{1}{4100000000}$  pars lucis totius manantis ab hemisphærio Solis. Ergo cum lux rarefcat in duplicatâ ratione distantiae corporis lucentis, si Sol magis distaret quàm Saturnus vicibus  $10000 \times \sqrt{42}$ , hic appareret æquè lucidus ac jam Saturnus apparet, absque annulo suo; atque adeò paulo lucidior foret quàm Stella fixa primæ magnitudinis. Ponamus igitur distantiam, quâ Sol luceret ut Fixa, majorem esse quàm distantia Saturni quasi vicibus  $100000$ , & ipsius diameter apparens erit  $7''$ .  $16'''$ . parallaxis autem à Terræ motu annuo orta  $13''$ . Atque tanta erit distantia, diameter apparens, & parallaxis Fixarum magnitudinis primæ, Soli nostro, quoad magnitudinem & lucem, æqualium. Fingere quidem licet partem bene magnam lucis Fixarum, in transitu suo per tanta spatia, fisti & interire, adeoque Fixas propius admoveri debere: verum hâc ratione Fixæ ulteriores vix conspici possent. Demus verbi gratiâ tres quartas lucis partes interire in transitu à Fixis proximis ad nos, & partes tres quartæ bis interibunt in transitu per duplum spatium, ter in transitu per triplum, & sic deinceps; adeoque Fixæ quæ sunt duplo remotiores erunt sexdecim vicibus obscuriores; nimirum quadruplo obscuriores ob diminutam diametrum apparentem, atque rursus quadruplo obscuriores ob amissam lucem; & eodem argumento Fixæ triplo remotiores erunt  $9 \times 4 \times 4$ , seu  $144$ , vicibus obscuriores; & Fixæ quadruplo remotiores erunt  $16 \times 4 \times 4 \times 4$ , seu  $1024$ , vicibus obscuriores. Tanta autem lucis diminutio cum phænomenis, & hypothefi quòd Fixarum diversæ sunt distantiae, neutiquam consistit.

58. Tantis igitur intervallis ab invicem distantia sidera nec trahent se mutuò sensibilibiter, nec à Sole nostro trahentur. At Cometæ vi circumfolari obnoxios esse necesse est: etenim ut defectus parallaxeos diurnæ extulit eos regionibus sublunaribus, sic ex parallaxi annuâ convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores, si Terra vergit ad oppositionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem signorum, sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi, si Terra

Cometas, quoties in conspectum veniunt, esse Jove propiores, probatur ex parallaxi in longitudinem.

Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario situ. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometâ & celerius fertur, Cometa fit retrogradus; si tardius, fit saltem tardior; & Terra pergente ad contrarias partes, celerior. Et colligendo differentias inter motus celeriores & tardiores, atque summas motuum celeriorum & retrogradorum, easque cum situ & motu Terræ, ex quibus oriuntur, conferendo; prodiit mihi, ex hâc parallaxi, distantia Cometarum, quo tempore nudis oculis videri desinunt, minor semper quàm distantia Saturni, & ut plurimum minor quàm distantia Jovis.

59. Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis, quamdiu moventur celerius; at in fine cursûs, ubi motus apparens à parallaxi oriundus majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis; & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quòd respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparantes Cometæ satis longè infra Jovem. Unde consequens est, quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendant sæpius infra orbem Martis & inferiorum Planetarum.

Probatur ex parallaxi in latitudinem.

60. Confirmatur præterea tanta propinquitas ex parallaxi orbis annui, quatenus ea præterpropter colligitur per hypothefin, quòd Cometæ moventur uniformiter in lineis rectis. Nota jam est methodus (à *Keplero* tentata, à *Wallisio* & *Wrennio* perfecta) colligendi distantiam Cometæ juxta hanc hypothefin ex quatuor observationibus: & Cometæ ad hanc regularitatem reducti transire solent per medium regionis Planetarum. Ut Cometæ annorum  $1607$  &  $1618$  inter Solem & Terram, definiente *Keplero*; ille anni  $1664$ , infra orbem Martis; & iste anni  $1680$ , infra orbem Mercurii; definientibus *Wrennio* & aliis. Per similem hypothefin rectilineam, *Hévelius* Cometæ omnes, quorum observationes extant, locavit infra orbem Jovis. Errant igitur, & absque calculo Astronomico loquuntur, qui, ex regulari motu Cometarum, vel ablegant eos in regiones Fixarum, vel motum Telluri denegant; cum non possint eorum motus ad omnimodam regularitatem satis reduci, nisi ex admissio transitu per regiones

Probatur aliter ex parallaxi.

Telluri moventi vicinas. Et hæc sunt argumenta ex parallaxi, quatenus ea absque exactâ cognitione orbium & motuum Cometarum determinari possit.

Ex luce capiti probatur Cometas descendere ad orbem Saturni. 61. Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capiti. Nam corporis coelestis à Sole illustrati, & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiae; in duplicatâ ratione ob auctam distantiam à Sole, & in alia duplicatâ ratione ob diminutam apparentem diametrum. Inde intelligitur, quod Saturnus ob duplam distantiam & dimidiam ferè diametrum apparentem, apparere debet quasi 16 vicibus obscurior quàm Jupiter; & quod, si distantia ejus esset quadruplo major, foret lux ejus 256 vicibus minor, adeoque nudis oculis cerni vix posset. Cometæ autem non rarò æquant Saturnum luce suâ, nec tamen superant ipsum diametris apparentibus. Cometa anni 1678, juxta observationem *Hookii*, æquabat luce suâ Fixas primæ magnitudinis; & caput ejus, seu Stella in medio comæ, per telescopium pedum quindecim visum, apparebat æquè lucidum ac Saturnus propè Horizontem; diameter verò capitis erat solummodo 25", id est eadem ferè cum diametro circuli æquantis Saturnum cum annulo. Coma capiti circumfusa erat quasi decuplo latior, nimirum 4½ min. Rursus Cometæ anni 1682 minima capillitii diameter, per tubum sexdecim pedum à *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2'. 0". Nucleus autem, seu Stella in medio, vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11" vel 12". Luce verò & claritate capitis superabat Cometam anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Adde quod Cometa anni 1665, mense *Aprili*, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ pene Fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6'; at nucleus cum Planetis, ope Tubi optici, collatus, planè minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Adde annulum, & Saturni facies jam dupla erit; lux verò haud intensior quàm Cometæ; proindeque Cometa propior erat Soli quàm Saturnus. Ex proportionem nuclei ad capillitium

tium, his observationibus patefactâ, & latitudine, quæ rarò superat 8' vel 12', patet stellas Cometarum, ut plurimum, ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis; lucem verò interea cum luce Saturni non rarò conferri posse, eamque aliquando superare. Et inde distantias eorum in periheliis vix esse majores quàm Saturni. In distantia duplo majore lux foret quadruplo minor, & fulco pallore tantum cederet luci Saturni, quantum lux hujus cedit splendori Jovis: quæ differentia facile notari posset. In distantia verò decuplo majore, corpora eorum superarent corpus Solis, lux autem cederet luci Saturni vicibus centum. Inque distantis majoribus corpora longe superarent Solem, at in tenebris profundis constituta non amplius cernerentur. Tantum abest ut, Sole nostro in Fixis numerato, Cometæ ad medias regiones inter Solem & Fixas amoveantur. Ibi certè non multo magis illustrari deberent à Sole, quàm nos illustramur à maximâ Fixarum.

62. Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circumdatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis, à se reflexæ, Planetas æmuletur. Inde verisimile sit, Cometas longè infra sphaeram Saturni descendere, ut ex parallaxi probavimus. Idem verò quàm maximè confirmatur ex Caudis. Hæc vel ex reflexione fumi sparsi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu, minuenda est distantia Cometarum, ne fumus, à capite semper ortus, per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. Posteriore, referenda est lux omnis, tam caudæ quàm capillitii, ad nucleum capitis. Quod si imagineris lucem hanc omnem congregari, & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certè, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur à Sole, adeoque erit Soli multo propior. Sic Cometa anni 1679, *Decembris* 12 & 15 stylo veteri, quo tempore caudam clarissimam emittebat, & luci multorum Jovium, per tantum spatium diffusæ, ac dilatatæ, non imparem; magnitudine nuclei (ut observabat *Flamstedius*) cedebat Jovi, adeoque erat Soli longè vicinior. Quini-

Ut & longè  
infra orbem  
Jovis, &  
quandoque  
infra orbem  
Terræ.

mo minor erat Mercurio: nam die 17 mensis hujus, ubi Terræ propior erat, apparuit *Cassino* per telescopium pedum 35, paulo minor globo Saturni. Die octavo mensis hujus, tempore matutino, vidit *Hallejus* caudam perbreve & latam, & quasi ex corpore Solis jamjam orituri exeuntem, ad instar nubis insolito more fulgentis, nec prius disparentem quam Sol ipse inciperet supra horizontem conspici. Superabat igitur hic splendor lucem nubium usque ad ortum Solis; & immediato Solis splendori solum cedendo vincebat longè lucem omnium stellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipsa Luna, in tantâ Solis orientis vicinitate, cerni solet. Fingas lucem hancce dilatam congregari, & in orbem nuclei Cometici, Mercurio minorem, coarctari: & splendore longè fortiori jam reddita magis conspicua, Mercurium longè superabit, adeoque erit Soli vicinior. Diebus 12 & 15 ejusdem mensis, cauda hæc, per spatium longè majus diffusa, apparuit rarior; at luce tamen adeo forti, ut, stellis fixis vixdum apparentibus, cerneretur; & mox trabis mirum in modum fulgentis speciem exhibuit. Ex longitudine quadraginta vel quinquaginta graduum & latitudine duorum quantitatem lucis totius computes.

Idem probatur ex insigni splendore caudarum in vicinâ Solis.

63. Confirmatur verò tantus Cometarum ad Solem accessus, ex situ eorum ubi maximè fulgent. Nam capite per Solem transeunte, & sub radiis Solaribus adhuc latente, narrantur caudæ omnium fulgentissimæ de horizonte ad modum trabium ignearum exiisse; dein, capite in conspectum veniente & longius à Sole recedente, splendorem semper minui, & in pallorem viæ lacteæ similem, sed imprimis multò magis conspicuam, postea verò languescerentem abire. Talis erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus lib. 1. *Meteor.* 6. cujus caput primo die non conspectum est, eo quòd ante Solem vel saltem sub radiis Solaribus occidisset; sequente verò die, quantum potuit visum est. Nam quàm minimâ fieri potest distantia, Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem, caudæ scilicet, nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore (ait *Aristoteles*) cum cauda jam minus flagraret, reddita est capiti Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cæli partem, id est ad 60<sup>gr.</sup> extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Ejusdem generis Cometæ duos *Justinus* lib.

37 describit, quos ait ita luxisse, ut Cælum omne conflagrare videretur, & magnitudine sui quartam Cæli partem occupasse, & fulgore sui Solis nitorem vicisse. Quibus ultimis verbis juxtaposito ardoris Cometici & Solis orientis vel occidentis insinuat. Accedit Cometa anni 1101, vel 1106, cujus stella erat parva & obscura, ut ille anni 1680; sed splendor, qui ex eâ exiit, valde clarus, & quasi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat, ut habet *Hévelius* ex *Simeone Dunelmensi Monacho*: apparuit initio mensis *Feb.* circa vesperum ad occasum Solis brumalem. Inde & ex situ caudæ, colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, distabat quasi cubito uno, ab horâ tertiâ, rectius sextâ, usque ad horam nonam radium ex se longum emittens. Cometa anni 1264, mense *Julio*, aut circa Solstitium, præcedebat Solem orientem, magnâ luce usque ad medium Cæli versus occidentem radios suos emittens. Et initio paulum ascendebat supra horizontem; sed, progrediente Sole, discedebat indies ab horizonte, donec tandem ipsum Cæli medium præteriret. Dicitur autem fuisse principio magnus & clarus, comam habens latam, quæ de die in diem cœpit deficere. Describitur autem in *Append. Matth. Paris, Hist. Angl.* in hunc modum. *A. C.* 1265 apparuit Cometa tam notabilis, ut nullus tunc vivens viderit talem prius. Ab oriente enim cum magno fulgore surgens, usque ad medium Hemisphærii versus occidentem omnia perlucidè pertrabebat. Anno 1401, vel 1402, Sole infra horizontem demerso, apparuit in occidente Cometa lucidus ac clarus, comam erectam explicans ignis flammantis specie, non secus ac hastam ab occasu in ortum radios jaculans; à Sole, infra horizontem demerso, propriis radiis effusus omnes orbis Terræ terminos colustrabat; nec aliis stellis lumen exferere concedebat, aut aerem noctis umbrâ infuscari: quòd ejus lumen aliorum splendorem vinceret, & ad Cæli verticem flammans protenderetur quamdiu supra horizontem extabat, &c. *Hist. Byzant.* *Duca Michaelis Nesiotis*, cap. 16. Ex situ caudæ, & tempore hujus primæ apparitionis, colligitur caput tunc fuisse vicinum Soli, & indies à Sole recessisse: nam Cometa ille tres menses perduravit. Anno 1527, *Aug.* 11, circa horam quartam matutinam visus est per totam ferè Europam Cometa terrificus in Leone, duravitque per horam unam & quadrantem quotidie flagrans. A subsolano ortus est versusque

versusque meridiem, & occidentem ascendit longitudine immensa; sub septentrione autem maximè conspicuus fuit, & nube (id est caudâ) terribilis describitur, ex mente plebis formam habens brachii incurvati cum gladio ingentis magnitudinis. Anno 1618, diebus extremis *Novembris*, increbuit rumor apparere sub ortum Solis trabem candidam, quæ fuit nimirum cauda Cometæ, capite adhuc intra radiorum claritatem delitescente. *Novemb.* 24. & deinceps visus est Cometa clarâ luce, capite & caudâ clarissimis. Longitudo caudæ, quæ primùm graduum erat 20, vel 30, crevit usque ad *Decemb.* 9, quando evaserat graduum 75, at luce dilutior semper & rariore quàm sub initio. Anno 1668, *Mart.* 5, *st. n.* horâ septimâ vesp. *Pater Valentinus Eslancius, Brasiliæ* agens, Cometam vidit horizonti proximum, ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, caudâ verò supra modum fulgente, ut stantes in litore speciem ejus è mari reflexam facillè cernerent. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subinde notabiliter decrescens; cauda sub initio ab occidente in austrum vergens, & horizonti ferè parallela, speciem habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum. Postea verò luce decresciente, aucta est magnitudine, quoad usque Cometa apparere desiit. Unde & *Cassinus Bononiæ Martii* 10, 11 & 12, de horizonte exeuntem vidit ad longitudine graduum 32. In *Portugalliâ* verò quartam ferè Cœli partem, id est gradus 45, occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protenta, nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra horizontem delitescente. Ex incremento caudæ manifestum est, quòd caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, ubi cauda maximè splendebat. His omnibus adde Cometam anni 1680, cujus insignem splendorem, in conjunctione capitis cum Sole, jam antè descripsi. Arguit autem tantus splendor Cometæ hujus generis reverâ transire per fontem luminis, præsertim cum caudæ nunquam ita luceant in oppositione Solis, neque ibi legantur trabes igneæ apparuisse.

64. Idem denique colligitur ex luce capitis crescente in recessu Cometarum à Terrâ Solem versus, ac decresciente in eorum recessu à Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior anni 1665, observante *Hevelio*, ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo, adeoque præterierat perigæum; splendor verò capitis

Probat ex  
luce capitis  
quatenus ea  
ceteris pari-  
bus major est  
in vicinâ  
Solis.

capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa, radiis Solaribus obtectus, desiit apparere. Cometa anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine mensis *Julii*, ubi primùm conspectus est, tardissimè movebatur minutos primos 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur, usque ad *Sept.* 4, quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat: id quod etiam ex diametro capitis, micrometro mensuratâ, colligitur; quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6, esse tantum 6'. 5", inclusâ comâ; at *Sept.* 2, esse 9'. 7". Caput igitur initio longè minus apparuit, quàm in fine motûs: at initio tamen, in vicinâ Solis, longè lucidius extitit quàm circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à Sole, quoad lumen decrevit non obstante accessu ad Terram. Cometa anni 1618, circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680, circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, adeoque tunc erant in perigæis: verum splendor maximus capitis contigit ante duas ferè septimanas, ubi modò exierant de radiis Solaribus, & splendor maximus caudarum paulo antè, in majore vicinitate Solis. Die 12 mensis *Decembris*, conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole, id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17, apparuit idem ut stellæ tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26, velocissimè motus, inque perigæo prope modum existens, cedebat *Ori Pegasi*, stellæ tertiæ magnitudinis; *Jan.* 3, apparebat ut stellæ quartæ; *Jan.* 9, ut stellæ quintæ; *Jan.* 13, ob splendorem Lunæ crescentis, disparuit; *Jan.* 25, vix æquabat stellæ magnitudinis septimæ. Caput verò Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1, majus videbatur stellæ primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16 (jam in perigæo existens) magnitudine parvum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7, *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Si sumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita, in longinquis regionibus posita, luxissent ante & post æqualiter; id adeo ob æquales distantias à Terrâ. Quòd uno casu maximè luxerunt, altero evanuerunt, vicinitati Solis in priore casu,

casu, distantiae ejus in posteriore ascribendum est. Et ex magna illâ lucis utriusque differentiâ concluditur magna vicinitas in priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere, ubi capita velocissimè moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in viciniâ Solis.

Idem confir-  
matur ex  
magno nu-  
mero Come-  
tarum viso-  
rum in re-  
gione Solis.

65. Ex his intellexi tandem, cur Cometæ tantopere frequen-  
tent regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longè ultra Sa-  
turnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Fo-  
rent enim Terræ viciniore, qui in his partibus versarentur, &  
Sol interpositus obscuraret cæteros. Verùm percurrendo historias  
Cometarum, reperi quòd quadruplo vel quintuplo plures detecti  
sunt in hemisphærio Solem versus, quàm in hemisphærio oppo-  
sito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux Solaris ob-  
textit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas  
emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius  
detegendos exhibeant, quàm sint ipso Jove propiores. Spatii au-  
tem, tantillo intervallo circa Solem descripti, pars longè major sita  
est à latere Terræ, quod Solem respicit; inque parte illâ majore, Soli  
ut plurimum viciniore, magis illuminari solent. Per orbium quo-  
que insignem excentricitatem fit, ut Apfides imæ sint Soli longè  
propiores, quàm si revolutiones in circulis Soli concentricis pera-  
gerentur.

Confirmatur  
etiam ex  
caudis majo-  
ribus & splen-  
didioribus  
post con-  
junctionem  
capituncum  
Sole quam  
antea.

66. Hinc etiam intelligimus, quare Cometarum caudæ in ca-  
pitibus ad Solem properantibus raræ semper & breves apparent,  
& vix longitudinem graduum 15 vel 20 superasse leguntur; at in  
recessu capitum à Sole, fulgent sæpe ad instar trabium ignitarum,  
& mox ad gradus 40, 50, 60, 70, & ultra, in longum porrigun-  
tur. Oritur utique tantus caudarum splendor tantaque longitudo  
ex calore Solis Cometam prætereuntem calefaciente. Et inde col-  
ligere videor, Cometæ omnes, quorum tales sunt caudæ, transiisse  
per viciniâ Solis.

Cauda oriri  
ex atmos-  
phæris Co-  
metarum.

67. Inde etiam colligere licet, quòd caudæ oriantur ex Atmos-  
phæris capitum. Est autem de Caudâ opinio triplex: eam vel  
jubar esse Solis, per translucidum Cometæ caput propagatum; vel  
oriri ex refractione lucis in progressu ipsius à capite Cometæ in  
Terram; vel denique nubem, esse seu vaporem, à capite Cometæ  
jugiter surgentem, & abeuntem in partes à Sole adversas. Opinio  
prima

prima eorum est, qui nondum imbuti sunt scientiâ rerum Optica-  
rum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi  
quatenus lux reflectitur à pulverum & fumorum particulis per æ-  
rem semper volitantibus: adeoque in aëre fumis crassioribus in-  
fecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aëre clariore, tenui-  
us, & ægrè sensibile; in Cœlis autem, absque materiâ reflectente,  
nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est,  
sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non  
fit nisi per radios, qui in oculos impingunt. Requiritur igitur  
materia aliqua reflectens in regione caudæ, & eâ ratione res redit  
ad opinionem tertiam. Nam materia illa reflectens non alibi re-  
periri debet quàm in regione caudæ, ne Cœlum totum, luce Solis  
illustratum, uniformiter splendeat. Opinio secunda multis pre-  
mitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus;  
qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux  
Fixarum & Planetarum, distinctè ad nos transmissa, demonstrat Me-  
dium cœleste nullâ vi refractivâ pollere. Nam quòd dicitur Fixas  
ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarif-  
simè contingit, ascribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixa-  
rum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum oculorum  
tum aëris tremuli referendæ sunt; quippe quæ admotis oculo te-  
lescopiis evanescent. Aeris & ascendentium vaporum tremore  
fit, ut radii facilè de angusto pupillæ spatio per vices detorquean-  
tur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde  
est, quòd scintillatio in priore casu generetur, in posteriore verò  
cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem trans-  
missionem lucis per cœlos, absque omni refractione sensibili. Ne-  
quis contendat, quòd caudæ non soleant videri in Cometis, cum  
eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non ha-  
bent satis virium ad oculos movendos; & propterea caudas Fixa-  
rum non cerni; sciendum est, quòd lux Fixarum plus centum  
vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ  
cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò  
nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux  
tenuis est, & valdè obtusa. Sic enim Cometa anni 1680, mensè  
*Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ  
magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gra-  
VOL. III. F f dus



crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur.

Quo pacto  
Caudæ oriri  
possint ex at-  
mosphæris  
capitum.

69. Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum, & progressum in partes à Sole averfas, *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longè tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere non est à ratione prorsus alienum, non obstante quòd substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, à radiis sensibilibus propelli nequeant. Auctor alius particulas tam leves quàm graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cùm autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, adeoque servatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum oriri. Ascendit fumus in camino, impulsu aëris cui innatat. Aer ille, per calorem rarefactus, ascendit ob diminutam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media, quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes, eâ actione calefactæ, calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa, calore sibi communicato, rarefiet; &, ob diminutam eâ raritatem gravitatem suam specificam quâ prius tendebat in Solem, ascendet instar fluminis<sup>(n)</sup>, & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: impetu etiam lucis solaris, ut jam dictum est, ascensum promovente.

Easdem ex  
his atmos-  
phæris oriri  
docetur ex  
ipsarum va-  
riis phæno-  
menis.

70. Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averfas ascendere, confirmatur præterea, ex legibus quas observant. Ut quòd in planis orbium Cometarum, per Solem transeuntibus, jacentes deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita, in orbibus illis progredientia, relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à Sole directè averfis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est, ubi cauda obliquior est ad orbem Cometæ; ut & ubi caput ad Solem propius accedit. Quòd caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurventur. Quòd curvatura major

(n) Fallor ni auctor scripserit, instar fluminis.

est,

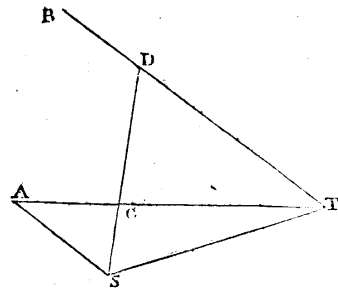
est, ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quòd deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque adeo quòd cauda, convexo sui latere, partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à Sole per caput Cometæ in infinitum ductâ. Et quòd caudæ, quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulò splendidiore, & limite minus indistincto terminatæ quàm ad concava. Pendent igitur Phænomena cauda à motu capitis, non autem à regione cœli in quo caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus; ita in Cœlis, ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole, uti jam dictum est; & superiora vel rectâ petere, si corpus fumans quiescit, vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit, à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit, ubi ascensus vaporis velocior est, nimirum in vicinâ Solis & juxta corpus fumans. Namque ibi potentior est vis illa Solaris, quâ vapor ascendit. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna, & quia vapor in columnæ latere præcedente paulò recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur; vapore ad latus alterum paulatim languefcente, & ex oculis sensim evanefcente.

71. Cæterum rerum naturalium causas reddere non est hujus instituti: vera an falsa fuerint hæc quæ modò dicta sunt, id saltem in superioribus confecimus; Radios à caudis Cometarum secundum lineas rectas per cœlos propagari, adeoque à partibus cœlorum venire, in quibus caudæ spectatoribus ubicumque constitutis apparent, quæque adeo à capitibus Cometarum in regiones à Sole averfas, porriguntur. Et hoc fundamento limitem denuò Cometarum distantis in hunc modum ponimus.

Representet s Solem; t, Terram; s t a, distantiam Cometæ à Sole; & a t b, apparentem longitudinem caudæ. Et quoniam lux propaga-

tur





tur à termino caudæ secundum lineam rectam TB, reperietur terminus ille alicubi in lineâ TB. Sit ipse punctum D, jungeque DS, secantem lineam TA in C. Et quia cauda semper opponitur Soli quamproximè; & propterea Sol, caput Cometæ, & terminus caudæ jacent in directum: reperietur caput Cometæ in C. Ipsi TB parallelam age SA, occurrentem lineæ TA in A, & Cometæ caput C necessariò reperietur inter T & A; eò quòd terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ TB, & lineæ omnes SD, quæ ab S ad lineam TB duci possunt, secant lineam TA alicubi inter T & A. Quare Cometa non potest longius abesse à Terrâ, quàm intervallo TA; nec à Sole, quàm intervallo SA ultra Solem, vel ST citra. Exempli gratiâ, *Decemb. 12, 1680*, Cometa distabat  $9^{\text{gr}}$ . à Sole, & longitudo caudæ erat  $35^{\text{gr}}$ . ad minimum. Constituatur ergo triangulum TSA; cujus angulus T æquetur distantiae graduum 9; & angulus A, angulo ATB seu longitudini caudæ graduum 35; & erit SA ad ST, id est limes maximæ possibilis distantiae Cometæ à Sole, ad semidiametrum orbis magni, ut sinus anguli T ad sinum anguli A, hoc est ut 3 ad 11 circiter. Quare Cometa eo tempore minus distabat à Sole quàm  $\frac{3}{11}$  partibus distantiae Terræ à Sole; & propterea versabatur aut intra orbem Mercurii, aut inter orbem illum & Terram. Rursum *Decemb. 21*, distantia Cometæ à Sole erat  $32\frac{2}{3}^{\text{gr}}$ . & longitudo caudæ  $70^{\text{gr}}$ . Ergo ut sinus  $32\frac{2}{3}^{\text{gr}}$ . ad sinum  $70^{\text{gr}}$ . hoc est ut 4 ad 7, ita erat limes intervalli inter Cometam & Solem ad distantiam Terræ à Sole; & propterea Cometa nondum excefferat orbe Veneris. *Decemb. 28*, distantia Cometæ à Sole erat  $55^{\text{gr}}$ . & longitudo caudæ  $56^{\text{gr}}$ . Ergo limes intervalli inter Cometam & Solem nondum æquabat distantiam Terræ à Sole: & propterea Cometa nondum excefferat orbe Telluris. Ex parallaxi autem colligitur, quòd excessus ille incidit in *Jan. 5*, circiter, quòdque Cometa descendebat longè infra orbem Mercurii. Concedamus ipsum in perihelio fuisse *Decemb. 8*, quo tempore cum Sole conjungebatur; & in itinere à perihelio ad exitum de orbe Telluris, confumentur

confumentur dies 28, adeoque diebus viginti sex vel septem frequentibus, quibus oculo inermi videri desiit, vix duplicabat distantiam suam à Sole. Iisdem argumentis limitando distantias aliorum Cometarum, pervenitur tandem ad hanc conclusionem: quòd Cometæ omnes, quamdiu se nobis ostendunt, versantur intra spatium sphaericum centro Sole & intervallo Solis ac Terræ vel duplicato, vel ad summum triplicato, descriptum.

72. Versantur igitur Cometæ, toto apparitionis tempore, intra sphaeram activitatis vis circumfolaris, adeoque agitantur ipsius impulsu & propterea (per Corol. 1. Prop. XIII. *Libri 1. Princip.*) describunt Conicas Sectiones umbilicos habentes in centro Solis, & radiis ad Solem ductis conficiunt areas proportionales temporibus. Nam vis illa, in immensum propagata, reget motus corporum longè ultra orbem Saturni.

73. Cæterum de Cometis Hypothesis est triplex: eos vel generari & interire, quoties apparent & evanescent; vel de Fixarum regionibus venientes præterire systema nostrorum Planetarum; vel denique circa Solem in orbibus valde excentricis perpetuò revolvi. Casu primo Cometæ, pro variâ suâ velocitate, movebuntur in Sectionibus quibuscunque Conicis; secundo, movebuntur in Hyperbolis; utroque indifferenter frequentabunt regiones omnes tam Polorum quàm Eclipticæ; tertio, motus peragentur in Ellipsis valde excentricis, & ad speciem Parabolarum quamproximè accedentibus; orbes autem, si lex Planetarum servetur, haud multum divaricabunt à plano Eclipticæ. Et quantum hætenus animadvertere potui, casus tertius obtinet. Nam Cometæ maxime frequentant Zodiacum, & vix unquam pertingunt ad latitudinem heliocentricam graduum quadraginta. Moventur etiam in orbibus quamproximè Parabolicis, uti colligo ex eorum velocitate. Nam velocitas quâ Parabola describetur, est ubivis ad velocitatem, quâ Cometa vel Planeta in circulo ad eandem à Sole distantiam revolvi posset, in dimidiatâ ratione numeri binarii ad unitatem (per Corol. 7. Prop. XVI.) Et meo quidem calculo talis circiter reperta est Cometarum velocitas. Rem examinavi, colligendo præterpropter velocitates ex distantiiis, ac distantias ex parallaxi & phænomenis caudæ conjunctim. Errores in velocitatibus excessu, vel defectu, haud majores obvenere, quàm qui ex erroribus



bus in distantis, eâ ratione collectis, oriri potuerint. Sed & ufus fum hujusmodi ratiocinio.

Quanto tempore Cometæ in Trajectoriis Parabolicis percurrant orbem magni.

74. Diviso orbis magni radio in partes mille, designent numeri in Tabulæ sequentis columnâ primâ distantiam verticis Parabolæ à centro Solis in his partibus; & Cometa, temporibus in columnâ secundâ expressis, movebitur à Perihelio ad superficiem sphaeræ, quæ centro Sole & radio orbis magni describitur; & temporibus in Corol. 3, 4 & 5. expressis duplicabit, triplicabit & quadruplicabit eandem fuam à Sole distantiam.

T A B. I.

Distantia inter centrum Solis & perihelium Cometæ.	Tempus transitus Cometæ à Perihelio ad distantiam à Sole radio Orbis magni			
	Æqualem.	Duplicato æqualem.	Triplicato æqualem.	Quadruplicato æqualem.
	dies hor. min.	dies hor. min.	dies hor. min.	dies hor. min.
0	27. 11. 12	77. 16. 28	142. 17. 14	219. 17. 30
5	27. 16. 7	77. 23. 14		
10	27. 21. 0	78. 6. 24		
20	28. 6. 40	78. 20. 13	144. 03. 19	221. 8. 54
40	29. 1. 32	79. 23. 34		
80	30. 13. 25	82. 4. 56		
160	33. 5. 29	86. 10. 26	153. 16. 8	232. 12. 20
320	37. 13. 46	93. 23. 38		
640	37. 9. 49	105. 1. 28		
1280	. . . .	106. 06. 35	200. 6. 43	297. 3. 46
2560	. . . .	. . . .	147. 22. 31	300. 6. 03

Quo tempore Cometæ ingrediuntur orbem magni, & egrediuntur eodem.

Quo tempore Cometa ingreditur sphaeram orbis magni, vel de eadem egreditur, innotescit præterpropter ex parallaxi; expeditius autem per hanc Tabulam.

T A B.

T A B. II.

Distantia apparens Cometæ à Sole.	Cometæ motus apparens diurnus in orbe suo.		Distantia Cometæ à Terrâ in partibus quarum 1000 sunt radius orbis magni.
	Directus.	Retrogradus.	
gr.	gr. min.	gr. min.	
60	2. 18	0. 20	1000
65	2. 33	0. 35	845
70	2. 55	0. 57	684
72	3. 7	1. 9	618
74	3. 23	1. 25	551
76	3. 43	1. 45	484
78	4. 10	2. 12	416
80	4. 47	2. 49	347
82	5. 45	3. 47	278
84	7. 18	5. 20	209
86	10. 27	8. 19	140
88	18. 37	16. 39	70
90	Infin.	Infin.	00

75. Incidit ingressus vel egressus in tempus distantie Cometæ à Sole in Columnâ primâ è regione motus diurni expressæ. Sic anno 1681 *Jan. 4. fl. v.* motus diurnus apparens Cometæ in orbe ipsius erat quasi  $3^{\text{gr.}} 5'$ . Huic respondens distantia est  $71\frac{2}{3}^{\text{gr.}}$ . Et affecutus est Cometa hanc à Sole distantiam *Jan. 4.* circa horam sextam pomeridianum. Rursus anno 1680, *Novembris 11*, Cometæ qui tunc apparuit motus diurnus erat quasi  $4\frac{2}{3}^{\text{gr.}}$ . & huic respondens distantia  $79\frac{2}{3}^{\text{gr.}}$ . incidit in *Novemb. 10*, paulo antè mediam noctem. Hisce quidem temporibus Cometæ affecuti sunt distantiam quam habuit Terrâ à Sole, & Terrâ jam ferè in Perihelio versabatur. Computata est autem Tabula prior pro mediocri distantia Terræ à Sole assumpta partium 1000, & major est hæc distantia intervallo, quod Terra quasi spatium diei unius motu suo annuo, vel Cometa spatium horarum 16 motu suo percurrere potest. Ut Cometa reducatur ad mediocrem hanc distantiam partium 1000, addantur tempori priori & auferantur posteriori horæ sexdecim, & tempus prius evadet *Jan. 4.* horâ vespertinâ 10; posterius *Novemb. 10*, horâ matutinâ 6 circiter. Ex motuum diurnorum tenore & progressu colligitur quod conjungebatur Cometa uterque cum Sole inter *Dec. 7.* & *Dec. 9.* Inde

Vol. III.

G g

ad

ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. ex unâ parte, & *Nov.* 10, hor. 6 mat. ex alterâ, sunt dies quasi 28. Atque tot dies (per Tab. I.) in trajectoriis Parabolicis consumi debebant.

76. Cæterum ex coincidentia Periheliorum & velocitatum consensu verisimile fit, Cometas hosce, quos ut duos jam consideravi, non duos fuisse sed unum & eundem Cometam. Eâ lege orbita hujus Cometæ vel Parabola erit, vel Consectio à Parabola parum discrepans, & superficiem Solis propemodum tanget in vertice. Namque ex Tabulâ II. distantia Cometæ à Terrâ erat *Novemb.* 10, partium 360 circiter, & *Jan.* 4, partium 360 circiter. Inde & ex longitudinibus & latitudinibus Cometæ colligitur distantiam locorum à se invicem in quibus Cometa tunc versabatur, fuisse partium quasi 280. Hujus dimidium 140 est ordinatim applicatam ad orbitam Cometæ, abscindens partem axis ejus radio orbis magni, seu partibus 1000, æqualem circiter. Et inde dividendo quadratum ordinatæ 140 per axis partem abscissam 1000, invenietur latus rectum 19,6, seu numero rotundo 20: cujus pars quarta 5 est distantia inter verticem orbitæ & centrum Solis. Distantiæ partium 5 in Tabulâ primâ congruunt dies 27, horæ 16, min. 7. Tanto igitur tempore Cometa conficiet iter in orbe Parabolico inter Perihelium suum & superficiem sphaericam orbis magni radio partium 1000 descripti, atque adeo tempus illud duplicatum seu dies 55 & horas  $1\frac{1}{4}$  consumet motu suo toto intra orbem magnum. Atque ita se res habet. Namque à *Novemb.* 10, hor. 6 mat. quando Cometa hunc orbem ingressus est ad *Jan.* 4, hor. 10 vesp. quando is eodem egressus est sunt dies 55 & horæ 16. Differentia horarum  $7\frac{3}{4}$  in rudi hocce computo contemnenda est, & fortè ex motu paulo tardius in orbitâ Ellipticâ confecto oriri potest. Inter ingressum & egressum tempus medium incidit in *Decemb.* 8, hor. 2 mat. Igitur hoc tempore debuit Cometa reperiri in Perihelio. Et ecce *Hallejus* hoc ipso die proximè ante ortum Solis caudam perbreve latam & fulgentissimam, uti diximus, ex horizonte perpendiculariter surgentem vidit. Ex situ caudæ colligitur Cometam jam prætergressum fuisse Eclipticam, & latitudinem borealem habuisse; adeoque Perihelium, quod ex alterâ parte Eclipticæ jacebat, jam tum præterisse, nondum tamen pervenisse ad meridianum Solis. Inter Perihelium itaque & conjunctionem

Cometas hosce non fuisse duos sed unum & eundem Cometam. Quo orbe & qua velocitate hic cœlo trajecti docetur exactius.

junctionem Solis Cometa jam consistens versabatur ante horas paucas in Perihelio. Namque in tantâ Solis viciniâ moveri debuit celerrimè & singulis horis gradus fere dimidios apparenter percurrere.

77. Similibus computis colligo quòd Cometa anni 1618 in-  
gressus erat sphaericum limitem orbis magni *Decemb.* 7, ad Solis occasum. Incidit autem ipsius conjunctio cum Sole in *Novemb.* 9 vel 10 circiter; dies intercedunt quasi 28, ut in Cometa superiore: nam & ex caudæ magnitudine, quâ par fuit Cometæ superiori, verisimile est ipsum pariter propemodum rasisse Solare corpus. Fulserunt hoc anno Cometæ quatuor, quorum hic fuit ultimus: secundum, qui primo conspectus est in viciniâ Solis orientis *Octob.* 31, & mox sub radiis Solaribus evanuit, suspicor eundem fuisse cum quarto, qui de radiis Solaribus emerfit circa *Novemb.* 9. His adde quòd Cometa anni 1607 sphaeram orbis magni ingressus fuit, *Sept.* 14. *st. vet.* & accessit ad minimam suam à Sole distantiam circa *Octob.* 19; dies intercedunt 35. Distantia illa Perihelii à Sole subtendebat angulum apparentem quasi 23<sup>gr</sup>. ad Terram, adeoque erat partium 390: tot autem partibus in Tab. I. respondent dies 34 circiter. Porro Cometa anni 1665 in sphaeram orbis annui intrabat circa *Mart.* 17, & ad Perihelium accedebat circa *Apr.* 16; intercedentibus diebus 30. Distantia inter Perihelium & Solem subtendebat angulum quasi 7<sup>gr</sup>. ad Terram, adeoque erat partium quasi 122: & his partibus in Tab. I. respondent dies 30. Rursus Cometa anni 1682 intrabat in sphaeram orbis magni circa *Aug.* 11, & in Perihelio versabatur circa *Sept.* 16, à Sole tunc distans intervallo partium quasi 350, quibus in Tab. I. congruunt dies 33 $\frac{1}{2}$ . Quinetiam celebris ille Regiomontani Cometa, qui anno 1472, per regionem poli borealis trajiciendo, confecit uno die iter graduum quadraginta, limitem orbis magni ingrediebatur *Jan.* 21, quo tempore polum præteribat: & inde properans ad Solem occultabatur sub radiis Solaribus in ultimis diebus *Februarii*. Unde verisimile est quòd dies triginta, aut paulò plures, consumpti sint inter ingressum illum & Perihelium Cometæ, quodque adeo Cometa iste reverâ non celerior fuerit aliis Cometis, neque aliunde quàm ex transitu suo per viciniam Terræ tantam affecutus sit celeritatem apparentem.

Quâ velocitate Cometæ moventur, docetur pluribus exemplis.

Proponitur inventio Trajectoriæ Cometarum. 78. Est igitur Cometarum velocitas, quatenus ea per hujusmodi computationes nimium rudes definiri queat, ea ipsa quâcum Parabolæ, vel his affines Ellipses, describi debeant: & propterea, ex datâ inter Cometam & Solem distantia, datur quamproximè. Et hinc oritur Problema tale.

## P R O B.

*Datur relatio inter velocitatem Cometæ & distantiam ipsius à centro Solis; requiritur Trajectoria.*

Solutio autem hoc Problemate, habebitur tandem methodus determinandi Trajectorias Cometarum quam exactissimè. Nam si relatio illa bis assumatur, & inde trajectoria bis computetur, deinde ex observationibus inveniatur error Trajectoriæ utriusque; potest assumptio per regulam falsæ positionis corrigi, & sic tertia inveniri trajectoria quæ cum observationibus plane congruet. Et hac methodo determinando Cometarum trajectorias sciri tandem potest exactius quasnam regiones hæc corpora percurrunt, quantæ sint eorum velocitates, cujus generis trajectorias describunt, & quænam sint caudarum veræ magnitudines & formæ pro variis capitum distantis à Sole. Quin etiam sperandum est quod hac methodo sciri tandem possit, utrum Cometæ statis temporibus in orbem redeant, & quibus temporum periodis revolutiones singulorum compleantur. Solvitur autem Problema colligendo primum ex tribus vel pluribus observationibus motum horarium Cometæ ad tempus datum, deinde ex hoc motu Trajectoriam derivando. Sic pendet inventio Trajectoriæ ab unicâ observatione motuque horario tempore illius observationis, atque adeo seipsam vel probabit vel redarguet: nam conclusio, quæ ex motu horæ unius & alterius & hypothesi falsâ deducitur, nunquam congruet cum motibus Cometarum à principio ad finem. Methodus computationis totius ita se habet.

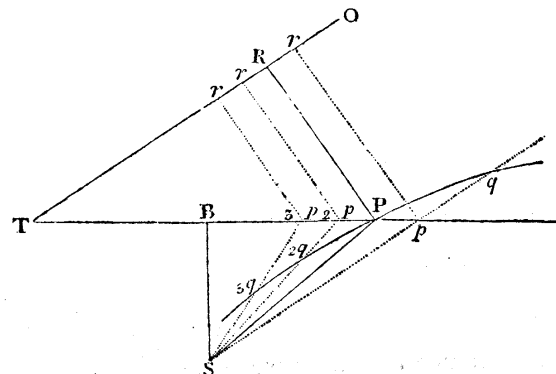
## L E M M A

## L E M M A I.

*Datas positione duas rectas OR, TP, tertiâ RP ad rectum angulum TRP secare, eâ lege ut si ad datum aliquod punctum s ducatur recta SP, datum sit contentum Solidum sub ductâ illâ SP & quadrato rectæ OR terminate ad datum punctum o.*

In Problematis solutionem præmittuntur Lemmata.

Confit graphicè sic. Sit contentum illud datum  $M^2 \times N$ . Ad rectæ OR punctum quodvis  $r$  erige perpendiculum  $rp$  occurrens ipsi TP in  $p$ . Et per puncta  $s, p$ , age  $sq$  æqualem  $\frac{M^2 \times N}{OR^2}$ . Simili Methodo age tres vel plures rectas  $s2q, s3q, \&c.$  & per puncta

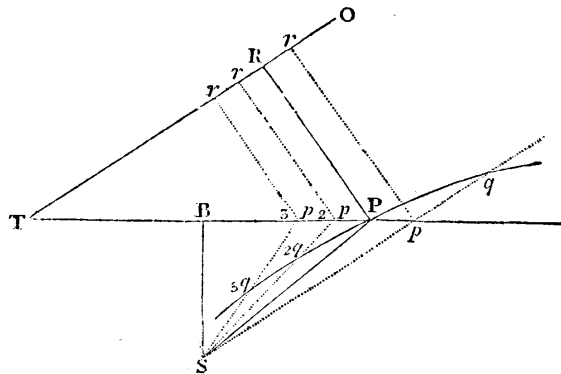


omnia  $q, 2q, 3q$  acta linea regularis  $q, 2q, 3q$  secabit rectam TP in puncto  $p$ , à quo demittendum est perpendiculum PR. Q. E. F.

Trigonometricè sic. Assumatur linea novissimè inventa TP, & inde in triangulis TPR, TPS dabuntur perpendiculara TR, SB, & in triangulo SBP latus SP & error  $\frac{M^2 \times N}{OR^2} - SP$ . Fac ut error iste puta  $D$  sit ad errorem novum puta  $E$ , ut error  $2p2q \pm 3p3q$  ad errorem  $2p3p$ , vel error  $2p2q \pm D$  ad errorem  $2pP$ ; & error ille novus additus vel subductus longitudini TP dabit longitudinem correctam  $TP \pm E$ . Electio additionis vel subtractionis inspectione Schematis dirigitur. Siquando opus fuerit ulteriore correctione, operationem repete.

Arithmetice sic. Puta factum, sitque lineæ TP graphicè inventæ correctæ longitudo  $TP + e$ : & correctæ longitudines linearum

rum OR, BP & SP erunt  $OR - \frac{TR}{TP} e$ ,  $BP + e$  &  $\sqrt{SP^2 + 2BPe + ee} =$   
 $\frac{M^2 \times N}{OR^2 + \frac{2OR \times TR}{TP} e + \frac{TR^2}{TP^2} ee}$ . Unde per methodum ferierum conver-

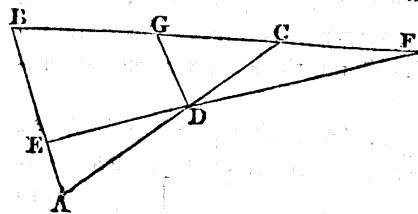


gentium fit,  $SP + \frac{BP}{SP} e + \frac{SB^2}{2SP^3} ee$  &c.  $= \frac{M^2 N}{OR^2} + \frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2 N}{OR^3} e + \frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2 N}{OR^4} ee$   
 &c. Pro datis  $\frac{M^2 N}{OR^2} - SP$ ,  $\frac{2TR}{TP} \times \frac{M^2 N}{OR^3} - BP$ ,  $\frac{3TR^2}{TP^2} \times \frac{M^2 N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3}$  scribe F,  
 $\frac{F}{G}$ ;  $\frac{F}{GH}$ , & signis probe observatis fiet  $F + \frac{F}{G} e + \frac{F}{GH} ee = 0$ , &  $e + \frac{e}{H} =$   
 $-G$ . Hinc, neglecto termino perexiguo  $\frac{e}{H}$ , prodit  $e = -G$ . Si  
 error  $\frac{e}{H}$  non est contemnendus, pone  $-G - \frac{GG}{H} = e$ .

Et notā quòd his insinuat Methodus generalis solvendi difficiliora Problemata tam Trigonometricè quam Arithmetice absque perplexis illis computis & resolutionibus affectarum æquationum quæ hæcenus in usu fuerunt.

### LEMMA II.

*Datas positione tres rectas quartā secare, cujus partes interceptæ datam habeant proportionem ad invicem, quæque transeat per punctum quod in unâ earum datur.*



Dentur positione AB, AC, BC, & in AC detur punctum D. Ipsi AB agatur parallela DG occurrens BC in G; capiatur GF ad BG in datâ illâ ratione,

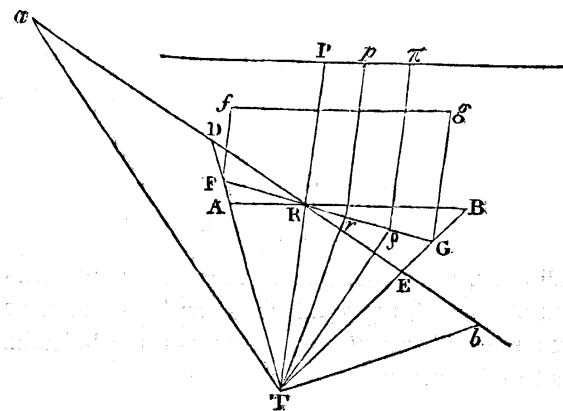
ratione, & agatur FDE: erit FD ad DE ut FG ad BG. Q. E. F.

Trigonometricè sic. In triangulo CGD dantur anguli & latus CD, & inde latera reliqua, & ex datis rationibus dantur lineæ GF & BE.

### LEMMA III.

*Ad datum tempus invenire & graphicè exponere motum horarium Cometæ.*

Ex observationibus probæ fidei dentur tres Longitudines Cometæ. Sunt harum differentiæ ATR, RTB, & requiratur motus horarius ad tempus observationis longitudinis intermediæ TR. Ducatur (per Lemma II.) recta ARB, cujus partes interceptæ AR, RB



sint ut tempora inter observationes. Et si corpus tempore toto totam percurrat lineam AB uniformiter, & interea spectetur de loco T, is erit motus ejus apparens circa punctum R qui fuit Cometæ tempore observationis TR quamproximè.

### Idem accuratius.

Dentur longitudines hinc inde magis distantes  $ta$ ,  $tb$ , & (per Lemma II.) ducatur  $arb$ , cujus partes  $ar$ ,  $rb$  sint ut tempora inter observationes  $atr$ ,  $rtb$ . Secet hæc lineas  $ta$ ,  $tb$ , in D & E; æquoniam error inclinationis  $træ$  crescit quasi in duplicatâ ratione temporis.



Unde, si triangula STP, PTR, jam locentur in eodem plano, dabuntur TR, TP, SP, PR (per Lemma I.) Hæc omnia perago primum graphicè, opere celeri & rudi; dein graphicè majori cum diligentia; ultimò per computationem numeralem. Tum denuò situm linearum  $r\varphi$ ,  $p\pi$ , determino accuratissimè una cum nodis & inclinatione plani  $sp\pi$  ad planum Eclipticum; inque plano illo  $sp\pi$  (per Prop. XVI. Libri I. Princip. Math.) describo Trajectoriam, in quâ corpus movebitur emissum de dato loco P, secundum datam rectam  $p\pi$ , eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem Telluris ut  $p\pi$  ad  $v \times 17$ . Q. E. F.

## P R O B. II.

*Assumptam velocitatis rationem  $\mathcal{C}$  inventam Trajectoriam corrigere.*

Adhibeatur observatio Cometæ sub finem motûs, aliave aliqua quàm longissimè distans ab observationibus prius adhibitis; & radii, qui in illâ observatione ad Cometam ducitur, planique  $sp\pi$  quærat interfectio, ut & locus Cometæ in trajectoriâ ad tempus illius observationis. Si interfectio ista incidit in hunc locum, argumento est Trajectoriam rectè inventam esse. Sin minus, sumendus erit novus numerus  $v$ , & trajectoria nova invenienda; dein locus Cometæ in hac Trajectoriâ, tempore observationis illius probatoriæ, & interfectio radii cum plano Trajectoriæ determinandi ut prius. Et ex variatione erroris, collatâ cum variatione aliarum quantitatum, colligetur, per regulam auream, quantæ debeant esse variationes seu correctiones illarum aliarum quantitatum, ut error evadat quàm minimus. Quibus adhibitis correctionibus, habebitur Trajectoria exactè satis; posito quòd computatio innixa fuit observationibus exactis, quòdque non multum erratum fuit in assumptione quantitatis  $v$ . Nam si multum erratum fuit, iterandum est opus eousque dum Trajectoria inveniatur exactè satis. Q. E. F.

## T H E O R I A L U N Æ.

**O**BSERVATORIUM *Grenovicenſe* occidentalius eſt *Pariſienſi* 2<sup>gr</sup>. 19'; *Uraniburgo* 12<sup>gr</sup>. 51'. 30"; & *Gedano* 18<sup>gr</sup>. 48'. Epoche motus medii Solis et Lunæ.

2. Solis & Lunæ motus medios ab æquinoctio verno, in meridiano *Grenovicenſi*, pono ſequentes: nempe anno 1680, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt 9<sup>gr</sup>. 20<sup>gr</sup>. 34'. 46". Apogæi Solis 3<sup>gr</sup>. 7<sup>gr</sup>. 23'. 30". Motus medius Lunæ 6<sup>gr</sup>. 1<sup>gr</sup>. 35'. 45". Apogæi Lunæ 8<sup>gr</sup>. 4<sup>gr</sup>. 28'. 5". Nodi aſcendentis Orbitæ Lunaris 5<sup>gr</sup>. 24<sup>gr</sup>. 14'. 35". Et anno 1700, *Decembris* die ultimo, *Stylo Juliano*, Meridie, Motus medius Solis eſt 9<sup>gr</sup>. 20<sup>gr</sup>. 43'. 50". Apogæi Solis 3<sup>gr</sup>. 7<sup>gr</sup>. 44'. 30". Motus medius Lunæ 10<sup>gr</sup>. 15<sup>gr</sup>. 19'. 50". Apogæi Lunæ 11<sup>gr</sup>. 8<sup>gr</sup>. 18'. 20". & Nodi aſcendentis 4<sup>gr</sup>. 27<sup>gr</sup>. 24'. 20". Viginti enim annis *Julianis*, ſive diebus 7305, Solis motus eſt 20<sup>rev</sup>. 0<sup>gr</sup>. 0<sup>gr</sup>. 9'. 4". Motus Apogæi Solis 21'. 00". Lunæ Motus eſt 247<sup>rev</sup>. 4<sup>gr</sup>. 13<sup>gr</sup>. 34'. 5". Apogæi Lunaris Motus 2<sup>rev</sup>. 3<sup>gr</sup>. 3<sup>gr</sup>. 50'. 15". Nodi Motus 1<sup>rev</sup>. 0<sup>gr</sup>. 26<sup>gr</sup>. 50'. 15". Omnes prædicti Motus ſunt à puncto æquinoctii verni. Quodd ſi ab illis ſubducatur ipſius æquinoctialis puncti motus, in antecedentia interea factus, ſc. 16'. 40"; manebunt motus reſpectu Fixarum in annis 20 *Julianis*: nempe Motus Solis 19<sup>rev</sup>. 11<sup>gr</sup>. 29<sup>gr</sup>. 52'. 24". Apogæi Solis 4'. 20". Lunæ 247<sup>rev</sup>. 4<sup>gr</sup>. 13<sup>gr</sup>. 17'. 25". Apogæi Lunæ 2<sup>rev</sup>. 3<sup>gr</sup>. 3<sup>gr</sup>. 33'. 35". Nodi Lunæ 1<sup>rev</sup>. 0<sup>gr</sup>. 27<sup>gr</sup>. 6'. 55".

3. Secundum hunc computum Annus Tropicus eſt 365<sup>dier</sup>. 5<sup>hor</sup>. Annus. 48'. 57". Annusque Sidereus 365<sup>dier</sup>. 6<sup>hor</sup>. 9'. 14<sup>1/2</sup>".

4. Motus Medii Luminarium ſuprapoſiti variis afficiuntur inæqualitatibus.

Et

Et primò sunt annuæ æquationes dictorum motuum mediorum Solis & Lunæ, & Apogæi Nodique lunæ.

Æquationes  
Annuæ.

5. Æquatio annua Motûs medii Solis pendet ab excentricitate Orbitæ Telluris circa Solem, quæ est partium  $16\frac{1}{11}$ , qualium mediocris distantia Solis à Terra est 1000; indeque vocatur Æquatio Centri: estque, cum maxima,  $1^{\text{gr}}. 56'. 20''$ .

Maxima æquatio annua motûs medii Lunæ est  $11'. 49''$ ; Apogæi ejus,  $20'$ ; Nodique  $9'. 30''$ .

Atque quatuor iste æquationes annuæ sunt semper sibi mutuo proportionales. Ideoque cum earum aliqua est maxima, tres reliquæ sunt etiam maximæ; diminutæ vero quævis, minuuntur etiam & reliquæ in eadem ratione: unde datâ æquatione annuâ centri Solis, dantur & tres reliquæ annuæ æquationes congruæ; illius igitur Tabula sufficit. Nam si æquatio annua centri Solis, tempori cuius congrua, inde deprompta vocetur  $P$ ; & fiat  $\frac{1}{10}P=Q$ ,  $Q+\frac{1}{30}Q=R$ ,  $\frac{1}{6}P=D$ ,  $D+\frac{1}{30}D=E$ , &  $D-\frac{1}{30}D=2F$ ; erit æquatio annua eidem tempori congrua Lunæ quidem  $R$ ; Apogæi Lunaris,  $E$ ; & Nodi,  $F$ . Adnotandum, si æquatio centri Solis est addenda, æquationem Lunæ prædictam esse subducendam, Apogæi Lunaris æquationem addendam, Nodi verò æquationem subducendam; & è contra, si æquatio centri Solis est subducenda, addenda erit Lunæ æquatio, Apogæi verò subducenda, & Nodi addenda.

Æquatio  
Lunæ Prima.

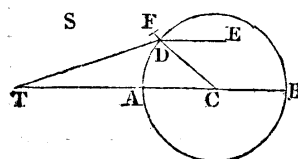
6. Alia est æquatio motûs medii Lunæ, pendens à situ apogæi Lunaris respectu Solis; quæ maxima est, cum apogæum Lunæ versatur in octante cum Sole; & nulla, cum illud ad syzygias vel quadraturas pervenerit. Æquatio hæc, quando maxima, ad  $3'. 56''$  ascendit, Sole in perigæo versante; si verò Sol apogæum teneat, non ultra  $3'. 34''$ . In aliis distantis Solis à Terrâ æquatio hæc maxima est reciproce ut cubus istius distantiae. At cum Lunæ apogæum est extra octantes, æquatio dicta evadit minor; estque ad maximam, positâ eadem distantia Terræ & Solis, ut sinus duplæ distantiae lunaris apogæi à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium. Additur hæc motui Lunæ, dum lunæ Apogæum transit à Solis quadrato ad syzygiam; sed inde subducitur, in transitu Apogæi à syzygiâ ad quadratum.

Æquatio  
Lunæ se-  
cunda.

7. Alia porro est motûs Lunæ æquatio, pendens ab aspectu No-  
dorum

dorum orbitæ lunaris cum Sole: estque maxima, cum nodi in Solis octantibus versantur; evanescitque, cum hi ad syzygias aut aspectum quadratum appellant. Æquatio hæc proportionalis est sinui duplæ distantiae nodi à proximâ syzygiâ aut quadraturâ, cumque maxima ad  $47''$  ascendit. Additur hæc motui Lunæ, dum Nodi transeunt à Solis syzygiis ad ejusdem quadraturas; & subducitur, in eorum transitu à quadraturis ad syzygias.

8. A Solis loco vero aufer motum medium apogæi Lunæ æ-  
quatum, ut suprà est ostensum; residuum erit argumentum an-  
nuum dicti apogæi. Exinde computentur lunæ Excentrici-  
tas & secunda æquatio ejus Apogæi, modo sequenti. Referat  
T Terram; TS, rectam conjungentem Terram & Solem; TACB, rectam à Terrâ ductam ad locum medium Apogæi lunaris, ut  
suprà æquatum; angulus STA, argumentum annuum dicti apo-  
gæi; TA, lunaris orbitæ Excentricitatem minimam; TB, ejusdem  
Excentricitatem maximam. Biseca AB in C; centro C per A de-  
scribe circulum ADB; fiat angulus BCD  
æqualis duplo argumento annuo:  
juncta recta TD erit lunaris orbitæ  
Excentricitas, angulusque BTD erit se-  
cunda Apogæi lunæ æquatio. Ad  
horum determinationem fit mediocris



distantia Lunæ à Terrâ, sive orbitæ lunaris semidiameter, par-  
tium 1000000: ejus maxima excentricitas, TB, erit partium  
66782, & minima TA earundem 43319; adeo ut maxima or-  
bis ejus æquatio, cum sc. apogæum est in syzygiis, sit  $7^{\text{gr}}. 39'. 30''$ ,  
vel forsan  $7^{\text{gr}}. 40'. 00''$  (suspicio enim est hanc mutari pro  
situ apogæi in ☉ vel ☿); cum verò illud in Solis quadrato hæ-  
ret, dicta maxima æquatio sit  $4^{\text{gr}}. 57'. 56''$ ; & ut maxima apo-  
gæi æquatio sit  $12^{\text{gr}}. 15'. 4''$ .

9. Constructâ ex hisce principiis Tabulâ æquationum Apogæi  
lunæ & Excentricitatum ejus orbitæ ad singulos gradus argu-  
menti annui; unde excentricitas TD & angulus BTD (sc. æquatio  
secunda & præcipua apogæi) dato tempori congruentes facile  
possint depromi: ad locum apogæi Lunæ primò æquatum, ut su-  
prâ, addatur æquatio modò inventa, si argumentum annuum  
minus sit  $90^{\text{gr}}$ , aut majus  $180^{\text{gr}}$ , minus verò quàm  $270^{\text{gr}}$ ; secus  
verò

Æquatio  
centri Lunæ.



verò ab eo subducatur : summa vel differentia erit Apogæi lunaris locus secundò æquatus ; quo subducto ex Lunæ loco tertio æquato, relinquitur lunæ Anomalia Media dato tempore congrua. Porro, ex hac anomaliâ Lunæ mediâ & modò inventâ orbis excentricitate habebitur (ope Tabulæ æquationum centri Lunæ ad singulos anomalix mediæ gradus, & aliquot excentricitates *v. g.* 45000, 50000, 55000, 60000 & 65000 fabricatæ) prosthaphæresis sive æquatio centri Lunæ, ut vulgò ; quâ subductâ, in priori anomalix mediæ semicirculo, additâ verò in posteriori, ad locum Lunæ hætenus ter æquatum, prodit Lunæ locus quarto æquatus.

Variatio.

10. Maxima Lunæ variatio, sc. quæ contingit cum Luna est in octantibus Solis, est ferè reciproce ut cubus distantix Solis à Terrâ. Capiatur ea 37'. 25" cum Sol est in Perigæo, & 33'. 4" cum in Apogæo : fiantque Variationis hujus in octantibus differentix reciproce ut differentix cuborum distantiarum Solis à Terrâ, & exinde construatur Tabula prædictæ Variationis lunæ in octantibus Solis (ejusve logarithmi) ad singulos denos vel senos vel quinos gradus Anomalix Mediæ : et pro Variatione extra octantes, fiat ut radius ad finem duplæ distantix Lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ita suprà inventa Variatio in octante ad Variationem dato aspectui congruam ; quæ addita loco Lunæ suprà invento, in primo & tertio quadrante (computando à Sole) aut ab eodem subducta, in secundo & quarto, exhibet Lunæ locum quintò æquatum.

Æquatio  
Lunæ sexta.

11. Rursus, ut radius ad finem summæ distantiarum Lunæ à Sole & Apogæi lunæ ab Apogæo solis (vel finem excessus istius summæ supra 360<sup>gr.</sup>) ita 2'. 10" ad sextam loci Lunæ æquationem ; subducendam, si prædicta summa, vel dictus excessus, minor sit semicirculo ; addendam, si major.

Æquatio  
Lunæ septima.

12. Fiat etiam ut radius ad finem distantix Lunæ à Sole ita 2'. 20" ad æquationem septimam. Hanc aufer, quando Lunæ lumen augetur ; & contra, adde cum illud minuitur ; & prodibit Lunæ locus septimò æquatus, quique est locus ejus in propriâ orbitâ. Notandum æquationem, quæ hîc effertur per mediocrem quantitatem 2'. 20", non esse ejusdem semper magnitudinis, sed augeri & minui pro situ lunaris Apogæi. Nam si apogæum lunare

nare conjunctum fuerit cum Solis apogæo, prædicta æquatio est circiter 54" major ; sin illi oppositum, tantundem minor : libratque inter maximam quantitatem 3'. 14" minimamque 1'. 26". Atque hæc obtinent, ubi Apogæum lunare est in Solis syzygiis ; ubi verò illud in Solis quadrato hæret, minuenda est æquatio prædicta 50 circiter scrupulis secundis ; aut integro scrupulo primo, quando apogæum lunæ & solis apogæum conjuncta sunt ; si verò sunt opposita, propter observationum penuriam affirmare nequeo augendane sit illa, an minuenda. Immo de suprapositis incremento & decremento æquationis 2'. 20", propter observationum fatis accuratarum defectum, certo statuere non ausim.

13. Si æquationes sexta & septima augeantur vel minuantur in ratione reciproca distantix Lunæ à Terrâ, hoc est, in directâ ratione parallaxis horizontalis Lunæ ; accuratiores fient. Atque istud prompte fiet, si prius Tabulæ fuerint constructæ ad singula scrupula dictæ parallaxis, singulosque senos vel quinos gradus cum argumenti æquationis sextæ pro æquatione sextâ, tum distantix Lunæ à Sole pro septimâ.

Emendatio  
æquationum  
sextæ septimæque.

14. A loco Solis vero aufer medium motum Nodi ascendentis Lunæ æquatum, ut suprà ; residuum erit Nodi argumentum annuum ; unde ejus æquatio secunda computabitur modo sequenti. In figurâ præcedente referat ut prius Terram ; *ts*, rectam jungentem Terram & Solem : referat porro *tacb* lineam ductam ad locum Nodi ascendentis lunæ, ut suprà æquatum ; & *sta*, argumentum annuum nodi. Capiatur *ta* ad *ab* ut 56 ad 3, five 18 $\frac{1}{3}$  ad 1. Biseca *ba* in *c* ; & centro *c*, intervallo *ca*, vel *cb*, describe circulum *adb* ; fiatque angulus *bcd* æqualis duplo argumento nodi annuo, ut suprà invento ; eritque *btd* angulus æquatio secunda Nodi ascendentis, addenda in transitu Nodi à Solis quadrato ad syzygiam, subducenda in ejusdem transitu à syzygiâ ad quadraturam. Atque sic habetur locus verus Nodi orbitæ lunaris : unde ex Tabulis, methode vulgari constructis, supputabitur Lunæ latitudo & reductio Lunæ ab orbitâ suâ ad eclipticam, positâ inclinatione orbis lunaris ad planum Eclipticæ 4<sup>gr.</sup> 59'. 35", cum nodi sunt in Solis quadrato ; & 5<sup>gr.</sup> 17'. 20" cum iidem in syzygiis versantur. Ex modò inventis longitudine & latitudine,

Vol. III.

I i

latitudine,

latitudine, & datâ obliquitate eclipticæ  $23^{\text{gr}}. 29'$ , Lunæ ascensio recta & declinatio eruentur.

**Lunæ Parallaxis horizontalis, Motus horarius, et Diameter.** 15. Lunæ in syzygiis, mediocriter distantis à Terrâ, parallaxin horizontalem pono  $57'. 30''$ ; Motum horarium,  $33'. 32''. 32'''$ ; & diametrum apparentem  $31'. 30''$ . In quadraturis verò, mediocriter à Terrâ distantis parallaxin pono  $56'. 40''$ ; Motum horarium,  $32'. 12''. 2'''$ ; & diametrum apparentem  $31'. 3''$ . Lunæ in Solis octante, mediocriter distantis, centrum distat à centro Terræ quasi  $60\frac{2}{3}$  semidiametrorum Terræ.

**Solis Parallaxis horizontalis et diameter. Umbra Atmosphæræ terrestris.** 16. Solis parallaxin horizontalem pono  $10''$ ; &  $32'. 15''$  apparentem ejus diametrum in mediocri distantia à Terrâ.

17. Telluris atmosphæra, refringendo & dissipando Solis lumen, umbram projicit, perinde ac si opaca foret, ad altitudinem minimum 40 aut 50 milliarius geographicorum: (Milliare geographicum appello partem sexagesimam gradus magni circuli in telluris superficie): umbra hæc, in eclipsi lunari in lunam incidens, telluris umbram auctiorem reddit. Et singulis milliariibus atmosphæræ terrestris respondent singula scrupula secunda in lunæ disco. Adeoque umbræ terrestris semidiameter, in Lunæ discum projecta, augenda est 50 circiter secundis; aut, quod eodem recidit, in eclipsi lunari Lunæ parallaxis horizontalis augenda est in ratione circiter 70 ad 69.

## L E C T I O N E S O P T I C Æ

Annis MDCLXIX, MDCLXX & MDCLXXI.

I N

SCHOLIS PUBLICIS CANTABRIGIENSII

EX CATHEDRA LUCASIANA HABITÆ.

I i 2

ARGUMENTA CAPITUM

PARTIS PRIMÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I.	<i>Radiorum diversam esse refrangibilitatem.</i>	Pag. 253
SECT. II.	<i>De Mensurâ Refractionum.</i>	272
SECT. III.	<i>De Planorum Refractionibus.</i>	294
SECT. IV.	<i>De Refractionibus curvarum superficierum.</i>	330

---

# OPTICÆ PARS PRIMA.

## DE RADIORUM LUCIS REFRACTIONIBUS.

---

### SECTIO PRIMA.

#### *Radiorum diversam esse Refrangibilitatem.*

**I**NVENTIO Telescopiorum nupera plerosque Geometras ita exercuit, ut nihil in Opticâ non tritum, nullum inventioni præterea locum aliis reliquisse videantur. Et insuper, cum Disfertationes, quas hîc non ita pridem audivistis, tantâ rerum Opticarum varietate, novarum copiâ, & accuratissimis earundem demonstrationibus fuerint compositæ; frustranei forte videantur conatus & labor inutilis, si ego scientiam hanc iterum tractandam suscepero. Verum cum Geometras in quâdam Lucis proprietate, quæ ad Refractiones spectat, hucusque hallucinantes videam, demonstrationes suas in hypothesi quâdam Physicâ, haud bene stabilitâ, tacite fundantes; non ingratum me facturum judico, si principia scientiæ hujus examini severiori subjiciam; & quæ ego de iis simul excogitavi, & experientiâ multiplici habeo comperta, subnectam iis, quæ Reverendus meus Antecessor hîc <sup>(a)</sup> loci postrema dixit.

(\*) BARTHOLOMÆUS.

Radiorum  
diversa

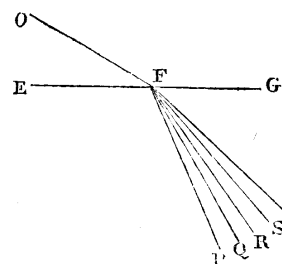
Imaginantur Dioptricēs studiosi, quòd Perspicilla ad quemlibet perfectionis gradum perducì possent, modò vitris, dum perpoliuntur, geometricam, quam vellent, figuram communicare concederetur; & in eum finem Instrumenta varia fuere excogitata, quibus vitra in figuras Hyperbolicas, vel etiam Parabolicas, contererentur. Sed exacta istarum figurarum fabricatio nemini hucusque successit: scilicet aratur litus, & ne labores suos in negotio desperato diutius infumant, iis polliceri audeo, quòd, licet omnia fierent feliciter, nihil minùs tamen quàm votis suis responderent. Etenim vitra, licet efformentur secundum figuras in istum finem optimas, quæ possunt excogitari, tamen non duplo plus præstabunt, quàm sphaericæ æquali politurâ perfectæ. Hæc autem non ideo loquor, quasi peccatum esse à scriptoribus Opticēs contenderem; illi enim omnia, pro intentione demonstrationum suarum accuratè quidem & verissimè dixerunt; sed aliquid tamen, idque maximi momenti, reliquerunt posteris inveniendum; scilicet in refractionibus irregularitatem quandam reperio, quæ omnia perturbat; & non solum efficit, ut figuræ conicarum sectionum sphaericas non multum superent, sed etiam ut sphaericæ multo minùs præstent, quàm præstarent, si dicta refractionis effectus uniformis.

Itaque in Dioptricâ pedem figo, non ut eam pertractarem de integro, sed tantum ut hanc de naturâ Lucis proprietatem rimarer primò; deinde ut ostenderem, quantum ex hac proprietate perfectio Dioptricēs impeditur; & quo pacto incommodum istud, quatenus natura rei finit, devitetur. Ubi & nonnulla proferam, quæ ad Telescopiorum juxtâ & Microscopiorum tum Theoriam tum Praxin spectant; ostendens, quòd Opticēs summa perfectio, præter opinionem receptam, ex Dioptricâ & Catoptricâ mixtis petenda est. Ac interea discrimen Colorum, & eorum genesin à prismatibus, & corporibus etiam coloratis, fuscè explicabo.

Quòd omnium Radiorum non sit eadem Refrangibilitas.

2. De Luce itaque compertum habeo, quòd Radii ejus, quoad quantitatem refractionis, ab invicem differant. Ex iis, qui omnes habent eundem angulum incidentiæ, alii angulum refractionis aliquanto majorem, alii minorem habebunt. Plenioris illustrationis gratiâ, sit EFG superficies quælibet refringens, puta vitrea;

trea; & ducatur quævis OF huic occurrens in F, & cum eâ efficiens angulum OFE acutum. Concipe etiam radios solares per istam lineam OF sibi continuò successivos fluere, ita ut alii post alios in punctum F impingant, ibidemque in medium densius refringantur; vel si mavis, finge parallelos radios indefinitè parum distare ab OF, & incidere in puncta ipsi F vicinissima. Jam ex opinione receptâ, hi radii, eandem habentes incidentiam, eandem quoque refractionem omnes habere debent; puta in lineam FR. At contrarium compertum habeo; scilicet, quòd postquam refringuntur, divergant ab invicem; quasi quidam refringerentur in lineam FP; alii in lineam FQ; & alii in lineas FR, FS, & FT; ac alii etiam innumeri per spatia intermedia; ut & ultra citraque nonnulli pervagantes, prout radius quilibet ad refractionem majorem minoremve patendum sit aptus. Invenio præterea, quòd Radii FP maximè refracti colores Purpureos producant; & illi FT minimè refracti Rubros; qui autem hisce intermedii, FQ, FR, FS, pergunt, colores intermedios; nempe Cæruleos, Virides & Flavos generant: & sic Radii, prout apti sunt, ut alii aliis magis atque magis refringantur, hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum, & Purpureum generant, unâ cum omnibus intermediis, quos in Iride liceat conspicerè; unde productio colorum Prismatis & Iridis facile patebit. Sed his jam perfunctoriè notatis, quæ de Coloribus dicenda sunt, in posterum differam.



Refrangibilitas.

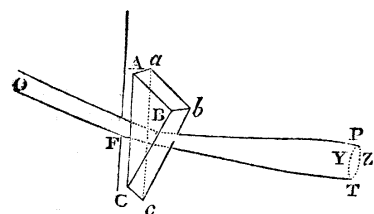
Probatur experimento vulgari per longitudinem imaginis solaris refractæ.

### EXPER. I.

3. Sententiâ nostrâ de hac re sic breviter explicatâ, ne putetis fabulas pro veris enarratas esse, rationes & experimenta, quibus isthæc innituntur, continuò proferam. Et quoniam experimentum quoddam Prismatis valde obvium mihi primò dedit occasionem excogitandi reliqua, istum primum explicabo. Sit F foramen aliquod in pariete vel fenestrâ cubiculi, per quod radii solares OF trajiciantur; reliquis ubique foraminibus diligenter obturatis,

Radium  
diversa

turatis, ne lux alibi ingrediatur. Ista autem obscuratio cubiculi non est prorsus necessaria, sed efficit tantum, ut experimentum



evadat aliquanto evidentius. Deinde Prisma triangulare vitreum,  $AABbCc$ , ad foramen istud applicetur; quod radios,  $OF$ , per se trajectos, refringat versus  $PYZ$ ; quos radios opposito pariete, vel papyro aliquâ, ad distantiam à Primate satis magnam, objectâ, terminatos videbis in figuram  $PYZ$ , cujus nempe longitudo  $PT$  sit quadruplex latitudinis  $YZ$ , & amplius. Et hinc evinci certo videtur, quod radiorum, æqualiter incidentium, alii majorem aliis refractionem patiuntur. Nam si contrarium esset verum, prædicta Solis imago appareret ferè orbicularis, & in quâdam positione Prismatis ad sensum orbicularis conspiceretur; id quod contra omnem experientiam est. Quocunque enim situ Prisma disposui, nunquam tamen potui efficere, quin longitudo imaginis esset latitudinis plusquam quadrupla; angulo scilicet prismatis  $ACB$ , vel  $acb$ , existente graduum plus minus sexaginta.

Casus in quo  
radii æque  
refrangibiles  
faciunt ima-  
ginem orbi-  
cularem.

4. Quod autem datur quædam Prismatis positio, in quâ Imago Solis, ex opinione de refractionibus receptâ, appareret orbicularis, sic ostendo. Juxta foramen, in fenestrâ cubiculi factum, Prisma collocetur foras; vel, quod eodem recidit, sit  $EG$  (vid. Tab. fig. 1.) corpus aliquod opacum, citra Prisma locatum, in quo sit  $r$  foramen indefinitè parvum & orbiculare; per quod radii refracti, in parietem directè oppositum, ad imaginem  $PYZ$  ibi depingendam, trajiciantur: & ponatur  $ABC$  esse planum secans  $Aacc$ ,  $Bbcc$  plana refringentia perpendiculariter, atque etiam transiens per foramen  $F$ , ut & per centrum Solis  $DIHV$ , quem bisecet secundum diametrum ejus  $DH$ , à cujus extremitatibus radii  $DK$  &  $HN$ , in eodem plano jacentes, adveniant; qui postquam refringuntur ( $DK$  in  $Kn$  &  $nT$ , atque  $HN$  in  $Nk$  &  $kP$ ) utrinque pergant per centrum foraminis  $F$ ; & præterea sit talis inclinatio prismatis ad istos radios, ut anguli  $AKD$  &  $BkF$  fiant æquales. Deinde sit  $IV$  alia Solis diameter, prædicto plano  $ABC$  perpendicularis; à cu-

jus extremitatibus alii duo radii,  $VL$  &  $IM$ , adveniant; alter  $IM$  Refrangibilis. cis planum  $ABC$ , qui refringatur in  $Ml$  &  $ly$ ; alter verò  $VL$  ultra planum istud, qui refringatur in  $Lm$  &  $mz$ : & prædicti quatuor radii sese omnes decussent in medio foraminis  $F$ . Denique ponatur, quod imago lucida  $PYZ$  foramen directè respiciat, ita scilicet ut  $FP$  &  $FT$ , item  $FY$  &  $FZ$ , æquales fiant. Dico jam, quod in istâ positione prismatis, anguli  $PFT$  ac  $YFZ$  æquales essent, supposito radios omnes æquè refringi, qui eundem habent angulum incidentiæ; & proinde quod imago ista sensui saltem deberet esse orbicularis; utpote cujus diametri  $PT$  &  $YZ$  sese decussant perperpendiculariter, & æquales istos angulos subtendunt.

5. Angulos autem istos  $PFT$  &  $YFZ$  æquales esse, sic demonstro. Demonstratio casus istius. Pars I. Concipe radium aliquem à  $P$  per  $k$  &  $N$  retrocedere, dum alius radius pergit à  $D$  per  $K$  &  $n$ ; itaque, cum anguli  $AKD$  &  $BkF$  supponantur æquales, erunt etiam anguli per primas refractiones facti,  $AKN$  &  $BkN$ , æquales; unde triangula  $CKN$  &  $CkN$  erunt similia, & eorum anguli externi  $kNA$ ,  $kNB$  æquales; & proinde anguli per secundas refractiones facti  $ANH$  &  $BnF$  sunt æquales. Quare, cum anguli  $AKD$  &  $BkF$ , item  $ANH$  &  $BnF$  sint æquales, eorum differentiæ erunt etiam æquales; hoc est, angulus  $nPk$  sive  $PFT$  æqualis angulo, quem radii  $DK$  &  $HN$  comprehendunt, sive diametro solari. Quare, cum demonstratum fuerit, quod angulus  $YFZ$  æquatur eidem diametro, liquebit propositum. Istud autem ut fiat, Theorema quoddam, more Lemmatis, præsternendum est.

6. Sint duo plana  $ABCD$  &  $EFGH$  (fig. p. 258) fibimet perpendicularia, quorum communis intersectio sit  $KL$ ; & sit  $IP$  radius quilibet, qui, in planum  $ABCD$  incidens ad punctum  $P$ , ab eo refringitur in  $PR$ ; dico, quod sinus anguli, quem radius incidens,  $IP$ , efficit cum plano perpendiculari  $FH$ , sit ad sinum anguli, quem radius refractus,  $PR$ , efficit cum eodem plano, sicut sinus incidentiæ ad sinum refractionis, & proinde in ratione datâ. Sumptis enim radiis  $IP$  &  $PR$  æqualibus, & demissis  $IQ$  &  $RV$  ad planum  $FH$  perpendicularibus; & præterea ad punctum incidentiæ  $P$  erectâ  $SPT$  perpendiculari ad planum refringens  $BD$  (quæ ideo cum altero plano  $FH$  coincidet) & ad istam demissis  $IS$  &  $RT$  iterum perpendicularibus; Lemma ad secundam partem demonstrationis.



cum propter isoscelea triangula  $PFT$  &  $YFZ$ , sit  $FP.FY :: PT.YZ$ , atque  $FP$  &  $FY$  sint quam proxime æquales, tantilla erit inter  $PT$  &  $YZ$  differentia, ut quoad sensum pro æqualibus haberi possint.

In isto tamen casu longitududo imaginis plusquam quadruplex est latitudinis. Unde varia refrangibilitas evincitur.

8. Ostensus itaque casus est, in quo longitudo solaris imaginis, per prisma trajectæ, conspiceretur æqualis ejusdem latitudini, & proinde in quo imago ista quasi orbicularis appareret, modò vera esset opinio vulgaris. Quinimo, licet positio prismatis alia sit, atque descripsi, modò radii utrinque refractionem non valde inæqualem patiantur, figura tamen imaginis eapropter vix immutabitur: nec multum interest, an corpus opacum  $EG$ , foramine  $F$  ad radios transmittendos terebratum, citra prisma collocetur vel ultra; neque figura foraminis multum curanda est, modò sit exigua. Etenim tam parvæ variationes haud plus mutabunt imaginem, quam decimâ forte vel quintâ parte diametri suæ; sicut cogitanti patebit. Atque ita, ut paucis tandem comprehendam omnia, liquet, quòd imago Solis refracta ut plurimum deberet esse sensui quasi orbicularis; si modò ejusdem incidentiæ in idem Medium refractione semper foret eadem. Sed prius repugnat Experimentiæ, longitudine scilicet ejus latitudinem plusquam quatuor vicibus, ut dictum fuit, excedente. Ergo posterius repugnat Veritati, & ejusdem Incidentiæ Refractio est varia.

Ejusdem rei demonstratio brevior.

9. Ex eodem experimento potui propositum sic brevius indicasse; nempe, cum ita disposuisssem Prisma, ut refractione radiorum tum ingredientium tum egredientium foret quasi æqualis, angulos  $PFT$  &  $YFZ$  (fig. 1. Tab.) dimensus sum; & inveni quidem angulum  $YFZ$  semissi gradus, sive diametro Solis, æqualem. At angulus  $PFT$  eandem diametrum quater & amplius superavit, cui tamen æqualis esse debuisset ex parte priori præcedentis demonstrationis; & inde planissime liquet propositum. Verum in eorum gratiam, quæ mox sequentur, oporteret demonstrasse, quod illi radii, quorum refrangibilitas non est dispar, efformabunt imaginem fere orbicularem; & eâ de re mihi visum fuit demonstrationem istam etiam si longiusculam, in illustrationem hujus Experimenti, hic adduxisse.

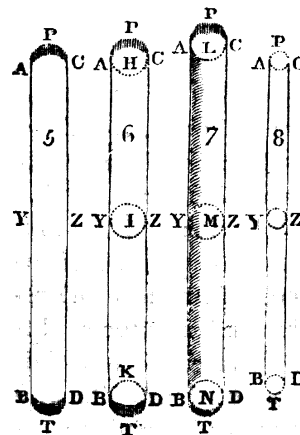
Quo pacto prisma facile statui potest in situ ad ex-

10. Verum, cum in experiendis prædictis eam esse positionem prismatis supposuerim, ut Radii ad utramque faciem prismatis æqualiter refringantur; conclusionis loco, dicam, quâ ratione istud

citò

citò fiat & facile. Si prisma teneatur in luce solari, & motu lento circa axem suum convertatur, videbis colores, quos efficit, de loco in locum continuo motu translatos esse, ita quidem ut aliquando progredi, deinde verò regredi videantur. Observabis itaque medium inter istos contrarios motus, quando colores modò progressi, & statim regressuri, videntur quiescere; quod ubi vides, siste prisma, idque in isto situ fige. Dico factum. Scilicet in eo situ summa refractionum utrobique factarum, sive radii Emergentis ad Incidentem inclinatio, evadit omnium minima\*. Quod cum accidit, refractiones utrobique sunt æquales; uti posthac demonstrabitur.

11. Cæterum Experimenti hujus varias circumstantias, non minus jucundas experiendi, quam propositi nostri indicativas, prosequi jam animus est. Et primum notandum venit, quòd Imaginis istius figura, secundum longitudinem suam lineis rectis terminata fuit, & secundum latitudinem duobus (ut est.



ex visu potui judicare) semicirculis. In figura 5<sup>ta</sup>. sit  $PT$  imago solis prismate refracta; hanc observabam ad latera duabus lineis,  $AB$  &  $CD$ , quoad sensum rectis & sibi parallelis, terminari; ad extremitates autem, duobus semicirculis  $APC$  &  $BDT$ ; cujus quidem eventus causa ex præmonstratis sic determinatur.

12. Semicirculi illi terminantes in circulos compleantur, ut vides in figura sexta, & alius inscribatur circulus,  $YZ$ , istis intermediis. Jam concipe radios quosdam à Sole provenientes, qui apti sunt, ut æqualiter incidentes etiam æqualiter refringantur. Illi per Prisma trajecti, ex supra demonstratis, imaginem quoad sensum (si sola posset videri) circulem depingent, puta  $BD$ . Deinde concipe alios ejusdem Solis radios, sibi etiam conformes, qui apti sunt ut prioribus paulo magis refringantur; illi itaque aliam imaginem depingent circulem, puta  $YZ$ . Et alios etiam radios adhuc ma-

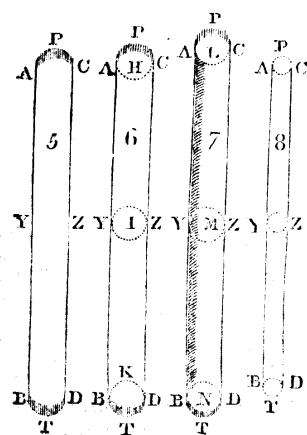
\* Lege maxima. Vid. Sect. III. Prop. xxv.

gis



Radiatorum  
diversa

gis refrangibiles concipe, qui tertiam circularem imaginem AC efficiunt. Denique alios innumeros cogita, prædictis plus & minus refrangibiles; & illi alias etiam innumeras circulares imagines, prioribus tum intermediis tum extremas, efformabunt, illu-



minantes oblongum spatium PYTZ, rectis lineis, AB & CD, duobusque semicirculis contentum. Verum, cum imagines illæ sint omnes ejusdem pene magnitudinis, & inter lineas AB & CD in directum dispositæ, istæ lineæ AB & CD pro rectis sibi parallelis haberi possunt, & ad sensum tales videbuntur; & sic totum spatium PYTZ, radiis ex eadem incidentiâ variè refractis illuminatum, partim parallelis rectis & partim semicirculis oppositis terminabitur; sicut Experimentiâ compertum est.

Exinde deducitur Experimentum, quo termini recti tiant distinctissimi.

13. Hanc autem conjecturam ut penitus probarem, cogitabam de imagine Solis per foramen aliquod sine ullâ refractione ad distantiam magnam trajectâ; scilicet quod male definitur, termino existente inter lucem & tenebras minimè distincto: at si radii isti per lentem convexam transeant, cujus focus ad imaginem est, imago terminabitur distinctissime. Simili modo de radiis æquè refrangibilibus intellexi, quod, si per Prisma trajicerentur ad distantiam magnam, depingerent imaginem circularem malè definitam; cujus tamen terminus, mediante lente convexâ, distinctissimus evaderet. Itaque, cum vidissem terminos imaginis refractæ PYTZ non admodum distinctos; de imaginibus BD, YZ, AC & reliquis circularibus, oblongam istam formantibus, conjiciebam, quod multo distinctius terminarentur per lentem convexam trajectæ quàm aliter; & experiendi res patuit. Nam rectas AB & CD, in quas imagines omnes istæ circulares utrinque terminantur, vidi admodum distinctas, quas antea confusas videram.

Quare termini circulares semper apparent confusi.

14. Sed, quod notatu valde dignum videtur, termini circulares, APC & BTD, imaginis illius semper apparere maximè confusi, luce paulatim deficiente donec tandem in tenebras desit.

Scilicet

Scilicet intermedii circuli, ut YZ, miscentur aliis circulis utrinque cadentibus; quibuscum ex aliquâ sui parte coincidunt. At extremi quidem circuli, AC & BD, ex unâ tantum parte cum aliis concurrunt; & eorum concursus continuò fit rarior, & exinde lux usque remissior, dum ad extremitates P ac T deventum est. Sed & alia prodit istius rei causa; scilicet quod radorum maxima copia apta sit, ut mediocrem refractionem patiatur, & sic in medium imaginis incadat; & quod eorum numerus continuò minor existat, quibus competit gradus refrangibilitatis alterutrinque magis extremus.

15. Cæterum ad isthæc experienda lentes adhiberi vellèm, quarum foci sunt longinqui, sex fortè vel duodecim pedibus à lentibus distantes, modò tales præsto sint: saltem non sint minus distantes quàm duobus. Atque etiam latera prismatis debent esse accuratè plana; sin latera ejus sint aliquatenus convexa, tum præstat adhibere lentem, cujus focus ad pedes tantum duos vel tres à se remotus est. Quibus paratis, lentem Prismati ex utrâvis parte colloca vicinam; ita scilicet ut radios, per se trajectos, directè respiciat. Deinde radii in papyrum aliquam excipiantur, quam ultro citroque tranfer, donec imaginem coloratam utrinque rectis parallelis distinctissime terminatam videas.

16. Sed observandum est, quod, cum Prisma collocatur ultra foramen F (ut in Tab. fig. 1.) vel ipsi quàm proximè citra, & lens magis distat ab isto foramine, quàm focus lentis, quem radii in eam parallelos incidentès efficerent, distat à lente; duplicem invenies casum, in quo imago in papyrum projecta evadet distincta: alter, quando radii omnes homogenei, qui in lentem paralleli incidunt, ita refringuntur, ut ad papyrum istam in eodem puncto concurrant; quod fit, quando vides imaginem coloratam oblongam, & parallelis rectis distinctè terminatam: alter casus est, quando radii omnes homogenei ab uno puncto foraminis F divergentes, postquam à lente refringuntur, ad unum iterum punctum distæ papyri convergunt. Id autem accidit, cum imaginem albam, orbicularem, & undique benè definitam vides. De quo fusè dicetur alibi. Sufficeat hoc monitum hîc dedisse, ne quis propriis oculis hæc experturus, per ambiguitatem effectus incautè decipiatur, & exinde prædicta in dubium revocet.

17. Juvat

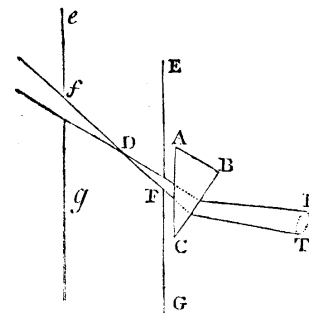
Ac de um-  
bris nebula-  
rum solem  
interceden-  
tium.

17. Juvat annotare præterea, quod nebulae aliquæ tenuiores interceperunt discum Solis, eum non penitus obscurantes, & umbras in hanc imaginem PT projecerunt non sui similes, sed in longum protensas, & imaginis terminis rectilineis parallelas. Id quod ratiociniis modò allatis accuratè convenit. Nam concipe nebulam aliquam in disco Solis ad instar maculae conspicuam esse; & ea, si radii maximè refrangibiles circuloque AC (fig. 7.) circumscripti spectentur, umbram projiciat in locum L, ita ut circulus AC cum umbrâ L discum Solis, nebula deficientem, referat. Quo posito, si radii minimè refrangibiles circuloque BD circumscripti spectentur, umbra nebulae ab iis projicietur in locum N, cujus talis erit situs in circulo BD, qualis est ipsius L in circulo AC; quippe hic etiam discum solis, nebula deficientem, refert. Atque idem porro discursus de circulo quolibet intermedio cum umbrellâ ejus M intelligatur; adeo ut propter indefinitam multitudinem circulorum, spatium integrum ABDC occupantium, nebula suas umbras per totam longitudinem LN dispergat, eamque reddat obscuram; & sic, cum plures nebulae, vel nubium sinus, Soli interveniant, imago ejus plurimis umbris in longum diffusis & parallelis obscurabitur.

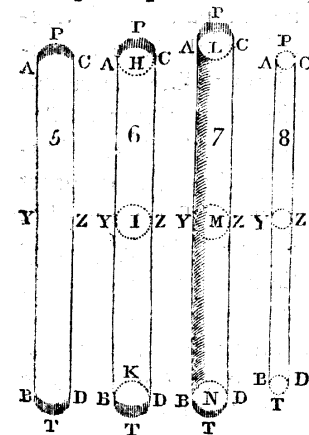
## E X P E R. II.

Ab imaginis  
figurâ aliud  
etiam experi-  
mentum  
deducitur,  
quo fiat mul-  
tum oblon-  
gior.

18. Ut dictas proprietates Lucis, quâ potui diligentia, perscrutarer, sequentem præterea modum excogitavi, quo illas examini subjicerem. Nempe (in fig. 6.) cum magnitudo circulorum AC, YZ, BD dependeat à magnitudine solari, si diameter Solis fieret aliquanto minor, quàm nunc reverâ existit, tum illi etiam circuli fierent minores, distantia centrorum H, I, K, non omnino mutata, ut videre est in fig. 8. Et sic latitudo imaginis, ad ejusdem longitudinem comparata, multo minor evaderet quàm antea, utraque scilicet per eandem quantitatem diminuta. Hæc probaturus effeci, ut radii Solis per duo parva foramina, ab invicem longè distantia, transirent, antequam inciderent Prismati; quo pacto radii ab extremis partibus Solis venientes excluderentur, & res perinde succedit, quasi diameter Solis reverâ esset diminuta. Illustrationis gratiâ, sit *efg* fenestra, parvo foramine *f* penetrantur; unde radii solares cubiculum, aliâs obscuratum, ingrediantur;



diantur; deinde sit EFG corpus aliquod opacum perforatum ad F, & in medio cubiculo ita locatum, ut radii iterum permeent foramen istud, antequam Prisma ABC, ponè locatum, attingant. Jam foraminum istorum diametro existente  $\frac{1}{8}$  digiti, & eorundem distantia, *fF*, 12 pedibus (ita scilicet ut maxima radorum, utrumque foramen permeantium, inclinatio foret angulus ferè minorum 6, hoc est, quasi quinta pars diametri solaris) atque etiam imagine PT projectâ in papyrum, decem pedes à Prismate distantem, prout angustia cubiculi tulit: inveni longitudinem imaginis esse plusquam quatuor digitorum cum semisse, & latitudinem trientis digiti; hoc est longitudinem plusquam quatuordecim vicibus majorem latitudine, sicut ex prædictis oportet evenisse. Etenim cum isti tantum radii mittuntur intro, qui minus quàm quintâ parte solaris diametri ad se invicem inclinantur, diametri AC, YZ & BD diminutæ diametro foraminis F, debent esse quintuplo minores quàm secundum priora contingeret; ut



videre est in fig. 6 & 7. quasi à Sole essent effectæ, cujus diameter sit quinque minor diametro Solis nostri. Verum, si corpus opacum *fg* tolleretur, ut radii per unum solummodo foramen F ad Prisma transirent, sicut in prioribus factum est, latitudo imaginis evaderet  $1\frac{1}{6}$  digitorum, & longitudo plusquam 5 dig. angulo nempe Prismatis existente 60 grad. vel paulo majori. Itaque diameter circulorum, AC, YZ & BD, qui eo, quo dictum est modo, imaginem constituunt, esset  $1\frac{1}{6}$  dig. à quâ subducatur diameter foraminis, nempe  $\frac{1}{8}$  dig. & manebit  $1\frac{1}{24}$  dig. cujus quintæ parti rursus adjungatur eadem foraminis diameter sive  $\frac{1}{8}$  dig. & prodibit  $\frac{1}{3}$  dig. diameter circulorum AC, YZ, & BD in fig. 8. quæ minor est quàm diameter circulorum istorum in fig. 6. quantitate

Radium  
diversa

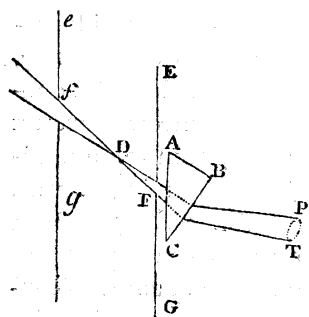
$\frac{1}{2}$  dig. Quamobrem figura 8 quaquaversum est minor quàm sexta, quantitate  $\frac{1}{2}$  dig. Atque ideo longitudo ejus fit plusquam 4 dig. latitudo autem digiti triens. Id quod cum experientiâ modò recensitâ quadrat. Ad eundem modum, si foramina  $f$  &  $F$  adhuc minora forent, vel si distantia  $fF$  foret major, imago  $PT$  oblongior evaderet. Quod idem quoque quadantenus contingeret, ex imagine  $PT$  à Prismate longius diffitâ. Cæterum notandum est, quòd foramina  $f$  &  $F$  ad radios directè respicientia supponam; licet non multum refert, an situs eorum sit parum obliquus, ut in appositâ figurâ nonâ factum est.

Experimen-  
tum istud  
promovetur.

19. Porro si in hoc experimento convexam lentem ut priùs adhibueris, cujus focus ad imaginem cadit, foramine  $F$  (si placet)

dilatato, vel opaco corpore  $EG$  prorsus ablato, ut radii per foramen longinquum  $f$  solummodo transeant, &, si foramen istud  $f$  effeceris angustius quàm antea, cæteris ut priùs stantibus; imaginem valdè oblongam, &, pro longitudine, lucidiorem videbis quàm in casu priori. Exempli gratiâ, si diameter foraminis sit pars digiti vigesima, & si pedibus ab inde duode-

cim prisma cum lente disposueris, videbis longitudinem imaginis plusquam octoginta vel centum vicibus latitudine majorem. Sed in his experiendis oportet cubiculum quaquaversus benè obturatum esse; ne lux alibi quàm per foramen  $f$  ingressa perturbet imaginem, & juxta circulares ejus extremitates obscuram reddat: et præterea, si superficies Prismatis sint accuratè planæ, præstat adhibere lentem, quæ focum ad distantiam magnam projicit; puta ad 12 vel 20 pedes, modò loci amplitudo finat, quo pacto de proportionibus imaginis melius judicium proferas. Quòd si latera Prismatis sint aliquantulum convexa, ut iis nonnunquam contingit, quæ vulgò venduntur, licebit istud absque ullâ lente solum adhibere; & ejus convexitas radios, vice lentis, ad magnam distantiam congregabit. Quinimo, si cum Prismate quolibet lentem parvam adhibeas, cujus focus non sit duobus tribusve pedibus longinquior, imaginem conspicias fatis longam quidem, sed



sed cujus latitudo haud sensibilis existit. Id quod proposito nostro non minùs infervit, quàm si posses de proportionem longitudinis ad latitudinem ejus accuratè judicare. In istis etiam experiendis notetur præterea, quòd lens non debet ita longè post Prisma locari, quin posset ad omnes radios simul transmittendos extendi, ne imaginem successivè per partes tantum observare sis coactus: et notetur denique, quòd si foramen  $F$  citra Prisma locaveris, & lentem deinceps citra foramen istud, ad distantiam majorem ab eo quàm focus radiorum, à foramine  $f$  longinquiori manantium, abest à lente; duplex erit casus, in quo imago in papyrum projecta conspicietur distincta: prout radii venientes à singulis punctis foraminis  $F$ , aut à singulis punctis foraminis  $f$ , in totidem itidem punctis papyri colliguntur. In uno casu imago erit alba & orbicularis, ut prius (§ 16) commonui, in alterâ autem oblonga & colorata, sicut præsens experimentum exigit.

20. Jam liquet ex præfatis, quòd imaginis  $PT$  latitudo semper evadit eo minor, quo foramen longinquum  $f$  factum est angustius; ut nihil dubitandum sit, quin dicta latitudo prorsus evanesceret, si vice foraminis istius translucidi unum duntaxat punctum ibi lucidissimum existeret: atque istud sic futurum esse confirmatur ex observatione non dissimili, quam habui quondam de stellâ Veneris. Cubiculo nempe quaquaversus obturato, excepto foramine paulo plusquam duos digitos lato, ut tenebrosissimum efficeretur: in isto foramine vitrum objectivum Perspicilli septempedalis collocavi; latitudine ejus, ad sufficientem radiorum copiam transmittendam, duos digitos & amplius apertâ. Deinde ad distantiam septem pedum papyro transversè positâ, in eam vidi sideris imaginem ad instar puncti lucidi projectam; & interposito Prismate ad distantiam pedis unius duorumve ab istâ papyro, per quod radii trajecti aliò refringerentur: pro puncto illo lucido ad distantiam inde plusquam pedalem, vidi lineolam, licet non valdè lucidam, facilè tamen conspicuam, & cujus longitudo semissem digiti superavit, latitudo autem fuit quoad sensum nulla, saltem haud major quàm ut sentiretur. Atque idem credo de stellis primæ magnitudinis, uti de Sirio liceat observare; præsertim si lens adhibeatur quatuor vel sex digitos lata, ut plures radios transmittat.

Magis adhuc  
promovetur  
per imagi-  
nem stellæ  
Veneris;

& applicatur  
descriptioni  
refractionis  
ad fig. 1.  
traditæ.

21. Hoc experimentum, quàm benè convenit cum explicatione nostrâ, quam de Refractione radiorum, ad eundem angulum incidentium variâ, sub initio dedi, operæ pretium videatur adnotare. In figurâ pag. 255, supposui complures radios per eandem rectam in superficiem aliquam refringentem successivè delatos esse, ibidemque alios aliis paulo magis gradatim refringi. Quod si fieri concipiatur, abundè sequeretur, quòd radii sic refracti, si corpore deinceps opaco quovis, ut papyro, interciperentur, lineolam ibi lucidam depingerent. Jam licet radii à stellâ aliquâ venientes non omnes in eâdem rectâ pergant, tamen, quod tantundem est, pro parallelis haberi possunt; & quòd à lente convexâ effecti sunt convergentes, antequam attingant Prisma, hoc adeo non destruit analogiam, ut eam maximè confirmet. Etenim pro singulis in eâdem rectâ pergentibus, debes tantum concipere tot radiorum penicillos, qui omnes habeant eundem axem, & idem punctum concursus; & quòd istorum penicillorum alii magis aliis à Prisma refringuntur, ita ut eorum puncta concursus, sive foci, qui prius coincidere, jam singuli cadant seorsim, lineam rectam conficientes. Ac proinde, quòd axes penicillorum, qui radiis puta successivis, eousque coincidebant, donec attigere Prisma, ibi per variam refractionem sint effecti divergentes; ut ad focus penicillorum, in lineâ rectâ jacentes, pergant.

Circumstan-  
tia variata  
eidem de-  
scriptioni  
rursus appli-  
catur.

22. Si Prisma stellæ Veneris vicinior quàm lentem collocaveris, ut radii per illud trajiciantur primò, & à lente deinde convergentes fiant, eandem lineolam ut prius videbis, licet minùs conspicuam & inventu difficilliozem. Jam in hoc specimine, cum radii omnes adveniant paralleli, si æqualiter refringerentur transeuntes prisma, manerent postea paralleli, usque dum lenti incidere, & in eâ proinde sic refringerentur, ut omnes deinceps ad idem punctum pergerent, & sic punctum lucidum conspiceretur. Quare, cum vice puncti istius apparet linea, concludendum est, quòd omnes radii non æqualiter refringuntur.

Quod in ad-  
ductis expe-  
rimentis re-  
fractiones  
non casu fi-  
unt inæqua-  
les, neque  
aliâ causâ

23. Si jam objiciat aliquis, quòd in refractionibus quidem detur irregularitas, sed eam esse contingentem, & non ex præviâ radiorum dispositione, vel ullis certis legibus ortam; respondeo, quòd imago Solis præfata, si radiis nullâ certâ lege refractis fieret oblonga, non posset in lineas rectas secundum longitudinem suam distinctè

distinctè terminari, sicut ad figuram quintam ostensum est. Quin- quam inæ-  
etiam non omnino deberet esse oblonga, sed parte ejus mediâ & quali refran-  
magis splendidâ in morem orbis effingi; sensibilibique termino dis-  
tingui ab erraticâ luce debiliori quaquaversum dispersâ: perinde  
ut Sol apparet, cum nubibus penè obscuratur; vel ut ejus imago  
cernitur, cum trajicitur per laminam vitream parallelis planis ter-  
minatam, & halitu vel fumo levitur obductam, ut lux inter re-  
fringendum paululum conturbetur. Adhæc, si duo Prismata si-  
milia ABC & abc (vid. Tab. fig. 2.) juxtâ ponantur, secundum  
longitudines suas parallela, cum lateribus planis AC & ac, ut &  
BC & bc parallelis; & si Sol transeat utrumque in locum z, ubi  
corpus opacum luci directè opponitur, radiis tamen ejus per orbi-  
culare foramen F prius trajectis: lux incidens in dictum z ap-  
parebit distinctè orbicularis, non secus quàm si directè tenderet ab  
F, prismatibus non omnino interpositis. Fatendum est itaque,  
quòd utriusque Prismatis conjunctim refractiones sunt regulares,  
& proinde etiam refractiones alterutrius. Scilicet radii illi simili-  
ter incidentes, non omnes æquè refringuntur in primo prisma-  
te ABC, ut neque in secundo abc; tamen cum ea refractionis inæ-  
qualitas non contingens sit, sed oriatur ex præviâ radiorum dis-  
positione; ideo licet varii radii variè refringuntur, tamen ejusdem  
radii eadem erit refractionis quantitas in utroque Prismate, & quan-  
tum incurvatur à priori ABC, tantum recurvabitur à posteriori  
abc; unde radius quilibet, utcunque sit refrangibilis, postquam  
ex utroque Prismate emerferit, sibi met ipsi, cum nondum iis in-  
ciderat, fiet parallelus. Atque ideo, cum omnes ad easdem pla-  
gas tendant, ad quas liberè tenderent, si Prismatibus non interci-  
perentur; necesse est, ut eandem orbicularem imaginem ad z ex-  
hibeant, quàm illuc liberè tendentes exhiberent. Quòd si imago  
oblonga, per refractionem unci Prismatis (ut dictum est) effecta,  
figuram suam à radiis nullâ certâ lege divaricantibus, sed forte  
fortunâ huc illuc vagè refractis, acquireret; cum refractiones bi-  
nis Prismatibus gementur, errores etiam radiorum duplo plures  
evaderent, ut & duplo majores; & exinde imago ad z fieret multo  
oblongior; quæ tamen, experientiâ teste, in orbem contrahitur.

24. Nonnullis forte in suspicionem veniet, quòd terminatio  
Lucis, sive quiescentis Medii confinium, diversitatem refractionis  
efficiat; .

Radiorum  
diversa  
refrangibi-  
litas.

efficiat; sed huic dubitationi in promptu est remedium, efficiendo nempe ut lux à posticâ parte prismatis (sicut ad fig. 1. Tab.) solummodo terminetur, ne fiat umbræ confinis priusquam fuerit refracta. Et propterea, ne suspicio sit de variâ crassitie vitri, potest refractione ejus ad varias crassities tentari, promovendo Prisma transversè juxta lucis ingressum parallelo motu: ita ut lux primò ad aciem ejus trajiciatur; deinde ad partes crassiores; & in quovis casu persimilis erit colorum apparitio. Neque multum interest, si foramen, per quod lux ingreditur, sit latius vel angustius; nam exinde nihil aliud eveniet quàm lucis, colores exhibentis, augmentatio vel diminutio, ac tanta dilatatio vel contractio imaginis, quanta est foraminis.

25. Experimento duorum parallelorum Prismatum jam antè descripto constat etiam, quòd hæc imaginis in longitudinem distractione non oritur ex ejusdem cujusque radii diffusionem vel distractionem in complures divergentes radios; siquidem illi per iteratam diffusionem vel distractionem, in transitu per secundum Prisma tunc resolvi deberent in longè plures & magis divergentes radios. Quin & iisdem omnibus objectionibus adversatur experimentum, ubi posterius Prisma non statuitur parallelum anteriori sed perpendiculariter transversum. Nam in isto casu, si antè Prisma distraheret imaginem in longitudinem, ob aliam quamcunque causam quàm diversam refrangibilitatem diversorum radiorum, tunc posterius Prisma, per transversam refractionem, distrahere deberet illam oblongatam imaginem in latitudinem, & sic quadrilateram efficeret. Sed experimentum tentanti res secus evenit, imagine scilicet non secundum latitudinem dilatata, sed solum obliquata per majorem refractionem extremitatis violaceæ quàm rubræ. Quemadmodum videre est ad fig. 3. Tab. ubi imago *PT*, per secundi Prismatis refractionem, transfertur ad *pt*. Ex dictis, opinor, satis superque constat id, quod initio proposui demonstrandum: quoniam autem jucunditatem intellectui & assensum plerunque firmiorem harmonia rerum plurium affert, quam unici licet maximè scientifici argumenti testimonium; non erit abs re, si in aliud experimentorum genus, præcedentibus affinium, experturos breviter introducam.

E X P E-

EXPERIMENTA VARIA.

26. In fig. 4. Tab. sit *F* foramen valdè exiguum, per quod lumen Solis trajiciatur; deinde ad distantiam pro lubitu magnam statuatur Prisma *ABC*, per quod radii transeant refracti, prout in prioribus explicui; tum oculo ponè admoto, circularis foraminis videbis imaginem *PT* oblongam; cujus longitudo, ad latitudinem collata, tanto major erit, quanto foramen *F* fiet angustius; & exinde pateat, quòd radiorum alii, tendentes ad oculum per *H*, quasi manassent à *P*, sunt magis refracti, quàm alii tendentes per *I*, quasi à *T* venissent; & radiis sic in oculum non secus ingressis, quàm si profluxissent ab oblongo spatio *PT*, necesse est, ut spatium istud longum appareat luminosum.

Sed cavendum est, ne foraminis *F* tanta sit apertura, ut nimia lucis introitu lædatur oculus; imo ne tanta sit, quin ut possis nudo oculo particulam Solis per foramen istud, quasi punctum lucidum, distinctè & absque ullâ circumradiatione transpicere. Verùm, si lumen Solis censeatur nimium huic experiendo, lumen à nubibus transmissum sufficiat; modò talis sit oculi tui dispositio, ut foramen sine radiis circumcirca superfluis distinctum cernas, antequam interponas prisma: aliàs imaginem ejus non cernes distinctam, neque debitâ longitudine deductam.

Adhæc, liceat tandem observare, si filum albens interpositum Prismate aspicias; etenim filum multo latius apparebit, cum in situ ad longitudinem prismatis parallelo, quàm cum in transverso statuitur.

Cæterum, ut in uno comprehendam omnia, si stellam fixam primæ magnitudinis mediante Prismate intuearis, ejus etiam imago conspicietur longa. At, cum radii stellarum pro parallelis habeantur, si omnes æquè refringerentur, manerent etiam paralleli, postquam egrediuntur è Prismate; & oculum sic ingressi efficerent imaginem omnino similem stellæ, vel puncto lucido, nullatenus oblongam; perinde ut sit, cum stella parallelos radios in oculum directè mittit. Videbis itaque, quòd radii paralleli, superficiebus planis refracti, fiunt inclinati; unde necesse est, ut inæqualem refractionem patiantur. In transitu autem notetur, quòd Telescopio, si placeat, primùm adhibito, tum ut copia lucis

ad

Radiorum  
diversa

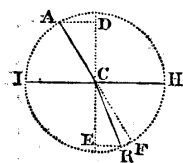
ad oculum transmittatur, tum ut scintillatio, quâ Fixæ solent quasi coronâ cingi, minuatur, & Prismate deinceps interposito, videbis albicantem lineam distinctiorem quàm prius, cum latitudine vix aut ne vix quidem conspicuâ. His paucis de Radiorum diversâ Refrangibilitate narratis, quorum sensus plenior in sequentibus, ubi de Coloribus agitur, elucescet; restat, ut refractionum Quantitates & Mensuræ jam determinantur.

## SECTIO SECUNDA.

### De Mensurâ Refractionum.

De mensurâ  
refractionis  
dati generis  
radiorum, &  
quâvis inci-  
dentia datâ.

27. Refractiones, ope angulorum, quos incidentes & refracti radii cum perpendicularo refringentis plani constituunt, quasi datam rationem habentium, à Veteribus determinatæ fuerant. Quemadmodum si  $IH$  sit planum refringens, cui linea  $DCE$  ad aliquod ejus punctum  $c$  perpendiculariter insistit, & in illud  $c$  radius quilibet  $AC$  incidat, & refringatur ad  $R$ : posito refractum radium  $CR$  in plano  $ACI$  jacere, quod refringenti plano perpendicularare est; supponere Veteres, quod angulus incidentiæ  $ACD$ , angulus refractionis  $RCE$ , & angulus refractus  $RCF$  semper sint in datâ quâdam ratione; vel potius hypothesein credidère satis accuratam esse, ubi radii à perpendicularo non multum divaricant. Sic in Vitro statuerunt angulum refractionis quasi triplum esse anguli refracti. At illa refractionum æstimation minus exacta deprehenditur, quàm ut pro fundamento Dioptricæ debet statui; & Cartesius aliam Regulam primus (\*) excogitavit, quâ istud exactius determinarentur; ponendo dictorum angulorum sinus esse in ratione datâ. In fig. sup. si centro  $c$  & distantia quâlibet  $AC$  circulus describatur, secans radios præfatos in  $A$  &  $R$ , & ab istis punctis ad plani perpendicularum  $DCE$  demittantur normales  $AD$  &  $RE$ , ipsarum  $AD$  &  $RE$  proportio erit eadem perpetuò. Cujus rei veritatem auctor non ineleganter demonstrasset, modo de causis Phycis, quas assumpsit, nullum dubitandi locum reliquisset. Ut & quoniam instrumentis, in istum finem



(\*) Veram refractionum legem omnium primus invenit Snellius; qui horum angulorum secantibus

finem accuratè instructis, examinârunt aliqui, & veritati (quoad De Mensurâ Refractionum.) exactè convenientem adinvenerunt, non dubitamus pro fundamento statuere; hoc solum adhibito moderamine, quòd, cum is de quibuscumque radiis indifferenter affirmârit, quasi omnium per similibus fuisset refractionis, nos tantum affirmamus de singulis eorum generibus seorsim spectatis; ponendo quòd radiorum æquè refrangibilium sinus refractionis sunt ut sinus incidentiæ.

Concipiamus aliquot genera radiorum secundum lineam  $AC$  esse allapsa ad punctum  $c$ , ibique refracta per superficiem  $IH$ ; puta mediocriter refrangibiles radios in  $CR$ , minimè refrangibiles in  $CT$ , & maximè refrangibiles in  $CP$ , ac innumeros alios, gradibus intermediis plus minus refrangibiles, per totum spatium  $TCR$  diffusos esse. Jam si ducatur  $DCG$  perpendicularis ad planum refringens  $IH$ , & centro  $c$  distantia quâvis  $AC$  circulus (ut prius) describatur, secans radios dictos in  $A$ ,  $P$ ,  $R$ ,  $T$ , atque ex istis punctis demittantur perpendiculares,  $AD$ ,  $PG$ ,  $RE$ ,  $TF$ , pro sinibus angulorum  $ACD$ ,  $PCG$ ,  $RCE$ ,  $TCF$ ; pono, quòd, utcumque radii incidant, tamen semper erit  $AD$  ad  $PG$  in eadem ratione; quâ semel cognitâ, Regulam habes pro refractione radiorum maximè refrangibilium in eandem superficiem, ad angulum quemvis incidentium, mensurandâ: et sic semper erit  $AD$  ad  $TF$  in eadem ratione; quâ cognitâ, Regulam habes quâcum refractionis minimè refrangibilium in quâvis incidentiâ determinabitur. Atque idem de ratione ipsius  $AD$  ad  $RE$ , & ad sinum cujusvis intermedi generis concipiatur.

28. Porro autem, cum sinus  $PG$ ,  $RE$ ,  $TF$  cæterique datam habeant rationem ad sinum  $AD$ , datam quoque rationem inter sese habebunt; atque adeo, si ex unicâ observatione proportionem finium  $PG$ ,  $RE$ ,  $TF$  & reliquorum ad radios ex eadem incidentiâ refractos pertinentium cognoveris; Regulam exinde habebis, quâcum ex sinu refractionis cujusvis generis radiorum & in istam superficiem utcumque incidentium dato, cæterorum omnium, ex eadem incidentiâ prolagentium, sinus elicias, licet quænam sit eorum incidentia non innotuerit. Quinimo, si omnium  $AD$ ,  $TF$ ,

tibus datam rationem intercedere primus intellexit. Inde verò facile efficiendum erat sinuum etiam rationem dari. Vide Princip. Lib. 1. Prop. xcvi. Schol.

DE MEN-  
SURA

RE, PG, &c. proportiones inter se semel cognoscantur, habito respectu ad eadem Media refringentia, Regulam habes pro cæteris omnibus exquirendis ex unico quovis unquam dato. Itaque, quo rationes istorum sinuum investigentur, convenit, ut in aliquo radiorum genere proportio sinûs incidentiæ ad sinum refractionis primùm exquiratur; deinde, ut proportionem sinuum refractionis pro radiis diversorum generum, ad eundem angulum incidentium, determinentur.

Ad sinus incidentiæ & refractionis conferendos adhibetur medioere genus radiorum.

29. Ad sinus incidentiæ cum sinibus refractionis conferendos, commodum erit, ut medium genus eligatur; puta genus illud radiorum, qui Viriditatem, vel potius colorem viridi & cæruleo intermedium, exhibent. Credo enim illos, qui refractiones antehac mensuravere (sive id factum sit, ut jam dicta hypothesis Cartesii probaretur, sive aliis de causis) credo illos, inquam, mensuram instituisse ad medietatem refractæ Lucis; hoc est, si spatium à coloribus occupatum spectemus, ad confinium Viridis & Cærulei: aut si spectemus quantitatem lucis, ad medietatem Viridis; & præterea punctum istud pro principali foco lentium habendum esse videtur, in quod intermedium genus radiorum convergit. Atque etiam, si quando de radiis indistinctè differendum est, ut hæcenus apud Opticæ peritos consueverit, genus medioere, commodius quàm extremorum aliquod, pro omnibus haberi potest.

Modus explorandi sinuum istorum rationes.

30. Porro, cum forte desideretur accuratius examen dictæ Regulæ Cartesianæ, quàm antehac instituebatur, dum varia radiorum refringibilitas experientes latuit, primò dicam, quo pacto id non incommodè fiat. Quoniam Fluidi pellucidi superficies refringentes facillè possint inclinari ad quemvis datum angulum, quod Solido non est concessum, Fluida in hunc finem fuerunt adhibita; sed instrumento magis laborioso, quàm opus erat, & erroribus fortè magis obnoxio, quàm si omni apparatu privaretur, demptâ trabe cui vasculum aquæ plenum affigitur.

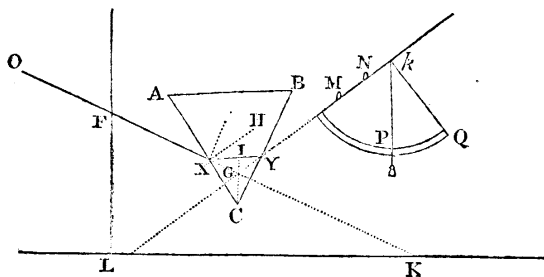
Sit itaque HK in fig. 5. Tab. vectis ligneus duas tresve ulnas longus aut ampliùs; satis crassus ne ob longitudinem & pondus minimè inflecti queat; quadrilaterus, rectangulus & rectus, cum lateribus oppositis exactè parallelis. Tum lamellæ duæ, HI & KL, super unum ejus latus, ad angulos rectos, erigantur; KL proximè ad unam extremitatem, & HI quasi quatuor digitos ab alterâ distans, quarum longitudo

gitudo sit trium digitorum quatuorve, latitudo autem duorum vel REFRAC-  
trium. Deinde fumatur vasculum aliquod cylindricum, vel prismi-  
forme, CF, duos tresve digitos latum, longum verò quatuor vel quin-  
que. Ejus basis super lamellam HI, cemento aliquo duro & tenaci, figatur; ac in eo situ firmetur ope trabis HK ultra lamellam dictam HI productæ. Tum trajiciatur ejus fundum in medietate, & lamella simul, parvo foramine F, puta decimâ parte digiti lato; & juxta foramen istud in alterâ lamellâ notetur punctum R, quod æquè distat à trabe ac dicti foraminis centrum; ita scilicet ut linea FR, per centrum foraminis ad R ducta, sit parallela longitudini trabis. Denique fumatur lamella vitrea, plana, polita & uniformiter crassa, eaque applicetur ad planitiem lamellæ HI, vasculo CF obversam, super foramen F; & cemento figatur ita, ut vasculum istud aquæ (quâ repleatur) non sit pervium; & cum normâ aliquâ fiat periculum, an illa vitrea lamella perpendiculariter insit trabi. Quod si non contingat, corrigatur situs, donec sit exactè perpendicularis. In cujus rei gratiam convenit, ut dicta lamella vitrea sit tres vel quatuor digitos longa & lata, quo de situ ejus meliùs judicare liceat. Instrumento hoc sic fabricato, & aquâ vasi CF plusquam ad medietatem ejus infusâ, illud in radiis solaribus ita statuatur, ut in superiori superficie aqueâ refracti perpendiculariter emergant ad foramen F, rectâque progrediantur versus laminam KL, Rubedine ad T, Purpurâ ad P, & Viridi, vel confinio Cærulei & Viridis, ad K incidentibus. Convenit autem, ut dicta lamina KL dealbatur, aut albente papyro vestiatur, quo de Coloribus judicium certius feras. Interea verò cum quadrante aliquo amplo & exactè fabricato, ekr, quæatur inclinatio trabis, HK, ad horizontem; & habebis angulum refractionis ekr, & ejus sinum er. Tum Solis altitudo statim inquiratur, ejusque complementum ad 90 grad. AKN erit angulus incidentiæ, & AD sinus. Quibus sinibus ad invicem collatis, & experimento ad diversas Solis altitudines repetito, constabit, an sinuum ratio semper sit eadem. Quòd si velis, ut experimenta varia simul fiant, aut ad minorem incidentiam, quàm sit complementum maximæ altitudinis solaris, vice radiorum à Sole directè manantium possis adhibere reflexos.

31. Cum eandem sinuum incidentiæ & refractionis rationem alicui radiorum generi, utcumque in eandem quamvis superficiem incidenti,

Modus explorandi vim refractivam

Solidi cujusvis Aere circumdati, incidenti, perpetuò competere fat exploratum fuerit, proponatur exquirere rationem illam ad superficiem data quaelibet Media determinantem, idque unico experimento. Si Aer sit unum ex datis Mediis, & Liquor quilibet alterum; instrumentum novissimè descriptum non incommodè potest adhiberi. Sin Mediorum alterum sit solidum, res expedite perficitur ad diagramma appositum.



In ejus explicationem præmittantur duo sequentia Lemmata.

## L E M M A I.

Sit ABC Prisma, ex materiâ quâvis pellucidâ confectum, cujus axis fit Horizonti parallelus & perpendicularis ad radios Solis; & præterea sit ejus positio talis, ut dictos radios ox æquè refringat, ingredientes ad x & egredientes ad y. Istud autem, quo pacto debet fieri, ostensum fuit ad § 10. Jam dico, quòd angulus refractionis, ad alterutram refringentem superficiem ut AC factæ, sit æqualis dimidio verticalis anguli prismatici ACB: scilicet ad punctum incidentiæ x erigatur perpendicularis hx, erit hxy angulus refractionis ad superficiem ac. Porro demittatur ci perpendicularis in radium xy; & ista bifecabit angulum ycx, propterea quòd triangulum ycx (ob æqualitatem refractionis in x & y) fit isosceles. Dico itaque, quod anguli hxy & icx æquantur: nam  $\text{ang. } AXY = \text{ang. } XIC + ICX$  (per 32. 1. Elem.) sed anguli AXH & XIC sunt recti. Ergo residui hxy & icx æquantur. Q. E. D.

## L E M M A II.

Adhæc, si radius incidens ox & emergens yn indefinitè producantur, occurrentes in g; & præterea, si recta quævis KL, Horizonti parallela, radiis istis interjiciatur, constituens triangulum gKL; &

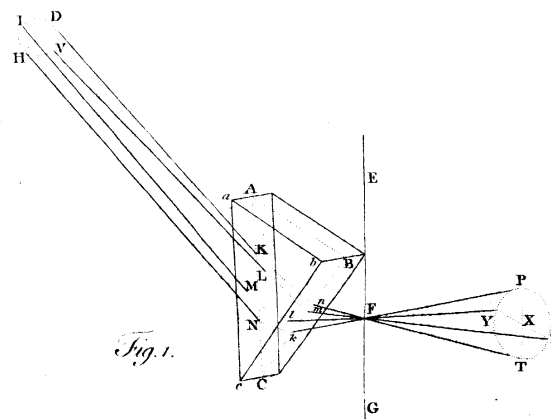


Fig. 1.

Tom. III. p. 276.

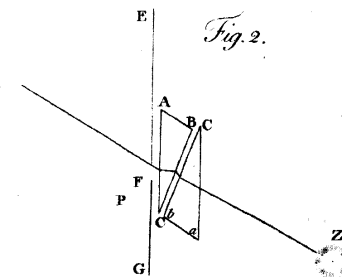


Fig. 2.

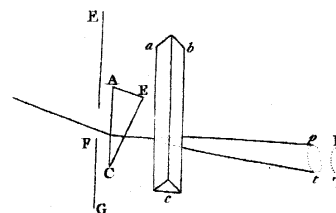


Fig. 3.

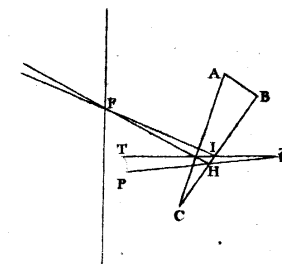


Fig. 4.

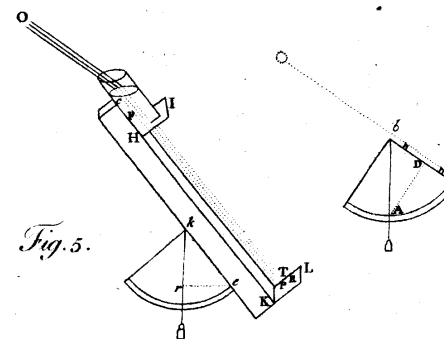


Fig. 5.



&, cùm refractus radius  $YN$  tendit sursum, si summa angulorum  $LKX$  &  $KLY$  sumatur; aut eorum differentia, cùm iste  $YN$  tendit deorsum: dico, quòd illius summæ vel differentiæ dimidium, unà cum angulo refractionis  $HXY$ , æquabitur angulo incidentiæ  $HXG$ . Nam dicta summa vel differentia æquatur angulo  $NGK$  (per 31. 1. Elem.) hoc est angulis  $GXY + GYX$ ; &, cùm triangulum  $GXY$  sit isosceles, dictæ summæ vel differentiæ dimidium æquabitur angulo refracto,  $GXY$ ; qui cum angulo refractionis,  $YXH$ , constituit angulum incidentiæ. Q. E. D.

His præmissis, Problema propositum sic perficitur. Primò mensuretur angulus verticalis Prismatis  $ACB$ , & ejus dimidium erit angulus refractionis. Dein prisma in positione præfatâ disposito, per quod radii trajiciantur ingressi foramen  $F$ ; ope quadrantis  $MNPQ$  ampli & accurati (puta cujus pinnarum  $M$  &  $N$  distantia sit pedis unius ad minimum) exploretur angulus  $YLK$  vel  $P/Q$ , quem refracti radii,  $YMN$ , cum Horizonte constituunt; faciendo, ut mediocriter refrangibiles per pinna  $M$  &  $N$ , ad distantiam decem aut viginti pedum à Prisma trajiciantur, & simul observetur Solis altitudo,  $xKL$ : qui duo anguli addantur, si refracti radii  $YMN$  sursum tendant, sicut in schemate describitur, alias minor subtrahatur à majori; & summæ vel differentiæ dimidium unà cum angulo refractionis, priùs invento, erit angulus incidentiæ, ut pateat per Lemma secundum. Denique ex angulis Incidentiæ & Refractionis sic datis, dantur eorum sinus. Q. E. F.

32. Sic in Prisma quodam vitreo dimensus sum angulum ejus maximum,  $ACB$ , & inveni 63 grad. 12 min. cujus dimidium,  $HXY$ , est 31. gr. 36 min. ejusque sinus 5240, posito sinu 90 gr. 10000. Deinde, cùm altitudo Solis,  $OKL$ , observabatur esse 14 gr. 4 min. alter angulus,  $MLK$ , à radio  $YN$  ad medium Viriditatis tendente conflatus, erat 30 gr. 52 min. quorum summa est 44°. 56'. ejusque dimidium,  $YXK$ , 22°. 28'. quod unà cum angulo refractionis,  $HXY$ , facit 54°. 4'. angulum incidentiæ, cujus sinus est 8097. Denique conferendo sinus jam inventos, ut eorum proportio in minimis terminis haberetur, inveni esse ut 11 ad 17 ferè. Quare pro Regulâ generali statuendum est, quòd radiorum Viriditatem exhibentium sinus incidentiæ ex Aere in Vitrum quodvis, æquè refractivum ac illud Prisma, sit ad sinum refractionis ut 17 ad 11. Haud

De Mensurâ  
Refrac-  
tionum.

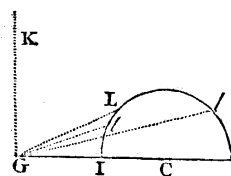
Exemplum  
in refractione  
cujusdam ge-  
neris vitri.

De Mensura  
Refrac-  
tionum.

Haud secus dimetiendo refractionem radiorum, colorem inter Viridem & Cæruleum exhibentium, investigatur  $45^{\circ}. 8'$ . pro duplo anguli refracti; cujus dimidium,  $22^{\circ}. 34'$ , unà cum angulo refractionis,  $31^{\circ}. 36'$ , dat angulum incidentiæ  $54^{\circ}. 10'$ ; ejusque finus, 8107, est ad finum refractionis, 5240, ut 82 ad 53 proximè.

Modipræfati  
commoditas.

33. Hujus autem modi commoditas in mensurandis refractionibus ex eo conjicietur, quòd Instrumento nullo hîc opus est, dempto Quadrante & Prismate cujus refractione desideratur; quòd Refractionem, dum geminetur, factam ad x & y, exinde certius metiri possis; & quòd facillimum sit Prisma in desiderato situ disponere, ut suprà ostenditur § 10: imo quòd parvus error à situ desiderato fere nihil sit; dum quoad sensum haud inde mutabitur angulus refractus MGK, ut experienti patebit. Quippe angulus iste hîc minimus est; & quantitaturn, per motum generatorum, cum maximæ existant vel minimæ, hoc est in momento regressus, motus ut plurimum sunt infinite parvi.



Sic verbi gratiâ, si centro c describatur circulus  $IL$ , & extra eum sumatur punctum quoddam G, ducaturque GIC, & erigatur normalis GK: deinde, si concipiatur, quòd punctum I moveatur uniformiter in illius circuli circumferentiâ, per quod punctum recta quædam G/, circa centrum G rotata, perpetuò transeat: manifestum est, quòd quo major sit angulus CG/, sive quo minor angulus KG/, eo minor erit motus angularis ipsius G/; & cum angulus CG/ sit maximus, sive angulus KG/ minimus, hoc est in momento regressus (recta G/ tunc circulum in L tangente) motus ejus erit infinite parvus, & quoad sensum nullus; parvusque error à puncto contactus, L, nullam sensibilem variationem in angulis istis KGL & CGL, producet. Et ad eundem ferè modum, parva convolutio Prismatis haud omnino mutabit angulum MGK, cum iste sit minimus, sive complementum ejus maximum. Quòd si Prisma disponeretur in quovis alio situ, quàm hîc describitur (puta cum radii perpendiculariter ingressi ad egressum duntaxat refringuntur) minimus error ab isto desiderato situ multum mutaret angulum refractum, & sic experientia foret incertudini & erroribus multo magis obnoxia.

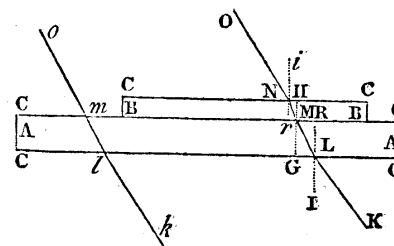
34. In

34. In majorem hujus rei copiam, quia dantur aliqui casus, ubi refractiones per modos jam descriptos haud possint mensurari (ut cum refractione fit ex Vitro in Crystallum, ex Aquâ in Vitrum, vel ex uno liquore in alium) & nequa omnino sit refringens superficies, cujus refractione nequit investigari; Problema sequens lubet proponere.

### PROBLEMA.

*Datis refractionibus, quas duo Media alicui tertio contigua conficiunt; illorum, sibi ipsis contiguum, refractiones invenire.*

Sunto duo Media proposita A & B, quorum superficiem determinantis refractione quaeritur; & sit c Medium tertium, cujus superficiem, ipsis A & B contigua, refractiones dantur. Sitque sinus incidentiæ ad finem refractionis ex Medio c in Medium A sicut I ad R; & sinus incidentiæ ad finem refractionis ex eodem Medio c in alterum Medium B sicut j ad r. Dico, quòd sit  $I \times r : R \times j ::$  sinus incidentiæ ad finem refractionis ex Medio B in Medium A.



Verbi gratiâ, si proponatur investigatio refractionis ex Aquâ in Vitrum, data refractione ex Aere in utrumque; sitque sinus incidentiæ ex Aere in Vitrum ad finem refractionis ut 17 ad 11, & sinus incidentiæ ex Aere in Aquam ad finem refractionis ut 4 ad 3. Quare sinus istos multiplicando reciproce, erit ut  $17 \times 3$  ad  $11 \times 4$ , sive ut 51 ad 44, ita sinus incidentiæ ex Aquâ in Vitrum ad finem refractionis. Et sic cognita refractione ex Aere in quavis alia Media proposita, possis adipisci eorum refractionem inter se; & è contra.

35. Cæterum demonstratio hujus non est omittenda, in quem finem præsternatur Lemma sequens.

Si Media duo proposita A & B concipiantur esse planis parallelis terminata, contigua, & dicto Medio tertio (puta Aere) circumdata, & radius quilibet ON, oblique incidens ad N, refringatur primò ad M, ac deinde ad L, & emergens pergat ad K: dico radium incidentem

ON.

Regula de in-  
vestigandâ  
refractione  
Mediorum  
sibi ipsis con-  
tiguum, Aeri-  
contiguo-  
rum, refractiones cog-  
noscantur.

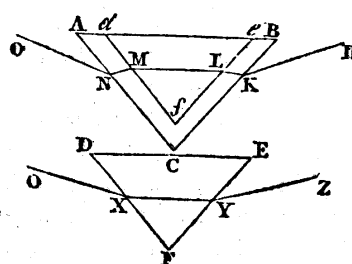


De  
MENSURA

mè cum Aquæ refractionis non perpetim eadem maneat, sed à caloris vicissitudine nonnihil patiat, variosque densitatis gradus induat. Quod idem & Aeri circumdanti contingit, qui à vaporibus etiam non solum variè incrassatur, sed & arctius (auctâ Atmosphære gravitate) vel laxius comprimitur. Adde, quòd aquarum, ex diversis Terrarum regionibus scaturentium, aut vi Solis in vapores & pluviam deinde conversarum, diversæ sint densitates, & internæ dispositiones ad refringendum, ortæ ex variis mineralium tincturis, quas è locis subterraneis extrahunt, & exhalationibus variè crassis & copiosis, quæ simul cum vaporibus in altum attolluntur.

Præfatorum  
demon-  
stratio.

38. Problematis hujus de refractionis Fluidorum mensurâ sic soluti, veritas constabit ex ostenso, quòd refractionis in hoc Prismate, ex Aqua & Vitris composito, eadem sit quantitas, quæ foret, si vitrum tolleretur, & aqua sola maneret Aere circumdata.



Sit itaque ABC Prisma confectum ex laminis vitreis *Acfd* & *Bcfe* (ut dictum est) & aquâ *dfe* repletum. Et concipiatur, quòd DEF sit aqueum Prisma, immediatè circumdatum Aere, & omnino simile aquæ *def* circumclusæ vitro, similiterque positum; & incident radii paralleli, *ON*, *OX*, in utrumque; quorum alter *ON*, refractus in *N*, *M*, *L* & *K*, tendit ad *H*; alter verò *OX*, refractus in *x* & *y*, tendit ad *z*. Dico jam, quòd emergentes *KH* & *yz* erunt paralleli, atque adeo, quòd in utroque Prismate tota refractionis quantitas erit eadem. Etenim in fig. pag. 280. si radius *om* ipsi *ON* parallelus incidat in vitream laminam *A*, emergatque in *lk*; notum est, quòd radius *lk* erit parallelus ipsi *om*, hoc est, ipsis *ON* & *LK*: & cum *lk* & *LK* sint paralleli, erunt etiam *ml* & *ML* paralleli. Unde liquet propositum: Quòd quantitas refractionis ex Aere in Medium quodvis propositum sit eadem, sive radii immediatè ingrediantur istud Medium ex Aere (ut fit ad *oml*) sive prius permeent aliud Medium interpositum & parallelis planis terminatum (uti fit ad *ONML*) & è contra. Atque idem intel-

I

lige,

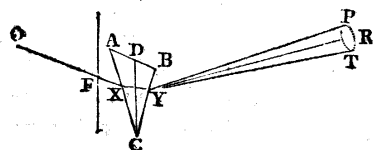
lige, cum vice aeris aliud quodpiam adhibetur Medium. Quare REFRAC-  
TIONUM.  
cum paralleli radii, *ox* & *on*, incident in prismata, *dfe* & *acb*, similia & similiter posita, refractionis quantitas ex Aere in Aquam erit eadem, sive radii immediatè intrent, ut videre est ad *def*, sive prius permeent lamellam vitream *adfc*; hoc est, radius *xy* semel refractus erit parallelus *ML* bis refracto: & ob eandem rationem, cum *xy* & *ML* sint paralleli, radii emergentes *yz* & *kh* erunt etiam paralleli. Quare, cum radii incidentes & emergentes sint paralleli, refractionis tota prismatis utriusque erit eadem. Atque adeo cum aqueum prisma Aeri contiguum, propter aquæ fluiditatem, fabricari nequeat, ejus vice liceat adhibere vitreum prisma cum aquâ repletum. Q. E. D.

Et sic modus generalis, quo refractiones ex Aere in quælibet Media proposita determinantur, ostensus est, facillimus quidem & erroribus minimè obnoxius: præsertim si angulus Prismatis sit magnus & exactè cognitus; quadrans magnus & accuratus; & observatio facta longè post Prisma, ubi colores multum dilatati facilius distinguuntur. Et præterea, cum refractiones inter Aerem & Media proposita sic experientiis determinantur, indicata est Regula (§ 34.) quâ Mediorum eorundem sibi ipsis contiguum refractiones eliciantur. Quòd satis est in gratiam primi casus, de refractionibus dimetiendis, cum in eodem quopiam radiorum genere proportio sinus incidentiæ & refractionis quæritur, ostendisse.

39. Prosequendus est jam alter casus, ubi Heterogeneorum Radiorum refractiones conferendæ sunt. Quòd autem sinus re-  
diversi generis refractiones conferuntur, & maximæ refrangibilitatis differentia investigatur.  
fractionis cujusque radiorum generis sit ad sinum incidentiæ in datâ quâdam ratione, experiri possis dimetiendo refractiones singulorum insigniorum generum, juxta varias obliquitates in Medium aliquod refringens seorsim incidentium, veluti in aquam (ad fig. TAB. 5.) in vase stagnantem, vel in Prismata vitrea, quorum diversæ sint quantitates angulorum verticalium. Nam per unum Prisma proportionem sinuum ad singula radiorum genera investigare possis, prout ostenditur ad § 31. deinde per alia Prismata (vel ejusdem Prismatis alios seu minores seu majores angulos) exquirere, an eadem proportionem in aliis obliquitatibus obveniant. Atque ita (observationibus accuratissimè factis) simul constabit, re-  
fractiones

DE  
MENSURA

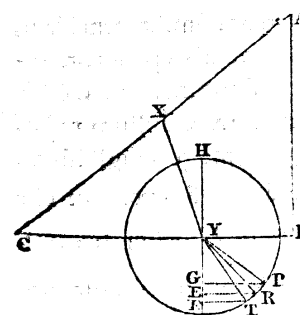
fractiones cujusque generis radiorum secundum certas rationes finuum peragi, & istorum finuum rationes innotescant. Impraesentia verò, cum eandem esse cujusque radii refractionem cognoverim, siue Heterogeneis radiis (ut in lumine solis nondum refracto) commixtus incidat, siue ab Heterogeneis prius separetur: ostendam quomodo per refractionem immediati luminis solaris hæc proportionem obtineri possint; imprimis determinando proportionem finuum refractionis inter se respectu ejusdem incidentiæ, ac deinde cum communi sinu incidentiæ conferendo. Et quoniam de intermediis radiorum generibus facile esset judicium ferre, si modo refractiones extremorum essent cognitæ, satisfecero, si radios maximè omnium refrangibiles cum minimè refrangibilibus comparavero.



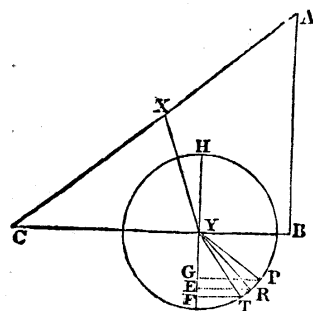
Itaque sit ABC Prisma vitreum ita positum, ut radii tum ingredientes, tum egredientes eandem quantitatem refractionis, ut prius, patiantur. Dies autem feligatur splendidus, & cubicu-

lum esto valdè obscurum, ut Colores usque ad ultima, quæ occupant, spatia distinctè satis videri possint. Tunc ad distantiam viginti pedum aut amplius à Prismate, radii excipiantur in papyrum aliquam directè obversam, & spatii à coloribus illuminati (ut PT) longitudo & latitudo mensuretur. Sic Prismate adhibito, cujus angulus verticalis ACB fuit  $63^{\circ}.12'$ , & latitudine foraminis radios intromittentis existente quartâ parte digiti; ad distantiam XT vel XT 22 pedum, inveni maximam longitudinem imaginis, PT, esse  $13\frac{1}{4}$  dig. circiter, & latitudinem  $2\frac{1}{2}$  dig. Jam si latitudo hujus imaginis ab ejus longitudine subtrahatur, manebit  $10\frac{1}{2}$  digiti pro longitudine, quam habere debuisset, si Solis discus (& foraminis F diameter) fuisset infinixtè parvus; hoc est, si radii advenissent omnes in eadem rectâ or. Ista itaque linea  $10\frac{1}{2}$  dig. subtendit angulum, quem radii duo similiter incidentes per inæqualitatem refractionis constituent, quorum alter maximè omnium similiter incidentium, & alter minimè omnium refringitur; qui proinde angulus ex calculo reperitur  $2^{\circ}.18'$ . Verum, cum angulus iste binâ refractione

refractione ad x & y conficiatur, & præterea, cum utraque superponatur æqualis; calculus ad hoc negotium satis accuratus ex unicâ tantum refractione poterit institui: puta, quæ conficitur ad latus BC. Etenim, si verticalis angulus ACB plano DC bifecetur, & alterum Prismatis dimidium, DCB vel DCA, concipiatur tolli; refractione ad alterum dimidium facta, radiis obliquè incidentibus in AC & perpendiculariter emergentibus è latere DC, vel perpendiculariter incidentibus in latus DC secundum unicam lineam quandam XY, & obliquè emergentibus è latere BC: refractione, inquam, sic ad alterum dimidium facta, foret semiffis refractionis ad integrum Prisma, si modo unicum quoddam radiorum mediocriter refrangibilium genus spectetur. Quinetiam, si cætera omnia radiorum genera simul spectentur, assertio illa, licet non amplius sit absolutè vera, tamen veritati tam proximè accedet, ut quoad sensum & calculum mechanicum pro verâ habeatur. Quamobrem, cum refractionis utriusque ad x & y peractæ computatio geometrica ægrius institui possit; istud, more ad praxin magis accommodato, utut mechanico, perficere non verebor: confusus id mihi vitio verti non debere, si dum computationes rebus Physicis adhibeo, minutias, quæ operam molestè & sine fructu producerent, missas faciam. Refractionem itaque ex unicâ tantum parte Prismatis perpendam; & quoniam omnes radii, demptis mediocriter refrangibilibus, à dimidio ACD bis deberent refringi, & semel tantum ab altero dimidio DCB, perpendiculariter ingressi latus planum DC secundum lineam XY: itaque in dimidio DCB fiat calculus, hoc est, ad latus planum BC; supposito quòd omnibus radiis secundum eandem lineam XY al-



lapis, angulus, quem maximè refrangibiles cum minimè refrangibilibus, postquam refringerentur à latere BC, constituerent, foret dimidium anguli PYT; h. e.  $1^{\circ}.9'$ . Jam, cum angulus incidentiæ radii XY ex præmonstratis sit  $31^{\circ}.36'$ , & angulus refractionis mediocris  $54^{\circ}.10'$ ; transferentur hæc omnia in schema appositum; ponendo quòd CB sit superficies determinans Medium vitreum;



vitreum versus A, & Aereum versus F, & quòd angulus incidentiæ  $XYH$  sit  $31^{\circ}.36'$ ; eritque angulus refractionis,  $RYF$ ,  $54^{\circ}.10'$ ; & angulus  $PYT$ ,  $1^{\circ}.9'$ ; differentia nempe refractionis inter maximè refrangibiles  $YP$  & minime refrangibiles  $YT$ . Qui angulus à radio  $YR$  mediocriter refracto, & confinium Cærulei & Viridis occupante, bifecatur. Ac proin angulus,  $PYR$  vel  $RYT$ , erit  $34\frac{1}{2}$  min. dimidium totius  $PYT$ .

Adeoque angulus  $PYE$   $54$  grad.  $44\frac{1}{2}$  min. & angulus  $TYE$   $53$  grad.  $35\frac{1}{2}$  min. & eorum sinus,  $PG$  ac  $FT$ , erunt  $81656$  &  $80481$ ; quorum proportionem ad simpliciores numeros redactâ, erit  $PG$  ad  $TF$  ut  $69\frac{1}{2}$  ad  $68\frac{1}{2}$  circiter. Ad hunc modum experimenta & calculum cum sæpius instituerim, horum sinuum proportionem inter terminos  $67$  ad  $66$ , &  $72$  ad  $71$  semper obvenerunt; sed ut plurimum incidi in proportionem  $69$  ad  $68$ ,  $69\frac{1}{2}$  ad  $68\frac{1}{2}$ , &  $70$  ad  $69$ ; quarum tantilla est differentia, ut parvi interest quænam adhibeatur.

Harum refractionum sinus ad communem finem incidentiæ conferuntur.

40. Ratione sinuum refractionis pro extremis radiorum, similiter incidentium, generibus sic inventâ, eorum computatio ad finem incidentiæ simul innotescit; quippe qui paulo antè inventus est  $52400$ : & conferendo hunc,  $52400$ , ad sinus  $81656$  &  $80481$ , eorum ratio in minoribus numeris reperietur,  $44\frac{1}{2}$  ad  $69\frac{1}{2}$ , &  $68\frac{1}{2}$ ; aut  $44\frac{1}{2}$  ad  $69$  &  $68$  ferè. Refractionibus nempe ex Vitro in Aere peractis.

Radiorum, ad oppositas partes ejusdem refringentis superficiæ incidentium, sinus sunt reciproci proportionales.

41. Quòd si radii è contra ex Aere in Vitrum similiter incident, proportionem sinuum nullo negotio ex jam inventis eruuntur, utpote quæ sunt reciproci. Sit  $I$  communis sinus incidentiæ è Vitro in Aerem,  $p$  sinus refractionis maximè refrangibilium radiorum, & mediocriter refrangibilium, &  $r$  minime refrangibilium. Dico, quòd ex horum reciproci proportionibus, si  $\frac{1}{I}$  ponatur esse sinus incidentiæ ex aere in vitrum, erit  $\frac{1}{p}$  sinus refractionis maximè refrangibilium radiorum,  $\frac{1}{r}$  sinus refractionis mediocriter refrangibilium,

## SECT. II.

## O P T I C Æ.

frangibilium, ac  $\frac{1}{r}$  minime refrangibilium. Nam cum sinus incidentiæ radii maximè refrangibilis è vitro in aerem sit  $I$ , & sinus refractionis  $p$ , radii ejus ex Aere in Vitrum, per easdem lineas retroacti, sinus incidentiæ erit  $p$ , & sinus refractionis  $I$ ; siquidem jam radius est incidens, qui prius fuerit refractus. Est ergo sinus incidentiæ radii maximè refrangibilis, ex aere in vitrum utcumque incidentis, ad finem refractionis ut  $p$  ad  $I$ ; hoc est (applicando terminos rationis ad  $p$ ) ut  $I$  ad  $\frac{1}{p}$ ; hoc est (applicando ad  $I$  denuo) ut  $\frac{1}{I}$  ad  $\frac{1}{p}$ : et simili argumento constabit ejusmodi sinus radii mediocriter refrangibilis esse ut  $\frac{1}{I}$  ad  $\frac{1}{r}$ ; & sinus minime refrangibilis ut  $\frac{1}{I}$  ad  $\frac{1}{r}$ . Liqueat ergo, quòd posito  $\frac{1}{I}$  communi sinu incidentiæ, erunt  $\frac{1}{p}$ ,  $\frac{1}{r}$ , &  $\frac{1}{r}$  singulorum generum respectivè sinus.

42. Rem numeris illustro. Cum  $44\frac{1}{2}$  ad  $69$  &  $68$  sit ratio sinus communis incidentiæ ad sinus maximè discrepantium refractionum è Vitro in Aerem: sinus incidentiæ communis ad sinus refractionum ex Aere in Vitrum, erit ut  $\frac{p}{44\frac{1}{2}}$  ad  $\frac{1}{69}$  &  $\frac{1}{68}$ ; five  $\frac{69 \times 68}{44\frac{1}{2}}$  ( $= 106$  ferè) ad  $68$  &  $69$ . Hoc est, pro radiis maximè refrangibilibus, sinus incidentiæ ad finem refractionis, ut  $106$  ad  $68$ , & pro minime refrangibilibus ut  $106$  ad  $69$ .

43. Hisce sic determinatis, rationes sinuum pro radiis intermediis facillè determinantur ex cognitis colorum distantis, quas in imagine coloratâ observant. Sic radii, qui ad Cæruleum paulo magis quàm ad Flavum vergunt, cum in mediam imaginem cædant, intermediam rationem sinuum  $44\frac{1}{2}$  ad  $68\frac{1}{2}$ , vel  $106$  ad  $61\frac{1}{2}$  circiter habebunt; & sic de aliis.

44. Ad eundem modum, quo refractiones ad Vitrum determinatæ sunt, id ipsum posset fieri ad alia Media; sed è re erit, ut Regulam jam ostendam, quâ refractionum istarum mensuræ, ex sinibus earum, sic ad Vitrum determinatis, possunt determinari ad quodlibet aliud Medium propositum, idque licet istud sit aliud Medio quàm Aeri contiguum. Sit  $AB$  superficies terminans Aerem ex parte  $F$ , & Vitrum ex parte  $G$ , ad cujus aliquod punctum, ducatur linea  $FXG$  ei perpendiculariter insistent; & præterea concipiatur rectam  $IX$  ad angulum  $IXA$  infinitè parvum duci, se-

cundum

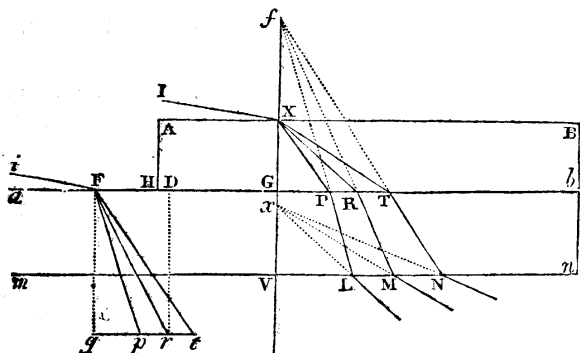






Heterogene-  
orum refra-  
ctiones, à su-  
perficiebus  
aeri neutrà  
ex parte con-  
tiguas, Theo-  
remate etiam  
determinan-  
tur.

51. De refractionibus superficierum Aeri contiguarum men-  
furandis hæc satis. Quòd si desideretur id ipsum ad alias superfi-  
cies, aëri ex parte neutrà contiguas, fieri; sunt  $ABH$  &  $abnm$ , duo  
quælibet Media, secundum planam superficiem  $Hb$  contigua, &



Aere circumdata; sitque  $AB$  planum ipsi  $Hb$  parallelum, & in eo  
sumatur punctum  $x$ , ad quod ducatur  $xv$  perpendicularis, &  $ix$   
obliquissima linea secundum quam (ut jam antè) radii omnium  
formarum incident, & pro gradu refrangibilitatis refringantur ad  
 $p$ ,  $r$ , &  $t$ , aliaque intermedia loca. Horum radorum, in pro-  
positam superficiem  $ab$  sic incidentium, refractiones jam quæran-  
tur; & cum refractiones mediocriter refrangibilium ad quælibet  
superficies fuerint antehac expositæ, radii  $xr$  sit refractus  $rm$ , &  
is retroducatur, donec fecet perpendiculum  $xv$  in  $f$ , & insuper  
ducantur  $fp$ ,  $fr$ , & producantur ad  $L$  &  $N$ . Dico, quòd  $PL$  erit  
refractus ipsius  $xp$ , ac  $TN$  ipsius  $xt$ , atque omnes aliarum for-  
marum radii incidentes inter  $p$  ac  $t$  ita refringentur, ut postea di-  
vergant à puncto  $f$ . Concipiatur enim, quòd Medium  $abnm$  lon-  
gius versus  $am$  producat quam Medium  $ABH$ , ita ut ejus plani  
 $ab$  pars inter  $H$  &  $a$  sit Aeri contigua; & ad aliquod in eo punc-  
tum  $F$  ducatur perpendicularis  $fg$ , nec non obliquissima linea  $if$ ,  
secundum quam radii omnium formarum incident, & pro gradu  
refrangibilitatis refringantur ad  $p$ ,  $r$ ,  $t$ , locaque intermedia; per-  
inde ut effectum erat ad alterius Medii superficiem  $AB$ . Præte-  
rea sumatur  $FD = GR$ ; & ducatur  $Dr$  ipsi  $fg$  parallela, ut fecet  
radium

radium  $Fr$  in  $r$ ; unde  $rg$  demittatur ad  $fg$  normalis, aliosque ra-  
dios  $fp$  &  $ft$  secans in  $p$  ac  $t$ . Jam, cum sit  $gr = GR$ , erit etiam  
 $gp = GP$ , &  $gt = GT$  ex ostensis § 44; & insuper ex ostensis § 35.  
cum radorum secundum  $ix$  &  $if$ , lineas parallelas, incidentium  
eadem sit refraçtio in Medium  $abnm$ , five immediatè ingredian-  
tur ex Aere, sicut fit ad  $F$ , five priùs permeent aliud Medium ut  
 $ABH$  parallelis planis terminatum: sequitur, quòd radii, alteru-  
tro modo refracti in dictum Medium  $abnm$ , sunt paralleli radiis  
homogeneis altero modo in idem Medium refractis; hoc est, quòd  
 $fp$  ad  $PL$ ,  $fr$  ad  $RM$ , &  $ft$  ad  $TN$  sunt paralleli. Quapropter, si  
refracti radii  $PL$ ,  $RM$  ac  $TN$  retroducantur, donec singuli occurrunt  
perpendiculo  $ex$ , cum eo & basibus  $GP$ ,  $GR$  ac  $GT$  constituent tri-  
angula similia triangulis  $gpf$ ,  $grf$ , &  $gtf$ , imo & ipsis æqualia;  
liquidem eorum bases  $gp$  &  $GP$ ,  $gr$  &  $GR$ ,  $gt$  &  $GT$  sibimet respec-  
tivè sint æquales. Quare, cum horum triangulorum vertices con-  
veniant ad idem punctum  $F$ , illorum etiam vertices ad idem ali-  
quod punctum  $f$  convenient; hoc est, radii  $PL$ ,  $RM$  ac  $TN$ , ipso-  
rum  $xp$ ,  $xr$  &  $xt$  refracti, divergent omnes ab eodem puncto  $f$ .  
Q. E. D.

52. Ostenso hoc, sequentia obveniunt notanda.

I. Quòd proportionēs sinuum incidentiæ & refractionis, ad su-  
perficiem  $Hb$  factæ, ex his facile determinantur. Nam pro radiis  
maximè refrangibilibus sinus isti sunt ut  $fp$  ad  $xp$ , & pro minimè  
refrangibilibus ut  $fr$  ad  $xt$ , &c.

II. Hinc si proportionēs sinuum refractionis ex Aere in duo  
quælibet Media proposita, paribus incidentiis, dentur; propor-  
tionēs sinuum refractionis ex altero Mediorum in alterum facile  
elabuntur, dividendo nempe sinus posterioris Medii per correspon-  
dentes sinus anterioris. Sic cum refraçtio sit ex Aere in Vitrum,  
dicti sinus sunt ut 68, 68½, 69; & cum sit ex Aere in Aquam,  
sunt ut 90, 90½, 91. Ergo cum sit ex Aquâ in Vitrum erunt ut  
 $\frac{68}{90}$ ,  $\frac{68\frac{1}{2}}{90\frac{1}{2}}$ ,  $\frac{69}{91}$ , hoc est ut 281, 281½, 282 ferè.

III. Si tertium aliquod Medium, Aere densius, postponatur Me-  
dio  $abnm$ , contingens illud in superficie  $mn$ , quæ concipiatur plana  
ipsisque  $AB$  &  $ab$  parallela, & si radii divergentes à puncto  $f$ , si-  
cut modò ostensum erat, in illud incident ad puncta  $L$ ,  $M$  &  $N$ ;  
postquam

Theorema  
illud notis  
quibusdam  
promovetur.

postquam in iisdem refringuntur, divergent rursus ab alio quodam puncto  $x$ , quod situm est in perpendicularo  $xg$ . Et sic præterea in infinitum, quotcunque licet Media parallelis planis ab invicem discreta, sese ordine sequantur. Quòd si Aer immediatè succedat Medio *abum*, punctum istud  $x$ , à quo emergentes radii tendunt, situm erit ad  $v$  in ipsâ refringente superficie; propterea quòd emergent paralleli ad summè obliquam lineam  $ix$ , secundum quam primùm incidebant ex Aere; si modò emergere dicantur, qui nunquam divaricabant à refringenti superficie.

IV. Si radii ab aliquo puncto  $r$ , in Aere sito, divergentes, tendant ad puncta  $c, d, e$ , eo more quem ad § 47. explicui, & per varia deinde plana refringentia ipsisque  $AB$  parallela transeant; semper divergent omnes ab eodem aliquo puncto, quod situm est in perpendicularo planorum per punctum  $F$  transeunte, non secus quàm si incidissent in planum  $AB$ , advenientes in obliquissimâ lineâ  $ix$ ; & longitudines radiorum, punctis refringentibus dictoque perpendicularo interceptorum, sunt ut sinus incidentiæ & refractionis ad singula plana, quæ respiciunt. Quarum assertionum demonstrationes, cum facile eruantur è prædictis, prætermitto, ne nimius in hac re videar.

### S E C T I O T E R T I A.

#### De Planorum Refractionibus.

POSITIS Refractionum legibus radiorum per diversa Media tractorum, affectiones aliæ jam tradendæ sunt; & primò refractiones Planorum in gratiam doctrinæ de Coloribus, post explicandæ, describam; deinde Sphæricarum & aliarum Superficierum proprietates enarrabo; tum ut Colorum exinde ortorum phænomena detegantur, tum ut Instrumentorum, Opticis usibus intervenientium, constructio rectius innotescat. Imprimis autem Plani Solitarii refractiones, deinde Planorum Refractiones iteratas considerabo.

De Plani Solitarii refractionibus.

Quod ad radios ejusdem cujuscunque generis attinet, passiones in Lectionibus Dris. Barrow (his fundamentis, quòd radii Lucis in similari Medio directi sunt; quòd eorum refractionis fit in super-

\* Barrow Lect. Opt. L. III. Art. 3.

† Ibid. Lect. III. Art. 4 & 6.

ficie

ficie ad Medii refringentis superficiem perpendiculari; & quòd sinus incidentiæ perpetuò sunt proportionales sinibus refractionum in aliud Medium similem factarum) traduntur; & idcirco sufficiet aliquas, sub formâ Lemmaticarum Propositionum, sine demonstrationibus hîc recensuisse.

#### P R O P. I.

\* *Radii cujuscunque refracti Incidens incidentis vicissim fit Refractus.*

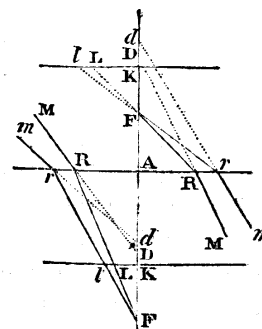
#### P R O P. II.

† *Angulo incidentiæ equali equalis, & majori major convenit, tum angulus refractionis, tum refractus, & contrà.*

#### P R O P. III.

‡ *Incidentium radiorum Refractus exhibere.*

Instantiam in radiis ad Medium densius è rariori divergentibus accipe.



Sit  $F$  punctum radios  $FR, Fr$  aliosque innumeros versus refringentem superficiem,  $AB$ , ejaculans; sitque  $FA$  radius perpendicularis, quem produc ad  $K$ , ut sit  $AF$  ad  $AK$ , sicut sinus refractionis ad sinum incidentiæ; & ad  $K$  erige perpendicularum  $KL$ . Quo facto, radios quoslibet incidentes  $FR, Fr$  retrorsum produc, donec præfatæ  $KL$  occurrant in  $L$  &  $l$ : & in angulo  $FAR$  inscribe  $RD=RL$ , &  $rd=rl$ . Quibus versus  $M$  &  $m$  productis, habebis refractos radios  $RM$  &  $rm$ , & eadem ratione refractos quamplurimos confestim duces.

#### P R O P. IV.

*Radium datæ rectæ parallelum designare, cujus Refractus per datum punctum transibit.*

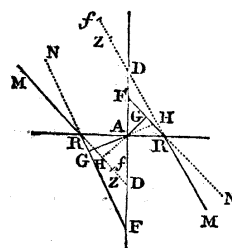
Sit  $AB$  superficies refringens,  $M$  punctum datum, &  $GH$  recta

‡ Ibid. L. IV. Art. 5.

cl. i



beat: vel potius, cum spatium  $fd$  sit unicus tantum puncti  $F$  imago, debemus unicum aliquod in eo punctum, quod omnis lucis ab eo versus oculum pergantis medietullium occupet, inter puncta  $d$  &  $f$  in mediâ circiter distantia interiacens, pro sensibili imagine statuere. Puncti verò illius accurata determinatio, cum omnium radorum ab  $F$  versus oculi pupillam refractorum habenda sit æstimationio, Problema solutu difficillimum præbebit; nisi hypothesi alicui saltem verisimili, si non accuratè veræ, innitatur assertio. Quemadmodum, cum radii æquè multi à termino  $d$  aliisque vicinis punctis, ac à termino  $f$  aliisque punctis similiter sibi vicinis, versus Oculum videantur profluere; locus Imaginis ita debet in medio istorum terminorum statui, ut angulus, quem radii duo à  $d$  &  $f$ , ad idem quodpiam pupillæ punctum convergentes, includant, à radio ab illo visionis loco ad idem pupillæ punctum pergente, quàm proximè semper bifecetur. Quâ hypothesi admittâ, nihil



aliud agendum est, quàm ut fiat  $mf + md$ .  $md :: fd$ .  $zd$ , & erit  $z$  locus visionis puncti  $F$  quæsitus, posito nempe quòd  $m$  sit locus oculi. Nam cum ponatur  $mf + md$ .  $md :: fd$ .  $dz$ , erit divisim  $mf$ .  $md :: fz$ .  $dz$ , & proinde ductis tribus lineis à  $f$ ,  $d$ , &  $z$  ad  $m$ , vel potius ad punctum quodpiam huic  $m$  indefinitè vicinum; angulus, quem externæ duæ continent, ab interjacente lineâ (per 3. 6. Elem.) quàm proximè semper bifecabitur.

54. His paucis circa radios homogeneos in gratiam sequentium obiter notatis, ut eorum penitior cognitio habeatur, Lectiones, quas Vir Reverendus D<sup>r</sup>. Barrow de iisdem fufius composuit, consulendas esse hortor; deque heterogeneis five dissimiliter refrangibilibus radiis pergo actutum differere.

## P R O P. IX.

*E radiis diverfi generis, à puncto lucido fluentibus, soli possunt ad aliud commune punctum refringi, qui jacent in plano per utrumque punctum transeunte, et ad planum refringens perpendiculari.*

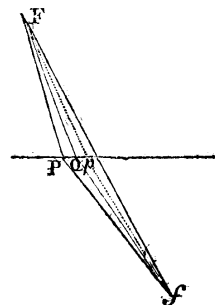
Utpote cum radii cujusque refractionis semper fiat in plano ad Medii

Medii refringentis superficiem perpendiculari, & ejusmodi duo REFRAC-  
TIONIBUS.

## P R O P. X.

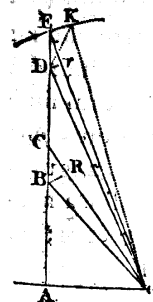
*Si radiis diverforum generum à dato puncto fluentibus, quorum refracti ad aliud punctum datum convergunt, illi magis à lineâ rectâ, punctis concursuum sive radiationum centris, interjacente divaricant, qui sunt magis refrangibiles.*

Sint  $FPf$ ,  $FQf$  radii dissimiles, hinc & inde convenientes in  $F$  &  $f$ ; & manifestum est, quòd non penitus coincident, quia sic par esset refractionis hypothesin. Neque radius magis refrangibilis potest esse rectæ  $ff$  propior. Sic enim propter obliquitatem ex parte Medii densioris majorem, major esset ejus refractionis per Prop. II. & hypothesin, hoc est, angulus  $FPf$  esset minor angulo  $FQf$  contra 21. 1. Elem. Restat itaque, ut sit magis refrangibilis  $FPf$ , qui à rectâ  $ff$  magis divaricat.



## L E M M A I.

*Quatuor lineis,  $GB$ ,  $GC$ ,  $GD$ ,  $GE$ , à dato puncto,  $G$ , ad datam lineam,  $EB$ , ita ductis, ut sit  $GB \cdot GC :: GD \cdot GE$ ; angulus  $BGC$ , quem minima,  $GB$ , cum alterutra intermediarum,  $GC$ , constituit, major est quàm angulus  $DGE$ , ab alterâ intermediâ,  $GD$ , & maximâ,  $GE$ , constitutus.*



Nam centro  $G$ , radio  $GE$ , describatur circulus  $EK$ , & radius  $GK$  ducatur, constituens angulum  $DGK$  æqualem angulo  $BGC$ , & puncta  $K$ ,  $D$  jungantur; eruntque triangula  $GDK$ ,  $GCB$  similia, propter æquales angulos ad  $G$ , & latera circa illos proportionalia. (6. 6. Elem. & Hypoth.) Nempe  $GB \cdot GC :: GD \cdot (GE) GK$ . Quare angulus  $KDG = \text{ang. } CBG$ . Sed  $\text{ang. } EDG$  (16. 1. Elem.)  $> \text{ang. } CBG$ . Ergo linea

P p. 2

 $KD > EB$

DE  
PLANORUM

$KD > ED$  (7. 3. Elem.) & ang.  $KGD >$  ang.  $DGE$  (25. 1. Elem.) hoc est, ang.  $CGB >$  ang.  $EGD$ . Q. E. D.

## L E M M A II.

*Positis istis angulis infinitè parvis, ac GA perpendiculari ad lineam EB demissâ, erit ang.  $EGD$ . ang.  $CGB :: BA. DA$ .*

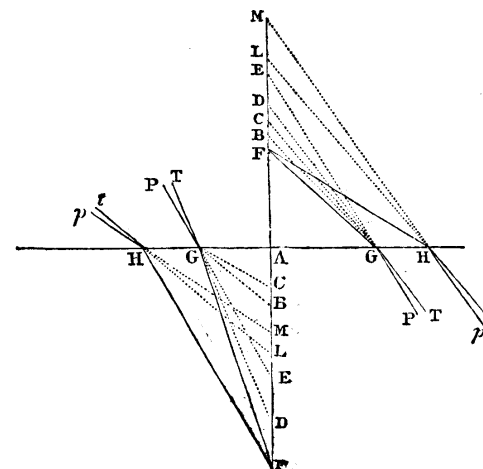
A punctis enim B & D ad lineas GC, GE demittantur normalia BR ac DR; & erunt anguli præfati ad se invicem ut est  $\frac{Dr}{DG}$  ad  $\frac{BR}{BG}$ , ponendo nempe lineas istas, BR ac DR, æquipollentes esse arcubus infinitè parvis, quibus anguli isti subtenduntur. Est autem  $BG.CG :: DG. EG$  ex hypothesi; & divisim,  $BG. CR :: DG. ER$ . Item propter similia triangula BAG, CRB, est  $BA. AG :: CR. BR$ ; & pari ratione  $EA$  vel  $DA. AG :: ER. DR$ , sive  $AG. DA :: DR. ER$ . Quamobrem addendo rationes æquales, est  $BA. AG + AG. DA (:: BA. DA) :: CR. BR + DR. ER$  (& permutatis terminis posteriorum rationum)::  $CR. ER + DR. BR$  (& æquipollente ratione pro  $CR. ER$  substitutâ)::  $BG. DG + DR. BR$  (terminisque ad invicem applicatis)::  $\frac{Dr}{DG} \cdot \frac{BR}{BG}$ . Est itaque  $BA. DA :: \frac{Dr}{DG} \cdot \frac{BR}{BG}$ , h. e. ut ang.  $EGD$  ad ang.  $CGB$ . Q. E. D.

## P R O P. XI.

*Heterogeneis radiis secundum eandem lineam incidentibus, quo obliquior est eorum incidentia, cæteris paribus, eo major erit differentia refractionis.*

Sit FG linea secundum quam duo radii incident; quorum unus, maximè refrangibilis, pergat versus P; & minimè refrangibilis versus T: eritque angulus PGT differentia refractionis. Item esto FH linea obliquior quàm FG; & secundum hanc alii duo ejusmodi radii incident; quorum maximè refrangibilis versus p, & minimè refrangibilis versus t refringitur: & similiter erit angulus pht eorum differentia refractionis. Dico jam, quòd sit angulus  $pht > PGT$ . Demittatur enim FA ad refringens planum linea normalis, quæ refractos radios retroactos secet in D & E, L & M; & ad hanc à puncto G ducatur duæ lineæ, GB, GC, ipsis HL, HM parallelæ.

lelæ. Jam, cum tres lineæ GF, GD, GE (ex naturâ refractionis antè descriptâ § 27, 28 & seq.) sint in ratione datâ; & alteræ tres HF, HL, HM in eadem ratione, proportionales erunt HL. HM ::



GD. GE. Sed est HL. HM :: GB. GC, propter triangula similia LMH & BCG. Quare GB. GC :: GD. GE, adeoque ang.  $BGC >$  ang.  $DGE$  per Lemma I. hoc est; ang.  $LHM >$  ang.  $DGE$ ; sive ang.  $pht >$  ang.  $PGT$ . Q. E. D.

55. Cæterum, ut de mutuis angulorum PGT & pht proportionibus habeatur plenior determinatio, dico præterea, quòd sunt inter se quàm proximè ut lineæ AB & AD; segmenta nempe basium triangulorum æquialtorum, quorum alterum, EGD, constituitur à radiis GP ac GT, cum perpendiculari AF concurrentibus; & alterum, CGB, sit simile triangulo MHL, à radiis Hp & Ht similiter constituto. Nam anguli EGD & CGB, si essent infinitè parvi, forent inter se ut AB & AD per Lem. II. At isti ex hypothesi sunt æquales angulis PGT & pht. Quare etiam illi PGT & pht, modò essent infinite parvi, forent itidem ut AB ad AD; & pari ratione constat, quòd sunt quàm proximè ut AC ad AE. Scilicet eorum ratio has duas rationes semper intercedit, & ideo veritatem adhuc propius assequemur adhibendo rationem intermediam. Nempe quòd est PGT ad pht ut AB+AC ad AD+AE, vel ut  $\sqrt{AB \times AC}$  ad  $\sqrt{AD \times AE}$  proximè.

P R O P.

DE  
PLANORUM

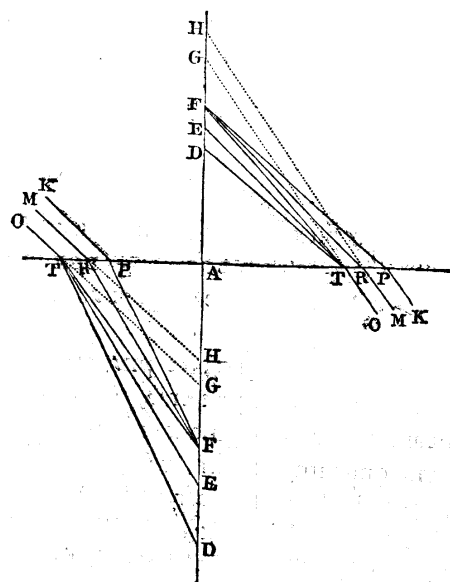
## P R O P. XII.

*Radios diversorum generum, à dato puncto profluos, designare, quorum refracti per aliud punctum datum transibunt.*

Cum punctorum alterutrum infinitè distet, ut radii ex eâ parte existent paralleli; res per Prop. IV & V. absolvitur, & per Prop. VI. cum utrumque infinitè distat.

*Scholium.*

56. E re erit, ut ostendam, quomodo ex datâ alicujus radii positione cæteri omnes expeditius determinentur.



perpendicularo DA occurrentibus in O & H, erit  $I. T :: T O. T F$ ; & præterea, cum sit  $T. R :: T F. T E$  (hyp.) erit ex æquo  $I. R :: T G. T E$ . Sed est  $I. R :: R H. R F$ . Ergo  $T G. T E :: R H. R F$ ; atque adeo, cum TE & RF parallelæ sunt (ex hyp.) erunt etiam TG & RH parallelæ. Q. E. O. Deque radii FX parallelismo confirmabile est ratiocinium.

*Caf.*

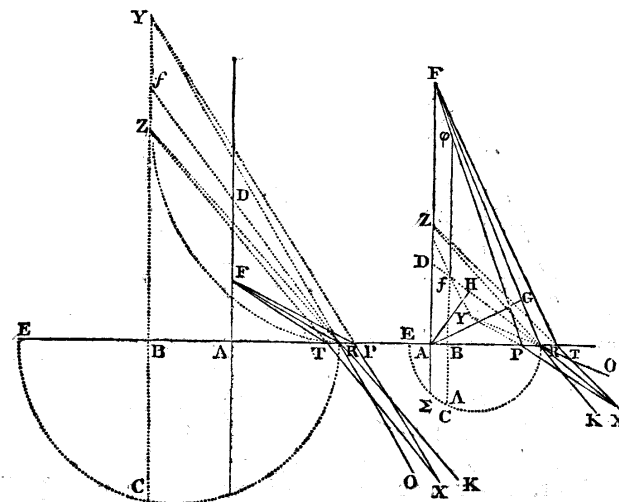
## SECT. III.

## O P T I C Æ.

*Caf. 2.* Si parallelis incidentibus refracti ad datum punctum convergant, propositum nihil secus exequaris, ut è Prop. I. patet. REFRACTIONIBUS.

*Caf. 3.* Denique si divergant incidentes, & refracti convergant, Problema solidum est; sed ad planum quodammodo reducitur fingendo differentiam refrangibilitatis infinitè parvam esse: quæ cum semper sit admodum exigua, solutionem ex istâ hypothesei haud gravatim exhibebo.

Pone FRX radium esse positione datum, & radios FPX, FTX (quorum datæ sunt sinuum incidentiæ & refractionis rationes)

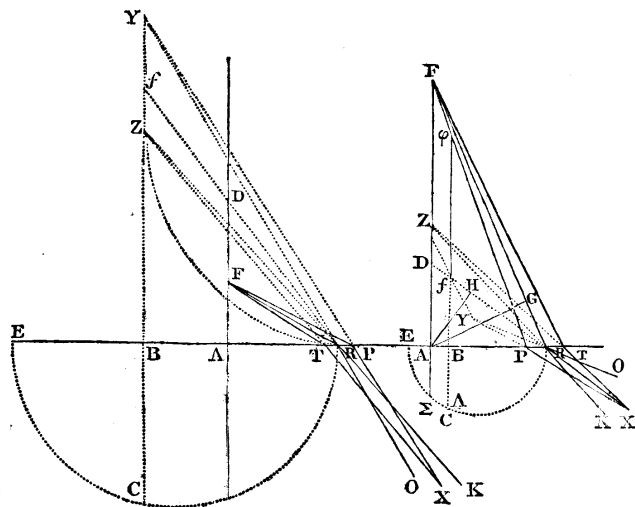


punctis F & X interfrendos esse. Jam alios etiam radios, æquè refrangibiles ac radios FP, FT, finge secundum lineam FR incidere, & refractos eorum RO, RK (ope Prop. tertiæ) describe; centraque radiationum, Y & Z, per Prop. VIII. quære; ac junge YX ac ZX refringenti occurrentes in P ac T. Dico factum. Nempe FPX, FTX esse radios, quos oportuit designare. Nam, cum ex hypothesei, differentia refrangibilitatis, adeoque distantia punctorum T, R & P, sit indefinitè parva, constat homogeneos radios, RO, PX, sibi mutuo vicinissimos esse, & inde ab eodem radiationis puncto Y divergere. Rectè ita determinavi radium PX per radii RO centrum radiationis transiturum esse, deque radio TX per est ratio.

57. Verum

DE  
PLANORUM

57. Verum enimvero, cum anguli  $PXT$  determinatio eo spectet, ut noscatur, quanta sit Objectorum, mediante refractione visorum, propter inæquabiles abfimilium radiorum refractiones confusio, perque quantum spatium colores inde emergentes extenduntur; quemadmodum pateat, concipiendo  $F$  esse punctum lucidum, quodd, oculo in  $x$  constituto, per totum angulare spatium  $PXT$ , quod radiis  $PX$  ac  $TX$  maximè minimèque omnium refrangibilibus com-



prehenditur, dilatatum ac diffusum appareat: de magnitudine ejus pauca adjiciam. Finge lineam curvam  $YFZ$  descriptam esse, in qua radiationum centra radiorum omnigenorum jacent, secundum lineam  $FR$  incidentium, & ita refractorum in puncto  $R$ , ut per totum angulum  $KRO$  divaricent; & ista Curva non malè assimilabitur Objecto lucido, cujus angulus visibilis, sive apparens magnitudo, ad oculum in  $x$  situm, sit  $YXZ$ , ac distantia ab eodem oculo, ad meditullium ejus æstimata,  $fx$ . Et hinc confectatur.

I. Quod (cum rei visibilis apparens magnitudo penè sit reciproce ut distantia ejus) stante puncto  $F$ , & puncto  $x$  in lineâ  $RX$  ubicunque sumpto, angulus  $PXT$ , sive  $YXZ$  penè erit reciproce ut longitudo  $fx$ . Et hinc intervallo  $RX$  diminuto angulus  $PXT$  auge-

tur, ejusque quantitas in quâlibet puncti  $x$  distantia dabitur, si REFRACTIONIBUS.

II. Quinetiam angulo  $ORK$  cognito, cognoscitur angulus quilibet  $PXT$ , fumendo eum in ratione ad  $ORK$ , quam habet  $Rf$  ad  $x$ ; quippe cum  $YRZ$  (cui  $ORK$  æquatur) sit Objecti  $y/z$ , in distantia  $fr$ , apparens magnitudo.

III. Cum itaque angulus  $ORK$ , pro quâlibet obliquitate radiorum juxta  $RF$  incidentium, supra in Schol. ad Prop. XI. determinatus habeatur, & punctum  $f$  haud difficilè inveniatur; faciendo juxta Prop. VIII. ut sit  $RF. Rf :: \frac{AFq}{RF} \cdot \frac{ADq}{RD}$ , satis constat anguli  $PXT$  inventio.

IV. At ex abundanti subnoto prædictam Curvam  $y/z$ , in qua radiorum omnis generis, in puncto  $R$  refractorum, Radiationum centra locantur, esse Cissoïdem vulgarem, sive Diocleam, circulo accommodatam, cujus diameter  $RE$  sit ad  $AR$  ut  $FRq$  ad  $AFq$ . Nam super diametro  $RE$  descripto circulo isto  $RCE$ , agatur quævis recta  $fbc$  normalis ad  $RE$ , Circuloque in  $c$  & Curvâ in  $f$  terminata. Et propter analoga latera similibus triangulorum  $RAD$ ,  $RBf$ , erit  $ADq. AR \times DR :: Bfq. BR \times fR$ ; & applicando posteriorem rationem ad  $BR$ , fiet  $ADq. AR \times DR :: \frac{Bfq}{BR} \cdot fR$ . Rursusque ducendo consequentes rationum in  $Rf$ , & applicando ad  $AR$ , orietur,  $ADq. DR \times Rf :: \frac{Bfq}{BR} \cdot \frac{Rf}{AR}$ . Est autem  $\frac{AFq}{FR} \cdot \frac{ADq}{DR} :: RF. Rf$  ut priùs; & consequentibus in  $DR$  & antecedentibus in  $FR$  ductis, oritur  $AFq. ADq :: FRq. DR \times Rf$ ; & vicissim  $AFq. FRq :: ADq. DR \times Rf$ . Quamobrem rationes eidem tertiæ congruentes connectendo, habebitur  $\frac{Bfq}{BR} \cdot \frac{Rf}{AR} :: AFq. FRq$ ; ducendoque antecedentes rationum in  $BR$ , & consequentes in  $AR$ , prodibit  $Bfq. Rf :: AFq \times BR. FRq \times AR$ ; & insuper applicando posteriorem rationem ad  $AFq$ , fiet  $Bfq. Rf :: BR. \frac{FRq \times AR}{AFq}$ . Sed cum posuerim  $RE. AR :: FRq. AFq$ , erit  $\frac{FRq \times AR}{AFq} = RE$ ; & proinde  $Bfq. Rf :: BR. RE$ , ac divisim  $Bfq. Rf - Bfq. (BRq) :: BR. BE$ . Atqui, ex naturâ circuli est  $BC$  media proportionalis inter  $BR$  &  $BE$ ; adeoque est  $BR. BE :: BRq. BCq$ , & proinde  $Bfq. BRq :: BRq. BCq$ , sive  $Bf. BR :: BR. BC$ : quod indicat Curvam esse Cissoïdem, sicut ostendendum proposui <sup>(d)</sup>.

58. Re-

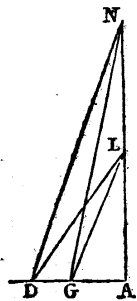
<sup>(d)</sup> Quod tamen magis geometricè ad hunc serè modum ostendatur. A puncto  $A$  in radios, incidentem  
Vol. III. Qq

DE  
PLANORUM

58. Refractionibus ad superficiem, data duo Media discriminantem, tranfactis, ad explorandum quid, ex auctâ alterius Medii raritate vel densitate, consequitur, sive ad diversorum Mediorum effectus inter se conferendum, jam animum adjicio.

## L E M M A III.

Si a duobus punctis, D, G, in lineâ quâpiam AD sitis, ad alia duo puncta, L, N, in ejus perpendiculari sita, ducantur quatuor rectæ, DN, DL, GN, GL, ratio ductarum ad punctum remotius N magis accedit ad equalitatem, quam ratio ductarum ad vicinius punctum L; sive est  $GN : DN > GL : DL$ .



Sit enim  $GN : DN :: GL : R$ , & erit  $GNq : DNq :: GLq : Rq :: GNq - GLq : DNq - Rq$ . Quare, cum sit  $DN > GN$ , sive  $DNq > GNq$ , erit  $DNq - Rq > GNq - GLq$ . Verum est  $GNq - GLq = DNq - DLq$  (§ 48.) & ideo  $DNq - Rq > DNq - DLq$ , hoc est  $DLq > Rq$ , sive  $DL > R$ . Atque adeo, cum supponatur  $GN : DN :: GL : R$ , erit  $GN : DN > GL : DL$ . Q. E. D.

## P R O P. XIII.

Posito Radium diversi generis communi sinu Incidentiæ, quo magis diversa est Mediorum densitas, eo major erit inæqualitas rationis sinuum Refractionis.

Sit  $fc$  radius è minimè refrangibilibus utcumque in superficiem  $ac$  incidentibus; sitque refractus ejus  $cl$ , qui retroactus secet perpendicularum  $fa$  in  $f$ . Dein captatur  $ae$ , ut sit  $Fe$  ad  $fc$  in datâ quâdam

cidentem refractumque,  $rf$ ,  $rd$ , demissis ad perpendicularum  $ag$ ,  $ah$ , erit  $rf$  ad  $rd$  ut  $fg$  ad  $dh$ , (Pröp. viii. Cas. 2.) Permutando  $rf : fg :: rd : dh$ . Rectangula igitur  $rf \times fg$ ,  $rd \times dh$  erunt inter se similia, & eam inter se rationem habebunt quam quadrata à lateribus homologis. Id est  $rf \times fg : rd \times dh :: rf^2 : rd^2$ .

Sed  $rf \times dh : rd \times dh :: rf^2 : rd^2$ .

Quare ex æquo  $rf \times fg : rd \times dh :: rf^2 : rd^2$ .

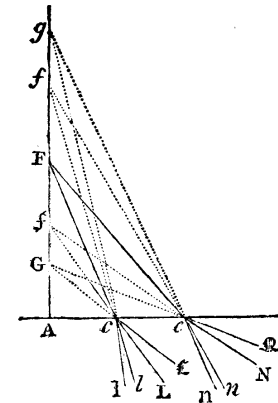
Id est, cum rectangula  $rf \times fg$ ,  $rd \times dh$  quadratis ex  $af$ ,  $ad$  singulatis sunt æqualia,  $af^2 : ad^2 :: rf^2 : rd^2$ .

Permutando  $af^2 : rd^2 :: ad^2 : rf^2$ .

Sed  $af^2 : rd^2 :: ar : re$ . (Id enim ponitur.)

Quare

quâdam ratione, qualem antea descripsimus (§ 46, 47 & 51.) hæc scilicet conditione, ut habito  $re$  pro radio maximè refrangibili, refractus ejus ab eodem puncto  $f$  divergat. Facto hoc, si pro posteriori Medio aliud utcumque densum rarumve substituatur, ejus-



modi duo radii secundum easdem rectas  $fe$ ,  $fc$  incidentes, semper debent ita refringi, ut ab eodem aliquo perpendiculari istius puncto similiter divergant (§ 47 & 49) quemadmodum à  $g$  versus  $l$  &  $n$ ; posito quòd hoc Medium posterius sit densitatis ab interiori magis diversæ, quàm alterum posterius Medium, quod efficiebat divergentes à  $f$ . Ostendendum est itaque, quòd major sit inæqualitas rationis sinuum refractionis in posteriori quàm in priori casu. Scilicet radii  $fc$  sinus incidentiæ est ad sinum refractionis ut  $fc$  ad  $fc$  (§ 49.) hoc est, ut 1 ad  $\frac{fc}{fc}$ . Et sic radii  $fen$  sinus isti sunt ut 1 ad  $\frac{fe}{fe}$ . Quare sinus refractionum eorundem radorum sunt inter se ut  $\frac{fc}{fc}$  ad  $\frac{fe}{fe}$ . Et simili discursu constabit, quòd radorum  $cl$ ,  $en$ , refractorum consimiles refractionum sinus sunt ut  $\frac{fc}{gc}$  ad  $\frac{fe}{ge}$ . Restat itaque probandum, quòd inter  $\frac{fc}{gc}$  &  $\frac{fe}{ge}$  major sit disproportiono quam inter  $\frac{fc}{fc}$  &  $\frac{fe}{fe}$ ; hoc est (cum sit  $\frac{fc}{fc} > \frac{fe}{fe}$  per Lem. III.) probandum restat, quòd sit  $\frac{fc}{gc} \cdot \frac{fe}{ge} > \frac{fc}{fc} \cdot \frac{fe}{fe}$ . Scilicet est  $ge \cdot fe < gc \cdot fc$ , per Lem. III. & sumendo reciproca rationum, erit  $\frac{1}{gc} \cdot \frac{1}{fe} > \frac{1}{fc} \cdot \frac{1}{fe}$ ; ducendoque priorem rationem in  $fe$ , &

Quare  $ar : re = ad^2 : rf \times rd$ .

Invertendo  $re : ar = rf \times rd : ad^2$ .

Sed, propter rectas  $ad$ ,  $fb$  inter se parallelas, erit  $ar : re = ad : fb = ad^2 : fb \times ad$ .

Cum igitur sit  $re : ar = rf \times rd : ad^2$ .

Et  $ar : re = ad^2 : fb \times ad$ .

Ex æquo erit  $re : re = rf \times rd : fb \times ad$ . Id est (propter rectangula  $rf \times rd$ ,  $fb \times ad$  inter se similia)  $re : re = rf^2 : fb^2$ . Dividendo  $eb : re = eb^2 : fb^2$ .

Sed propter circulum  $eb : re = eb^2 : re^2$ .

Quare  $eb^2 : re^2 = eb^2 : fb^2$ . Et  $eb : re = re : fb$ . Erit igitur punctum  $f$  ad Circularem à circulo  $ebc$  generatam. Q. E. D.

Q q 2

posteriorem,





DE  
PLANORUM

refractio, eo major erit angulus refractus. In fig. pag. 295. ubi est  $FR. RD :: FR. rd$ , erit angulus  $Frd > \text{ang. FRD}$ .

Cor. 2. Hinc etiam si sit  $AG. AB > AC. Ab$ , multo magis erit angulus  $BAG > bac$ . Hoc est in genere, quo majores sunt subtensæ, & simul, quo major est inæqualitas rationis earum, eo major erit differentia angulorum, quos subtendunt. Atque idem de sinubus & eorum angulis, utpote subtensarum & eorum angulorum dimidiis, intellige.

## L E M M A VI.

*Insuper si arcus  $cd$  ipsi  $bc$  capiatur æqualis, & AD inscribatur circulo ABD, quæ sit ad ad sicut  $AG$  ad  $AC$ ; cæteris stantibus, dico, quod arcus  $DG$  erit arcu  $GB$  major.*

Nam centro A, radio AD describe circulum DKE, circulo ABg occurrentem in K, & rectæ AB in E, & AK ducatur. Jam cum AK, Ag & AB circulo ABgK similiter inscribantur, atque Ad, Ac & Ab ipsi Abc, erit arcus  $gK = \text{ar. } bg$ ; quare demissa gL ad BE perpendiculari, & productâ donec secet arcum BD in F, ista gL per Lem. 4. bifecabit tum rectam BE, tum arcum DB. At quoniam gF ex constructione jacet extra circulum gG, punctum F cadet inter G & D. Quare  $DG > DF$ , five  $> FB$ , & multo magis  $> GB$ . Q. E. D.

Cor. 1. Hinc, si arcus  $bd$  non tantum duabus sed quotcumque partibus æqualibus constet, correspondentes partes arcus BD, à termino B ad terminum D, sese gradatim superabunt longitudine. Adeoque si arcus  $bc$  ad arcum  $cd$  habeat quamcunque rationem commensurabilem, erit arcus GD. arc.  $BG > \text{arc. } cd$ , arc.  $bc$ ; siquidem numeris æqualium partium, mensurantium arcus  $bc$  &  $cd$ , correspondent consimiles numeri partium inæqualium constituentium arcus BG ac GD; quarum illæ in GD sunt omnes parte maximâ ipsius BG majores. Quinetiam, si  $bc$  ad  $cd$  habeat quamcunque rationem incommensurabilem, erit itidem GD.  $BG > cd. bc$ . Nam rationum similitudines, quæ quantitibus commensurabilibus conveniunt indefinitè, eo nomine conveniunt etiam incommensurabilibus similiter affectis, quemadmodum ex Euclidæ definitione similium rationum ostendi potest. Sed facilius deprehenditur

## SECT. III.

## O P T I C Æ.

henditur imaginando quantitates, quas vocant incommensurabiles, posse numerari per partes indefinitè parvas, & sic ad naturam commensurabilium, præsertim quoad rationum habitudines, quodammodo reduci.

Concipias itaque arcum  $bc$  in æquales & indefinitè multas partes dividi, & ejusmodi tot sumi, quæ minus quam unâ parte (hoc est, indefinitè parvâ) differunt ab arcu  $cd$ , atque adeo ipsi pro more consueto censeantur æquales; concipe etiam BD in partes æquales, ut antè definivi, correspondentibus partibus ipsius  $bd$  dividi; & propter tot inæquales partes, majores quidem in GD & minores in BG, quot sunt æquales in  $cd$  &  $bc$ ; erit GD.  $BG > cd. bc$ .

Cor. 2. Hinc præterea componendo sequitur, esse BD.  $BG > bd. bc$ , nec non GD.  $BD > cd. bd$ .

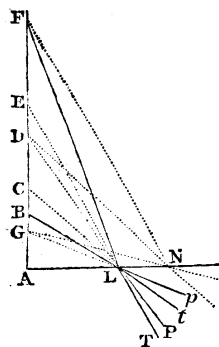


Cor. 3. Confectatur denique, quod ductis utcumque partibus subtensis  $Ab, Ac, Ad, Ae$ , & aliis quatuor AB, AG, AD, AE, quarum singulæ ad priorum singulas eandem rationem observant (nempe  $AB. Ab :: AG. Ac :: AD. Ad :: AE. Ae$ ) si AE sit omnium maxima, & Ab minima, erit arcus ED. arc.  $GB > \text{arc. } ed$ . arc.  $cb$ . Nam per Corol. 1. hujus, est ED.  $DG > ed. dc$ , & DG.  $GB > dc. cb$ , & multo magis ED.  $GB > ed. cb$ . Haud secus patet esse arcum EG. arc.  $DB > \text{arc. } ec$ . arc.  $db$ ; scilicet ex Corol. 2. hujus est EG.  $DG > ec. dc$ , ac DG.  $DB > dc. db$ , & multo magis EG.  $DB > ec. db$ . Denique, quæ de subtensis & earum arcubus dicta sunt, possunt etiam de sinubus & eorum arcubus aut angulis intelligi.

## P R O P. XIV.

*Heterogeneis radiis è densiori Medio in rarius, secundum eandem datam lineam, in superficiem positione datam incidentibus; quo rarius sit Medium, in quod radii refringuntur, eo major erit differentia refractionis.*

Sit FL linea, secundum quam duo radii incidunt in superficiem AL, quorum maximè refrangibilis refringatur ad P, & minimè refrangibilis ad T. Dico, quod, si Medium rarius foret adhuc magis



## L E C T I O N E S PAR. I.

magis rarum, ut refringeret maximè refrangibilem radium ad  $p$ , & minimè refrangibilem ad  $t$ , tunc angulus  $PLT$  foret major angulo  $PLT$ . Demittatur enim  $FA$  ad refringentem superficiem normalis, quæ secet refractos radios retrorsum ductos in  $G, C, D$  &  $E$ . Deinde in refringente superficie quærat tale punctum  $N$ , ut sit  $FN. DN :: FL. EL$ ; ac  $DN$  productus erit refractus radii minimè refrangibilis, incidentis ab  $F$  ad  $N$  (§ 49.) Jam, cum talis supponatur positio  $FL$  &  $FN$ , ut

radii maximè refrangibilis secundum  $FL$  & minimè refrangibilis secundum  $FN$  incidentis, refracti,  $DL$  ac  $DN$ , divergant à puncto  $D$ , quod situm est in perpendiculo  $FA$ : eâ de causâ, licet raritas Medii, in quod refractionis peragitur, foret alia quàm supponitur, tamen ejusmodi radiorum, secundum easdem lineas  $FN$  &  $FL$  incidentium, refracti semper divergerent ab aliquo puncto, quod in eadem  $FA$  sit positum, quemadmodum in præcedentibus ostensum est (§ 51). Sic cum raritas dicti Medii talis esse supponitur, ut maximè refrangibilis radius, secundum  $FL$  incidens, refringatur à puncto quopiam  $G$ ; tunc minimè refrangibilis, secundum  $FN$  incidens, refringetur ab eodem  $G$ . Sed cum maximè refrangibilis radius supponebatur à puncto  $G$  refringi, tunc etiam minimè refrangibilis, secundum eandem lineam  $FL$  incidens, supponebatur refringi à puncto  $C$ . Quare est  $GN. FN :: CL. FL$  (§ 27 & 49.) & præterea, cum antea posuerim esse  $FN. DN :: FL. EL$ , ex æquo erit  $GN. DN :: CL. EL$ . Sed per Lemma 3. est  $GN. DN > GL. DL$ ; adeoque  $CL. EL > GL. DL$ . Quare si linea quædam  $BL$  ita ducatur, ut sit  $CL. EL :: BL. DL$ , erit  $BL > GL$  propter majorem rationem, quam habet ad  $DL$ : & insuper erit  $CL$  major  $BL$ , eo quod sit  $EL > DL$ ; & proinde punctum  $B$  cadet inter  $G$  &  $C$ , eritque angulus  $GLC > ang. BLC$ . Cum verò sit  $CL. EL :: BL. DL$ , aut vicissim  $BL. CL :: DL. EL$ , erit angulus  $BLC$  major angulo  $DLE$  (Lem. 1.) & multo magis ang.  $GLC > DLE$ . Q. E. D.

P R O P.

## SECT. III.

## O P T I C Æ.

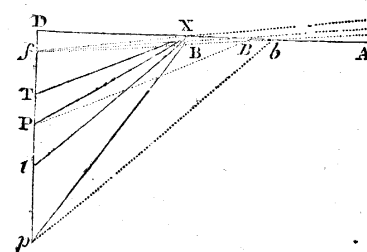
## P R O P. XV.

*Heterogeneis radiis è Medio densiori in rarius, secundum eandem datam lineam, in superficiem positione datam incidentibus; quo densius est Medium, è quo radii incident, eo major erit differentia refractionis.*

Silicet (propter majores refractiones) eo majores erunt sinus refractionum respectu dati circuli, ad quem referuntur; & simul eo major erit inæqualitas rationis istorum sinuum per Prop. XIII. adeoque eo major erit differentia angulorum, quos subtendunt per Corol. 2. ad Lem. v. hoc est, eo major differentia refractionis. Q. E. D.

## P R O P. XVI.

*Heterogeneis radiis è Medio rariori in densius, secundum eandem datam lineam, in superficiem positione datam incidentibus; quo rarius est Medium, è quo radii incident, eo major erit differentia refractionis.*



Sit  $AD$  superficies, in quam duo radii secundum eandem lineam datam,  $IX$ , incident; quorum alter, maximè refrangibilis, refringatur ad  $p$ ; & alter, minimè refrangibilis, ad  $r$ . Dico, quod, si Medium, ex quo radii incident, foret adhuc rarius, ut dictos radios adhuc magis

refringeret, puta maximè refrangibilem versus  $p$ , & minime refrangibilem versus  $r$ , tum  $pxt$  major angulus evaderet, quam  $pxt$ . Id quod gradatim sic demonstratio.

Cas. I. Ponamus primò, quod recta  $IX$ , secundum quam radii incident, sit ad refringentem superficiem obliquissima; ac ducatur quælibet recta,  $PD$ , eidem superficiem normaliter insistens in  $D$ , & secans refractos radios in punctis  $T, P, t, p$ , &  $IX$  producat donec istam  $PD$  secet in  $f$ ; tum in lineâ  $AD$  quærat punctum

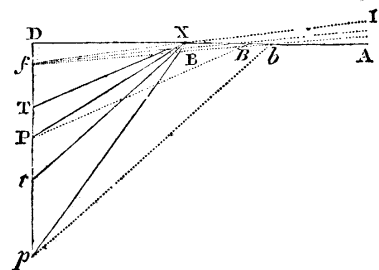
Vol. III.

R r

quoddam

DE  
PLANORUM

quoddam B hâc lege; ut ductis Bf, BP, fiat  $xf \cdot XT :: Bf \cdot BP$ . Li-  
quet ergo, quòd, si minimè refrangibilis radius incidat in B ver-

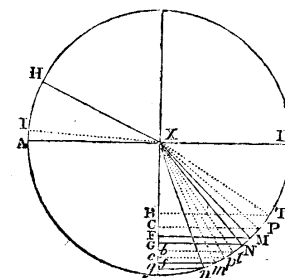


sus  $f$  tendens, is debet versus  $p$  refringi; quippe cùm ex hypo-  
thesi sit  $BP \cdot Bf :: XT \cdot xf$ , hoc est,  
sinus incidentiæ ejus & refractionis, sicut sinus incidentiæ &  
refractionis alterius minimè re-  
frangibilis radii  $ixt$ . Quam-  
obrem, si supponamus hosce  
radios retrocedere, alterum

nempe è minimè refrangibilibus à  $t$  ad  $x$ , & alterum à  $p$  ad  $B$ ,  
& maximè refrangibilem à  $p$  ad  $x$ , eorum omnium refracti tendunt  
à puncto  $f$ ; siquidem notum est Theorema, quòd radii, secundum  
refractum ejus retrò incidentis, incidens vicissim sit refractus.  
Jam, cùm radii diffformes  $PB$ ,  $PX$ , ab eodem puncto  $P$  manantes,  
refringantur ab eodem  $f$ , quòd situm est in perpendicularo  $PD$ ;  
proportione inter  $PX$  &  $PB$  semel cognitâ, si ab alio quovis ejus-  
dem perpendiculari puncto ad refringentem superficiem duæ ducan-  
tur lineæ eandem rationem habentes, hoc est, si una designans  
maximè refrangibilem radium sit ad alteram, quæ designat mini-  
mè refrangibilem radium, ut  $PX$  ad  $PB$ : tunc istorum refracti (ex  
antè demonstratis § 47) divergent ab aliquo etiam puncto, quòd  
situm est in eodem perpendicularo  $PD$ , utcunque Medium ex parte  
radii  $ix$  supponatur rarum; dummodo Mediorum alterum, ex  
parte radii  $px$ , eandem densitatem retineat. Quemadmodum, si  
maximè refrangibilis radius incidat secundum  $px$ , & refringatur à  
 $f$ , Medio scilicet versus  $ix$  jam posito rariori quàm antè; tum rectâ  
 $pb$  sic ductâ, ut sit  $PX \cdot BP :: px \cdot pb$ , radius etiam minimè refran-  
gibilis  $pb$  refringeretur ab eodem  $f$ . Unde sequitur, esse  $pb$  ad  $fb$  si-  
cut sinus incidentiæ radiorum minimè refrangibilium ad sinum  
refractionis, § 49. Ast in ratione istorum sinuum est etiam  $ix$   
ad  $fx$ ; eo quòd inflexa  $ixt$  designet radium æqualiter refrangibi-  
lem, cujus pars  $ix$  producta transit per idem  $f$ . Quare est  $pb \cdot fb ::$   
 $ix \cdot fx$ . Cùm verò radius  $ix$  supponatur esse ad refringentem su-  
perficiem summè obliquus, five in angulo infinitè parvo inclina-  
tus, adeo ut recta  $df$  pro infinitè parvâ, seu nullâ, haberi debeat;  
sequitur

sequitur esse  $DX = xf$ ,  $DB = Bf$ , ac  $Db = bf$ : quos valores pro  $xf$ ,  $Bf$  REFRACTIONEUS.  
&  $bf$  substituendo in suprâ recensitas proportionones  $BP \cdot Bf :: TX \cdot xf$ ,  
&  $pb \cdot fb :: tx \cdot fx$ , emergent  $BP \cdot BD :: XT \cdot XD$ , &  $pb \cdot Db :: tx \cdot DX$ .  
Ex quibus pateat rectas  $BP$  ad  $XT$ , &  $bp$  ad  $xt$  parallelas esse, an-  
guloisque  $BPX$  ad  $PXT$ , &  $bpX$  ad  $pxt$  æquales. Sed ex hypothesi  
est  $PX \cdot BP :: px \cdot pb$ , & proinde ang.  $bpX > \text{ang. } BPX$  per Corol. 1.  
Lem. v. hoc est, ang.  $pXt > \text{ang. } PXT$ . Q. E. D.

Caf. 2. Incidentibus verò radiis, angulum definitè magnum  
cum refringente superficie constituentibus, Propositum sic patebit.



Sit  $HX$  recta, secundum quam inci-  
dunt; & cùm è Medio minùs raro ad-  
veniunt, sit  $xm$  minimè refractus, &  
 $xN$  maximè refractus. Cùm verò ad-  
veniunt è magis raro, sit  $xm$  minimè re-  
fractus &  $xN$  maximè refractus. Ad-  
hibeantur etiam obliquissimi incidentes  
radii  $ix$  cum eorum refractis  $XT$ ,  $xP$ ,  $xt$   
&  $xP$ , quales jam descripsimus. Ita sci-

licet, ut, cùm tanta sit anterioris Medii raritas, ut radios  $HX$  in-  
curvari versus  $M$  &  $N$  faciat, tunc etiam consimiles radios  $ix$  in-  
curvet versus  $t$  &  $p$ . Cùm verò tanto major sit ejus raritas, ut  
illos cogat versus  $m$  &  $n$ , tunc hosce simul cogat versus  $t$  &  $p$ .  
Sit insuper  $APD$  circulus centro  $x$  & intervallo quolibet  $ax$  de-  
scriptus, qui secet hosce refractos radios in  $T$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $t$ ,  $p$ ,  $m$ ,  
 $n$ ; à quibus ad perpendicularum  $Bx$  demittantur sinus refractionum  
 $TB$ ,  $PC$ ,  $MF$ ,  $NG$ ,  $tB$ ,  $pC$ ,  $mf$ ,  $ng$ ; & ex lege refractionum patebit  
esse  $TB \cdot PC :: MF \cdot NG$ , &  $tB \cdot pC :: mf \cdot ng$ ; & insuper ex hypo-  
thesi & constructione patebit, esse  $TB$  sinuum istorum maximum  
&  $ng$  minimum. Adeoque per Corol. 3. Lem. vi. est ang.  $txp$ .  
ang.  $mxn > \text{ang. } txp$ . ang.  $mxn$ ; & permutando est ang.  $txp$ . ang.  
 $txp > \text{ang. } mxn$ . ang.  $mxn$ . Verùm ex ostensis in primo casu,  
est ang.  $txp < \text{ang. } txp$ . Quare & multo magis erit ang.  $mxn <$   
ang.  $mxn$ . Q. E. D.

De  
PLANORUM

## P R O P. XVII.

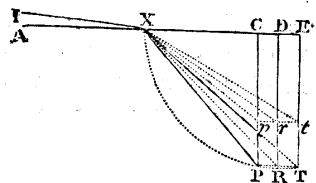
*Heterogeneis radiis è Medio rariori in densius, secundum eandem lineam, in superficiem positione datam incidentibus; quo densius sit Medium, in quod radii incidunt, eo major erit differentia refractionum ad certum usque terminum, & post eo minor perpetuo.*

Nam si Medium posterius densitate suâ valde parum superat anterius, ita ut refractiones indefinitè parvas efficiat, differentia refractionum erit etiam indefinitè parva; & proinde minor quàm foret, si Medium posterius supponeretur densius, ut refractiones evaderent majores. Quare auctâ Medii posterioris densitate, augebitur dicta refractionum differentia. Quòd si densitas ejus in infinitum augeatur, refractiones etiam, quantum poterunt, augebuntur; hoc est, usque dum omnes refracti radii perpendiculariter emergant, angulis refractionum & eorum differentiis tunc prorsus evanescentibus. Quare differentia refractionum rursus diminuta est, donec in nihilum evanuit.

*Scholium.*

Etsi limitis ejus determinatio, ubi differentia refractionis evadit maxima, plus tædii & laboris administrare possit, quàm utilitatis; cum tamen alicujus forte momenti censeatur densitatem Medii cognoscere, quod, radiis in se refractis, Colores maximè conspicuos efficiat, non pigebit hunc insuper designare, idque primò cum incidentia sit obliquissima.

*Cas. 1.* Esto  $ix$  communis radiorum in superficiem  $ax$ , quæcunque Media dirimentem, obliquissimè incidentium via; & eorum refracti, ut antè, sunt  $xp$  &  $xt$ ; & agatur recta quævis,  $pt$ , præfatæ superficiem parallela, quæ radiis istis occurrat in  $p$  &  $t$ ; à quibus ad  $ax$  demissis perpendicularibus,  $pc$ ,  $te$ , bisectetur  $ce$  in  $d$ ; & centro  $d$ , distantia  $dx$ , circulus describatur, secans  $cp$  in  $p$ , &  $et$  in  $t$ ; junganturque  $xp$  &  $xt$ . Dico, quòd, cum ea sit posterioris Medii densitas, ut radiorum secundum  $ix$  incidentium maximè refrangibiles ad  $p$ , & minimè



## SECT. III.

## O P T I C Æ.

minimè refrangibiles ad  $t$  refringat, tunc angulus  $pxt$  quàm maximus evadet. Etenim, utcunque Medium posterius ponatur densum, refracti radii ita lineas  $cp$  &  $ct$  in punctis  $p$  ac  $t$  secabunt, ut recta  $pt$  ipsi  $ax$  parallela sit. Quare, si ducatur linea  $dr$ , quæ lineas omnes  $pt$  bifecet, centrum cujuscunque Circuli per  $p$  ac  $t$  transeuntis, semper jacebit in eadem  $dr$ . At angulus  $pxt$  est angulus in segmento circuli per puncta  $p$ ,  $t$  &  $x$  transeuntis; qui ideo erit Maximus, cum ejusmodi circulus existit Minimus; propterea quòd ratio subtensæ  $pt$  ad circuli dimensiones tunc evadit maxima. Verum iste circulus fit omnium minimus, cum centrum ejus cadit in  $d$ ; siquidem pro semidiametro tunc habet  $xd$  minimam refractarum\*, quæ ab  $x$  ad  $rd$  duci possunt. Est ergo angulus  $pxt$  tunc maximus, cum centrum circuli transeuntis per puncta  $p$ ,  $t$  &  $x$  cadit in  $d$ ; adeoque, cum circulus  $xpt$  & angulus  $pxt$  ejusmodi sunt, liquet Propositum.

Hinc obiter pateat hunc angulum  $pxt$  tunc etiam Maximum evadere, cum talis est posterioris Medii densitas, ut angulus refractionis mediocriter refrangibilium radiorum obliquissimè secundum  $ix$  incidentium, sit semirectus; & eo minorem perpetim fieri, quo iste refractionis angulus à semirecto (excessu vel defectu) magis deviat. Quemadmodum, si refractiones ex Aere in Aquam, in Vitrum & in CrySTALLUM peractæ conferantur, è calculo patebit, quòd, cum angulus incidentiæ sit  $90^\circ$ . proximè tunc angulus refractionis in aquam erit major semirecto, inque vitrum erit minor. Quamobrem Aqua minus densa est, & Vitrum magis densum, quàm ut efficiant angulum  $pxt$  maximum. Et proinde, cum CrySTALLUM sit adhuc densius, efficiet istum  $pxt$  minorem, quàm Vitrum efficeret. Et sic Vitrum, etsi minus refringat, in isthoc tamen casu heterogeneos radios in se refractos magis ab invicem dissipabit quàm CrySTALLUM; eoque pacto Colores in oppositam ejus superficiem projicit magis distinctos. Sed hæc expertu sunt difficillima, quòd Vitrum & CrySTALLUM densitate parum differant, nec possint haberi satis crassa; & si possent, tunc propter maximam crassitiem haud forent satis perspicua.

*Cas. 2.* Quòd si linea, secundum quam incidunt radii, non sit maximè obliqua, Problema emergit Solidum. Sed lubet modum ostendere, quo conditionibus ejus nonnihil mutatis, ad Planum

\* Lege rectarum.

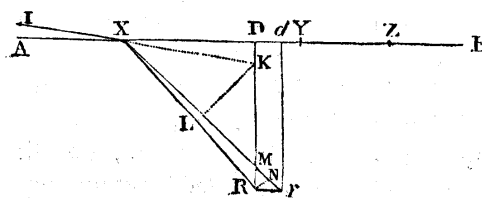
reduci

DE  
PLANORUM

reduci poterit. Sciendum est itaque, quòd, cùm inter extremos sex maximè difformes radios, innumeri sint intermedii, qui gradibus continuè successivis & infinitè parvis, alii magis aliis refringuntur, differentia radiorum extremorum conflata erit ex confimilibus intermediorum differentiis, numero & parvitate infinitis. Jam cognitis proprietatibus istarum infinitè parvarum differentiarum, possumus exinde de omnibus simul aggregatis, sive de differentiis finitè parvis, quales intercedunt extremorum refractionibus, judicium ferre; præsertim cùm istæ differentiæ sint admodum exiguæ. Sic cognito quòd infinitè parvæ differentiæ augentur, diminuuntur, vel simul maximæ evadunt aut minimæ, concludendum erit, quòd omnium summa perinde augetur, diminuitur, vel maxima fit aut minima. Quòd si non sint omnes simul maximæ vel minimæ, tamen summa pro maximâ vel minimâ haberi potest, cùm id accidit intermedię parti. Sic omnium colorum latitudo tunc maxima censeri possit, cùm id accidit Viriditati. Jam licet Problema propositum, cùm de differentiis finitè parvis agitur, existat Solidum, si tamen instituaturs de differentiis infinitè parvis ad Planum reduci potest. Verùm huic solvendo nolo obnixè incumbere, sed breviter tantùm ostendam, quo pacto calculus in hoc & ejusmodi aliis sit ineundus, ut ad æquationem perveniatur, ex quâ maximus angulorum infinitè parvorum possit elici. Et insuper ex eodem fundamento determinabo proportionem differentiarum refractionis respectu diversorum Mediorum, quas in præcedentibus quatuor Propositionibus generaliter tantùm descripsi.

59. Primo itaque investiganda est Regula vel æquatio, quæ, ex uno utcunque refracto radio dato, refractus alter, cum eo constituens angulum infinitè parvum, cognosci poterit.

Radii è Medio datâ densitate in Medium cujuslibet densitatis secundum obliquissimam lineam  $ix$ , ut priùs, incidentibus, sint  $xr$



&  $xr$  Refracti duo;  
quorum alter  $xr$  sit al-  
tero  $xr$  paulo magis re-  
frangibilis, differentiâ  
tamen infinitè parvâ; &  
agatur lineola quævis  
 $rr$ , his in  $r$  &  $r$  oc-  
currens

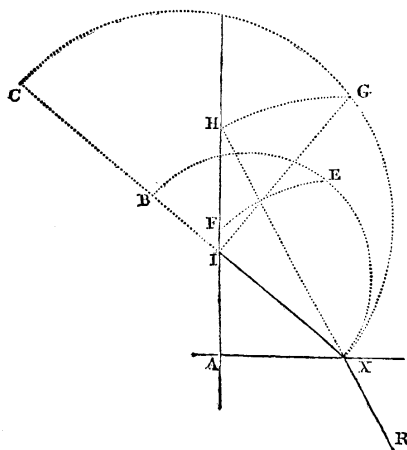
currens & refringenti superficiei parallela. Ad quam superficiem REFRACTIO-  
 normales etiam RD, rd demittantur; quas datam finitamque dis-  
 tantiam ab x, ab invicem verò infinitè parvam habere fingito.  
 Sed lineolam rr, cum radiis per R & r transeuntibus, plus aut  
 minus ab xD vergere (quemadmodum in præcedentibus) concipi-  
 to, pro variâ posterioris Medii assumendâ densitate. Jam si recta  
 DR fecet radios xr in M, & IX in K, cùm infinitè parvum trian-  
 gulum RMr sit simile triangulo DMx, à quo triangulum KRx non  
 nisi infinitè parvis differentiis, xRM & DxK, discrepat, quæ diffimi-  
 litudinem non inferunt; triacula etiam RMr & KRx pro similibus  
 haberi debent. Et proinde demissis perpendicularibus KL & RN,  
 erit  $KX.LR :: Rr.MN$ . Adeoque, cùm sit  $LR = \frac{XRq - XKq}{XR}$  (nam est  
 $XR.KR (= \sqrt{XRq - XKq}) :: KR.RL$ ) erit etiam  $MN = \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$  in Rr,  
 quæ differentia est inter xN, five xR & xM. Et inde erit  $xM =$   
 $xR - \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$  in Rr. Inventa est itaque relatio inter xK, xM &  
 xR, cùm angulus IXA sit infinitè parvus. Quinetiam, utcunque  
 IX obliqua ponatur, illæ xK, xM & xR eandem relationem obser-  
 vabunt, siquidem reciproce sunt ut sinus Incidentiæ & Refractio-  
 nis; & proinde inventa est etiam inter eas relatio pro quâvis obli-  
 quitate incidentis IX. Atque ita cognitis, aut utcunque ad arbi-  
 trium assumptis, xK & xR, inde xM simul cognoscitur. Quod  
 primò determinandum proposui.

Quamobrem fit IX linea datum quemvis angulum AXI cum re-  
fringente superficie constituens; cæterisque stantibus, erit  $MN = \frac{XRq - XKq}{XR \times XK}$  in Rr. Insuper est  $RD (= \sqrt{XRq - XDq})$ . XD :: MN. NR,  
atque adeo est  $NR = \frac{XRq - XKq \text{ in } Rr \times XD}{XR \times XK \times \sqrt{XRq - XDq}}$ . Quòd si NR dividatur per  
XR, prodibit sinus anguli RXN respectu circuli, cujus semidiamete-  
re sit unitas. Quare, cùm angulus iste & sinus ejus sunt maxi-  
mi, ad maximum angulum determinandum quærenda erit maxi-  
ma quantitas  $\frac{NR}{XR}$ , hoc est maximum  $\frac{XRq - XKq \text{ in } Rr \times XD}{XRq \times XK \sqrt{XRq - XDq}}$ . Sive (factâ  
per datum  $\frac{Rr \times XD}{XK}$  divisione) quærendum erit Maximum  
 $\frac{XRq - XKq}{XRq \times \sqrt{XRq - XDq}}$ : id quod per Methodos de Maximis & Minimis fa-

DE  
PLANORUM

tis notas fieri potest, & prodibit  $xrqq = 3xkq \times xrq - 2xkq \times xdq$ ; cujus æquationis constructio est ejusmodi (c).

A puncto quolibet incidentis radii  $ix$  demitte perpendicularum  $ia$ , & in eo fume  $af = ax$ ; &  $xi$  producto ad  $B$ , ut sit  $ib = \frac{1}{2}ix$ ;



fractionis  $rxm$  fiat omnium Maxima. Quo invento, densitas posterioris Medii, talem refractionem efficientis, facile dabitur. Concipe ergo radios  $xr$  &  $xr$  fig. p. 318. esse mediocriter refrangibiles, diverso tamen gradu; & posterius Medium, sic inventum, non modo inter

(c) RECTA  $xd$  (fig. p. 318.) pro arbitrio sumenda significetur litera  $a$ . Data  $xd$ , propter angulum  $dxk$  datum, idem ponitur, dabitur  $xk$ ; quam litera  $b$  significet. Sit  $z$  recta quædam, quæ ea lege fluat, ut duarum, datæ  $xd$  & indefinitæ  $xr$ , sit semper proportio tertia. Erit igitur  $xr^2 = az$ .

Quare  $\frac{xr^2 - xk^2}{xr^2 \times \sqrt{xr^2 - xd^2}} = \frac{az - b^2}{az \sqrt{az - a^2}}$ . Cujus fluxio his notis significanda erit,

$\frac{\frac{2}{3}b^2xz - ab^2z - \frac{1}{2}az^2}{x^2 \times az - a^2} \frac{1}{2}$ . Hæc autem fluxione nihilo æquatâ, erit etiam  $\frac{1}{2}b^2z - ab^2 - \frac{1}{2}az^2 = 0$ .

Quare  $\frac{3b^2}{a}z - z^2 = 2b^2$  (five  $z^2 = \frac{3b^2}{a}z - 2b^2$ ; quæ pro literis  $z$ ,  $a$ ,  $b$ , illis  $\frac{xr^2}{xd}$ ,  $xd$ ,  $xk$  restitutis, in ipsam æquationem Newtonianam migraverit.) Hujus autem æquationis constructio levissimo negotio absolvenda est. In  $xd$  productâ capiatur  $xe$ , ad quam  $b$ , vel  $xk$ , rationem habeat quam  $xd$  ad  $3xk$ . (Nimirum ut sit  $xe = \frac{3b^2}{a}$ .) Ad rectam  $xe$  magnitudine & positione datam applicetur rectangulum, quod duplo quadrato ex  $xk$  æquale sit, & quadrato deficiat. Sit  $ez$  defectus latitudo. Duarum  $xz$ ,  $xd$  capiatur  $xy$  proportione media. Centro  $x$  radio  $xy$  scribatur circulus; quicum rectâ  $dr$ , à puncto  $d$  ad perpendicularum plani refringentis educitâ, in puncto  $a$  concurrat. Radius, qui secundum  $ix$  incidit, in  $xe$  refringetur, si talis sit materiæ circum  $dxk$  densitas, quæ angulum  $rxm$  maximum efficiat.

Ad hanc

REFRACTIONIBUS.

ter istos, fed & inter extremos seu maximè diffformes radios, maximè circiter quam potest refractionis differentiam efficiet.

Sin autem hujusmodi differentiarum proportionem ad variam raritatem vel densitatem Mediorum desideretur, è jam ostensis facile determinabuntur, dummodo ponantur infinitè parvæ. Sic raritate vel densitate posterioris Medii tantum variatâ, ut radii secundum  $ix$  incidentes nunc refringantur ad  $m$  &  $r$ , nunc ad  $m$  &  $r$ ; ductaque quâlibet  $dx$  ipsi  $dx$  normali, quæ secet eos in  $k$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $m$  &  $r$ , erit angulus infinitè parvus  $mxx$  ad confimilem angulum  $mxx$ , sicut  $\frac{xrg - xkq}{xrg \times rd}$ , ad

$\frac{xrg - xkq}{xrg \times rd}$ . Quod si raritas vel densitas prioris Medii varietur, non mutato posteriori Medio, Analyta facile deprehendet, quod (in fig. p. 318) sit  $mn = \frac{xrg - xkq}{xkq}$  in  $rr$ , & proinde quod sit ang.  $mxx$ . ang.  $mxx$  :  $\frac{xrg - xkq}{xrg \times rd} : \frac{xrg - xkq}{xr \times rd}$ ; non enim perinde est, five raritas five densitas anterioris Medii, five posterioris Medii varietur, ut è præostensis pateat.

60. Propositiones præcedentes ad luminis è longinquo manantis diffusionem spectant. In duabus sequentibus agitur de refractione luminis è propinquo manantis.

Ad hanc constructionem duo sunt necessaria; primum ne duplum quadratum ex  $xk$  quadrato ex dimidiâ  $xe$  majus sit; tum etiam ut  $xy$  major sit quàm  $xd$ . Quorum utrumque semper fieri, ex eo quod  $xk$  major sit quàm  $xd$ , facile ostendetur. Cum enim  $xk$ , five  $b$ , majus sit quàm  $xd$  vel  $a$ , omnino  $8a^2$  minus erit quàm  $9b^2$ . Quare et  $2a^2$  minus quàm  $\frac{9b^2}{4}$ . Et  $2b^2$  minus quàm  $\frac{9b^2}{4a^2}$ . Sed  $\frac{9b^2}{4a^2}$  quadratum est ex dimidiâ  $xe$ . Quare  $2b^2$ , five duplum

quadratum ex  $xk$  quadrato ex dimidiâ  $xe$  minus erit. Rursus cum  $xe \times xd$  ex constructione sit triplum quadrati ex  $xk$ ; cum etiam, propter angulum ad  $d$  rectum, quadratum ex  $xd$  minus sit quàm quadratum ex  $xk$ , erit  $xe \times xd$  majus quàm triplum quadratum ex  $xd$ . Quare et recta  $xe$  major erit quàm ut tripla sit  $xd$ . Omnino igitur  $xd$  minor erit quàm dimidiâ  $xe$ . Segmentorum autem  $xz$ ,  $xe$  cum majus sit  $xz$ , certè recta  $xz$  dimidiâ  $xe$  major erit. Multo igitur major quàm  $xd$ . Rectangulum igitur  $xz \times xd$ , five quadratum ex  $xy$ , majus erit quadrato ex  $xd$ . Quare et recta  $xy$  rectâ  $xd$  major. Q. E. D.

Quod si segmentorum  $xz$ , ex utrumque rectâ  $cd$  majus sit, gemina erit Problematis constructio, nempe cum utrumvis segmentum pro  $z$  usurpare liceat. Unde gemina erit rectæ  $xe$  positio. Id est, duæ erunt densitates materiæ infra superficiem  $ad$ , quæ, radium incidentem  $ix$  diversè refringendo heterogeneos tamen radios ita utraque refringant ut angulum  $rxm$  maximum efficiant.

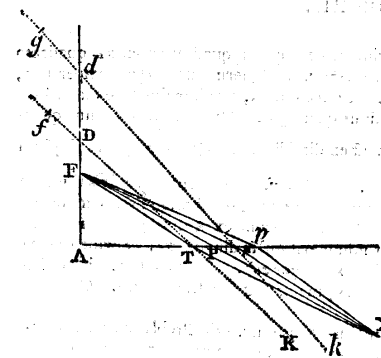
## P R O P. XVIII.

*Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum per superficiem positione datam refractis, quo Medium densius sit magis densum, eo major erit eorum ad invicem inclinatio ex parte medii utriusque ad certum usque terminum, & post erit eo minor.*

Scilicet, cum densitas ejus haud minor sit quam densitas alterius Medii, ut refractione fiat infinite parva, tum differentia refractionis erit etiam infinite parva, & proinde augebitur ex aucta densitate. Quod si densitas ejus in infinitum augeatur, tum omnium radiorum in illud incidentium refracti perpendiculariter emergunt (§ 44); & è contra, soli perpendiculares possunt ingredi medium rarius è densiori (§ 47); unde omnes radii à puncto ad punctum refracti tunc pergent in iisdem lineis, sive coincident, & sic differentia refractionis rursus in nihilum evanescet.

## P R O P. XIX.

*Heterogeneis radiis à dato puncto ad datum punctum, per superficiem positione datam, refractis, quo Medium rarius sit magis rarum, eo major eorum erit ad invicem inclinatio ex parte Medii utriusque.*



Sit AT superficies ita refringens difformes radios FTX, FPX, ut manantes ab eodem puncto F in idem rursus conveniant ad X. Dico, si Medium prius esset rarius, ut præfati radii adhuc magis refringerentur, puta FTX secundum FTX, & FPX secundum FPX, quod angulus pxt foret major angulo pxt, ut & angulus pxt major angulo pxt.

Ad abbreviandum prioris casus demonstrationem, ponamus radios esse quam minimè difformes; ut, propter infinite parvam differentiam refractionis, angulos pxt & pxt constituent infinitè parvos.

parvos. (Consule Cas. 2. Schol. ad Prop. xvii.) Tum ducatur TK refractus radii conformis ipsi FPX, ut infinite parvus angulus KTX sit differentia refractionis radiorum secundum eandem FT incidentium; & pari modo ducatur tk, Refractus radii conformis ipsi fpx, ut angulus infinite parvus ktx existat differentia refractionis radiorum secundum eandem ft incidentium. Liqueat ergo, quod, cum radius ft sit obliquior quam FT, atque etiam in Medium densius incidat, erit ktx major angulo KTX. Adhuc producantur KT & kt, donec in punctis D ac d secent lineam FA, quæ sit plano AT perpendicularis; & ultra producantur ad f & g, ita ut sit  $\frac{FAg}{FT} : \frac{DAg}{DT} :: TF. Tf$ ; &  $\frac{FAg}{FT} : \frac{dAg}{dt} :: TF. tg$ ; & erunt puncta sit inventa, f & g, foci radiorum FTX & ftx per Prop. viii. Cas. 2. Et inde xf. Tf :: ang. KTX. ang. pxt; ut & xg. tg :: ang. ktx. ang. pxt (Cas. 3. Schol. Prop. xii.) Istæ quidem proportionalitates non sunt omninò veræ, ubi anguli præfati, per differentiam refractionis effecti, ponuntur esse definitæ alicujus magnitudinis; sed ad veritatem eo magis accedunt, quo anguli isti statuuntur minores; adeo ut in angulis infinite parvis pro accurate veris haberi debeant. Jam, cum ex hypothese sit At > AT, erit etiam xt < xT, ut & tg > Tf, quemadmodum patet ex determinatione punctorum g & f supra posita. Quamobrem est tg. Tf > tx. TX, vel permutando tg. tx > Tf. TX; & componendo, tg. xg > Tf. xf; hoc est, substituendo rationes hinc æquales, ang. pxt. ang. ktx > ang. pxt. ang. KTX; & permutando, pxt. pxt > ktx. KTX: verum est ang. ktx > ang. KTX, ut dictum fuit; & ideo multo magis est ang. pxt > ang. pxt. Q. E. D.

Et hinc verò de posteriori casu, quod semper sit pxt > angulo pxt, fiat conjectura; siquidem demonstrationem longè difficiliorē postulare, & his tamen multa impendisse verba jamdudum pertæsum est. Hæc itaque de refractionibus solitariae superficiei sufficiant.

*De radiorum bis refractorum affectionibus.*

61. Quod si gemina sit refractione, proinde ut in Prismatibus contingit, quorum phænomena præsertim explicare statui, radiorum sic refractorum passiones è præcedentibus ita manifestæ sunt,



DE  
PLANORUM

ut circa illas parum negotii interesse videatur. De parallelis quidem superficiebus nihil aliud occurrit observandum, quàm quòd posterior tantum recurvat radios, quantum prior incurvat. De inclinatis verò frequentia notentur.

## P R O P. XX.

*Homogenei radii ad Prisma divergentes, post utramque refractionem divergere pergent.*

Patet per Prop. VII.

Atque idem de parallelis vel Convergentibus radiis intellige, quòd nempe post utramque refractionem manebunt Paralleli vel Convergentes.

## Scholium.

Quòd si punctum, à quo quilibet infinitè propinqui, post utramque refractionem, divergunt, five locus Imaginis trans Prisma conspicuæ, desideretur, inventio ejus à Schol. ad præfatam Prop. VIII. manifesta est. Sed ut promptius fiat conjectura, juvabit adhibere Theorema hocce mechanicum. *Quòd Imago ad eandem illam circiter distantiam post Prisma apparebit, quam habet Objectum, cujus est Imago, dummodo refractiones hinc & inde non sint admodum inæquales.*

## P R O P. XXI.

*Ex heterogeneis radiis ad Prisma divergentibus, aliqui post utramque refractionem convergent.*

Id quod constat ex Prop. x & XII. Scilicet ex illis, qui in plano ad utraque refringentia plana perpendiculari jacent, magis refrangibiles ex incidentiâ paulo obliquiori convenient cum minus refrangibilibus; atque idem in innumeris ferè aliis planis superficiebus continget.

## P R O P.

## P R O P. XXII.

REFRACTIONIBUS.

*E radiis itaque sic à puncto ad punctum, five ab Objecto ad oculum refractis, alii ad verticem prismatis gradatim aliis propiores transibunt, pro eo ut sint magis ac magis refrangibiles.*

Per Prop. x. unde colorum ordines definiuntur, de quibus posthac.

## P R O P. XXIII.

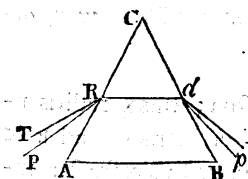
*Quo major est angulus verticalis prismatis, cæteris paribus, differentia refractionis fiet eo major, & inde colorum apparentia distinctior.*

Et hoc manifestum est è Prop. II.

## P R O P. XXIV.

*Quo densior est Prismatis materia, vel quo rarius est Medium circumfluum, cæteris paribus, eo major erit refractionis differentia, & inde Colorum apparentia manifestior.*

Scilicet posterior casus è Prop. XIV & XVI. patet. Priorem vero, ne per Prop. XVII. in dubium revocetur, sic ostendo.



Concipe magis refrangibilem radium, PR, & minimè refrangibilem, TR, sic in Prisma ad idem quodvis punctum R incidere, ut refracti pergant in eadem lineâ RD, ac de-  
nuò in d refracti divergant versus p ac t.

Quo posito constat per Prop. xv. quòd angulus pdt ex auctâ Prismatis densitate augebitur; deque angulo PRT par est ratiocinatio, si modò radii consimiles secundum eadem lineas retrocedere concipiantur. Patet itaque assertio de radiis in Prismate coincidentibus, & inde etiam de Parallelis.

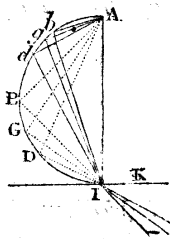
## L E M M A

DE AC-  
PLANORUM

## L E M M A VII.

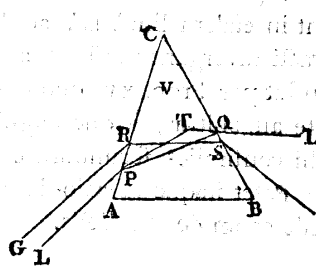
Radiis tribus homogeneis,  $bi, gi, di$ , è Medio densiori in rarius per superficiem  $IK$  refractis, sit differentia incidentiarum,  $big, gid$ , sint æquales, summa refractorum angulorum extremis radiis effectorum erit duplo major anguli refracti, per intermedium radium effecti; hoc est refractis radiis retroactis ad  $B, G$  ac  $D$ : dico, quod sit angulus  $Bib + Did > 2 \text{ ang. } gIG$ .

Etenim descripto quovis circulo  $ADG$ , tangente refringentem superficiem in  $I$ , cujus diameter sit  $AI$ , quique dictos radios secet in  $b, g, d, B, G, D$ : quandoquidem anguli  $big$  &  $gid$  sint æquales, erunt etiam arcus  $bg$  &  $gd$  æquales. Sed ductis  $Ag, Ab, \&c.$  erunt  $Ab, Ag, Ad$  sinus incidentiarum, adeoque inter se ut sunt  $AB, AG, AD$  sinus refractionum. Quare (per Lem. VI.) est arcus  $DG$  major arcu  $GB$ , & inde  $2gG < 2gG + GD - GB = gD + gB = gD - gd + gb + gB = Dd + Bb$ : hoc est,  $2gG < Dd + Bb$ , five angulus  $Bib + ang. did > 2 \text{ ang. } gIG$ . Q. E. D.



## P R O P. XXV.

Homogeneis radiis à Prismate refractis, angulus, quem incidentes & emergentes comprehendunt, tunc maximus evadit, cum æqualis est binc & inde refractioni.



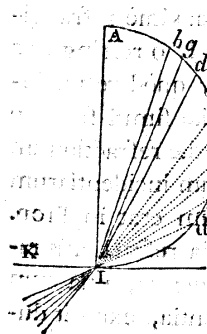
Sit  $ABC$  Prisma;  $GRSN$  radius utrinque æqualiter refractus ad  $R$  &  $S$ ; et  $LPOQ$  alius radius refractus inæqualiter, magis quidem ad  $P$ , minus ad  $Q$ , & producantur hi radii donec sibi occurrant,  $LP$  &  $QL$  in  $T$ ,  $OR$  vero &  $NS$  in  $V$ . Dico angulum  $RVS$  esse majorem angulo  $PTQ$ . Quod ut pateat, concipe radios in lineis  $PQ$  &  $RS$  hinc inde pergentes utrinque egredi Prismate, & sic è Medio densiori in rarius refringi. Nam in triangulis  $CPQ, CRS$ , cum angulus  $c$  communis sit, æterorum

terorum angulorum summæ erunt æquales; & proinde, cum  $CRS$  sit isosceles, duplum anguli  $CSR$  æquabitur angulis  $CPQ + CQP$ . Quamobrem radii  $QP$  incidentia ad  $P$  tanto major est incidentiâ radii  $RS$  ad  $S$ , quanto eadem incidentia sit major incidentiâ  $PQ$  ad  $Q$ . Trium itaque incidentiarum differentiæ sunt æquales; adeoque, juxta Lemma præmonstratum, summa refractorum angulorum, per incidentiam maximam & minimam effectorum, major erit duplo anguli refracti per incidentiam mediocrem effecti. Hoc est,  $\text{ang. } QPT + \text{ang. } PQT > 2 \text{ ang. } RSV$ , five  $> \text{ang. } RSV + \text{ang. } VRS$ . Itaque, cum in triangulis  $PTQ$  &  $RVS$  summa angulorum ad basin  $PQ$ , sit major summâ eorum ad basin  $RS$ ; erit angulus verticalis  $RVS$  major angulo verticali  $PTQ$ . Q. E. D.

## L E M M A VIII.

Si secundum tres lineas,  $bi, gi, di$ , æquales angulos  $big, gid$  continentes, tres radii minimè refrangibiles incident ad  $I$  in superficiem  $IK$ , & è Medio densiori in rarius refringantur, quorum refracti retrorsum producti sint  $ib, ig, id$ ; & præterea, si trium maximè refrangibilium radiorum, secundum easdem lineas  $bi, gi, di$  incidentium, refracti retrorsum producti sint  $ib, ig, id$ , differentia refractionis radiorum, quorum incidentia est minima, una cum differentiâ refractionis eorum, quorum incidentia est maxima, major erit quàm dupla differentia refractionis eorum, quorum incidentia est mediocris. Hoc est,  $\text{ang. } Bib + \text{ang. } Did > 2 \text{ ang. } gIG$ .

Etenim descripto quovis circulo  $ADI$  tangente refringentem superficiem in  $I$ , cujus diameter sit  $AI$ , quique præfatos radios in punctis  $b, g, d, B, b, G, g, D$ ; & secet: concipe substantias  $ab, A$  ad quodlibet istorum punctorum duci; & erunt  $Ab, Ag, Ad$  inter se, ut sunt  $AB, AG, AD$ ; atque etiam, ut sunt  $Ab, Ag, Ad$ . Unde sequitur, quod  $AB, AG, AD$  inter se sunt ut  $Ab, Ag, Ad$ . Et præterea per Lem. VI. quod sit arcus  $GD > arcu BG$ , & arcus  $gd > arcu bg$ . Jam fiat arcus  $GM = BG$ ,







AH & GZ occurrentes in I; & IC normaliter demissa ad AZ incidet ad punctum quæsitum c.

63. NOTA I. Quod z fit locus imaginis Objecti A per refractionem exhibitæ, cum spectatoris oculus in axe ultra z constituitur.

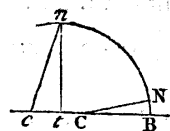
II. Si quando refracti radii divergant, vel incidentes convergant, vel sint paralleli, similis erit Problematis constructio, mutatis tantum suo modo mutandis.

III. Si è puncto A emissi radii per plures sphaericas superficies, eundem axem ac retinentes, successive transmittantur, ad concursum post omnes refractiones determinandum, quære primò concursum radiorum post primam refractionem; deinde concursum eorundem post secundam refractionem, juxta ac si primariò emissi fuissent è puncto præcedentis concursus, & sic deinceps donec ad ultimum concursum devenerit. Atque hoc pacto locus Imaginis Objecti cujusvis, per Telescopium vel Microscopium, visi determinari potest.

IV. Ope Corol. 3. lentes ex sphaericis superficiebus confici possunt, quæ Telescopiis modo quolibet designato constituendis inservient. Patet enim ex illo Corollario, quod non tantum refractiones datarum lentium investigari possunt, sed & lentes delineari, quæ datas refractiones peragent.

## L E M M A IX.

Ad datam quamvis Curvam concursum axis & vicinissimi perpendiculari determinare.



Sit BNN Curva, & ad quodvis ejus punctum, n, indeterminatè spectatum, quære perpendicularum nc, per notas methodos ducendi perpendiculara Curvarum, & simul invenies longitudinem BC. Tum (demisso ad BC normali nt) finge bt vel nt infinitè parvam esse, seu nullam; & emergit longitudo BC, cujus terminus est ad concursum axis cum vicinissimo perpendicularo.

Exem. 1. Sit BNN Parabola, cujus latus rectum r, & bt dic x; erit  $BC = x + \frac{1}{2}r$ , ut notum est. Pone jam  $x=0$ , & restabit  $\frac{1}{2}r$  pro longitudine BC ad verticem.

Exem. 2. Sit BNN Ellipsis, cujus latus rectum r, & transversum q;

q; eritque (ut notum est)  $BC = x - \frac{rx}{q} + \frac{1}{2}r$ . Jam pone  $x=0$ , & restabit iterum  $\frac{1}{2}r$  pro longitudine BC ad verticem. Nec fecus in Curvis magis compositis procedendum est.

## P R O P. XXX.

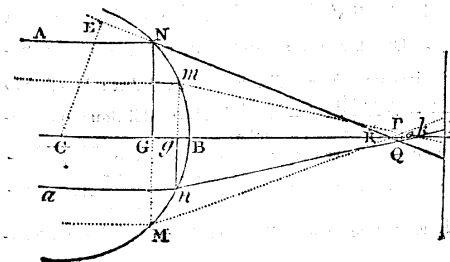
Radiis in curvam quamvis superficiem quàm proximè perpendiculariter incidentibus, Refractorum concursum, seu Focum, determinare.

Esto PBQ Curva quævis; A, commune punctum, seu concursus incidentium radiorum; AB radius perpendicularis five axis, & AN radius quàm proximè perpendicularis, five axi proximus; sitque NC ad Curvam perpendicularis, axique AC occurrens ad c. Et puncto c per Lem. IX. invento, erige ad B & c perpendiculara BH & CI; quibus in H & I occurrentem age quamvis AI. Versus I cape CR, quæ sit ad CI ut sinus refractionis ad sinum incidentiæ, & recta HR occurret ipsi AB in quæsito refractorum concursu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propositionis, & huic etiam consimilia Corollaria & notæ competunt.

## P R O P. XXXI.

Parallelis radiis in Sphæram incidentibus, refractorum, ab axe remotorum, errorem à principali Foco determinare.



Sit NBM sphaera; c, centrum ejus; CB, semidiameter incidentibus radiis parallela; AN, radius incidens; & NK, refractus ejus, occurrens axi seu semidiametro CB in K; & posito F principali foco,

i. e.



De DIOPTRICIS  
CURVAE

*Corol. 6.* Est etiam  $oQ = \frac{Ry^3}{8.aa}$  (8). Nam est GK (= BF proximè):

$$oN :: ko. oQ, \text{ hoc est } \frac{Ra}{R-1} \cdot y :: \frac{Ry^3}{8.1Ra-8.11a} (= \frac{1}{4} KF). \frac{Ry^3}{8.1aa}$$

*Corol. 7.* Si arcus BM sumatur æqualis BN, & BM=BN, ac radii ad puncta M & m refracti ducantur sibi occurrentes in P; constat esse spatium PQ =  $\frac{Ry^3}{4.1aa}$  (h), duplum nempe ipsius oQ; & præterea constat, refractos omnium radiorum, in sphaericam superficiem inter N & M cadentium, convergere in spatium hocce PQ; & idem PQ esse minimum circulare spatium in quod possent omnes congregari; adeoque Focum esse, seu locum Imaginis Objecti, parallelis radios in lentem, ad usque limites M & N apertam, ejaculantis. Scilicet nulli radii possunt transilire hoc spatium; quia cum oQ sit in datâ ratione ad ko, eritque oQ simul maximum, adeoque punctum Q omnium versus F jacentium remotissimum ab axe, in quo radius quisquam concurrat cum externo radio NK; neque possunt in minus spatium congregari, quia radii nk & mk secant externos radios in ipsissimis punctis P & Q, quibus spatium PQ terminatur.

*Corol. 8.* Si circuli NAM Aperturâ augeatur vel minuatur, Error lateralis PQ erit ut  $y^3$ , five ut cubus latitudinis aperturæ NM. Item si immutata aperturâ mutetur Circuli magnitudo, error PQ erit reciproce ut aa five ut ebq, adeoque ut BFq, siquidem eb & BF sint in datâ ratione: sin verò & Circuli magnitudo & Apertura mutetur, erit error ille PQ ut  $\frac{y^3}{aa}$  five ut  $\frac{NM \text{ cub.}}{BF \text{ quad.}}$  quemadmodum ex  $\frac{Ry^3}{4.1aa}$  (i) valore ipsius PQ constare potest.

*Scholium.*

Eodem ferè modo, quo radiorum parallelè incidentium errores

KF

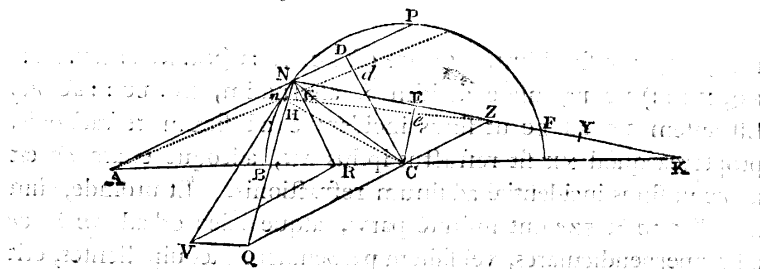
(\*) Omnino legendum  $\frac{Ry^3}{8.11.aa}$ . Namque BF, et quæ hujus propemodum est æqualis GK, ad CF rationem habet quam 1 ad R. Id quod apud dioptricis peritos constat. Quare GK : CF =  $\frac{1a}{R-1} : \frac{Ra}{R-1}$ . Et cum CF illi  $\frac{Ra}{R-1}$  æqualis sit, omnino GK huic  $\frac{1a}{R-1}$  æqualis erit. Quare cum GK sit ad oN ut ko ad oQ, erit  $\frac{1a}{R-1} : oN \text{ five } y :: ko : oQ$ , sicut rectè monuit qui primam hujus Libri editionem curavit. At verò recta ko, quando est maxima, parti quartæ rectæ KF æqualis est; hoc est, cum KF quantitati  $\frac{Ry^3}{2.1Ra-2.11.a}$  æqualis sit, maxima ko quantitati  $\frac{Ry^3}{8.1Ra-8.11.a}$  æqualis

KF & PQ determinavimus, confimiles divergentium vel convergentium errores, licet calculo difficiliore, determinari possunt. REFRAC-  
TIONIBUS

## P R O P. XXXII.

*Si Radii sive paralleli, sive versus commune aliquod punctum inclinati, se Sphæræ obijciant refringendos; Refractorum extra axem sibi quàm proximorum, & in eodem plano cum incidentibus jacentium, concursus determinare.*

Sit AN incidens radius; NK, refractus ejus; & NV, in plano trianguli ANK recta linea tangens Sphæram ad N. Ad AN duc NR



perpendicularem, & occurrentem axi AC in R; nec non RV parallelam, & occurrentem Tangenti NV in V. Item ad KN duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q; & age QC occurrentem NK in Z; eritque Z concursus radiorum ipsi AN vicinissimorum. Sit enim AN alius ex incidentibus priori AN infinite vicinus, & occurrens NR in G. Age nz occurrentem NQ in H; & ad AN & NK è c, centro sphæræ, demitte normales cd & ce, occurrentes an & nz in d & e. Jam, cum AN suppona-

qualis erit. Quare maximâ existente ko erit  $\frac{1a}{R-1} : y = \frac{Ry^3}{8.1Ra-8.11.a} : oQ$ .  
Quare  $oQ = \frac{Ry^3}{8.1a \times R-1} \times \frac{R-1}{1a} = \frac{Ry^3}{8.11.aa}$ . Hæc est longitudo rectæ oQ, quando ko maxima est.

(\*) Legendum  $\frac{Ry^3}{4.11.aa}$  sicut rectè monuit quem supra laudavimus, vid. Net. V. Quin et hæc emendationem commendare videtur Newtonus ipse; qui in Libro Opticæ primo, Prop. VII. §. formulam posuit, quæ in hæc nostram abierit, si pro literis illius s, u ponantur y, aa hujus; quibus eadem planè significantur.

(\*) Vid. Not. p.

VOL. III.

U u

tur





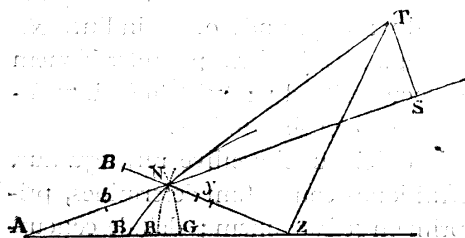
DE  
CURVARUM

occurrat AC in R, sitque NQ ad NR ut NE ad ND; & acta QC conveniet cum Refracto NK in desiderato proximorum Refractorum concursu Z.

Probatur ad modum præcedentis Propositionis, & huic etiam confimilia Corollaria & Notæ competunt.

## P R O P. XXXIV.

*Figuram determinare, quæ radios homogeneos, sive parallelos, sive ad commune aliquod punctum terminatos, ita refringet, ut Refracti omnes ad aliud datum punctum accuratè conveniant.*



Sit A concursus incidentium radorum, & Z refractorum, ac punctum aliquod, B, in recta AZ, pro vertice Curvæ ad arbitrium sumatur. Ab illo B capiantur in lineâ BZ, versus Medium densius, BG cujusvis longitudinis, & BR ratione ad BG quam habet sinus refractionis ad finem incidentiæ. Centrisque A & Z, & intervallis AG & ZR, describantur circuli se interfecantes in N; & ipfius N locus erit Curva, quæ desideratam refractionem peraget.

Quod ut pateat, producatûr AN ad S, ut sit NS. NZ :: BG. BR; & ad NS & NZ erigantur perpendiculares, ST & ZT, occurrentes in T, & acta NT Curvam tanget in N, ut ex methodo ducendi tangentes alibi exposita constabit (1). Jam cum NS & NZ sint ut BG & BR, hoc est, ut sinus incidentiæ & refractionis; & respectu finis totius, sive semidiametri NT, sit NS sinus anguli NTS, qui æquatur angulo incidentiæ radii AN, & NZ sinus anguli NTZ, qui æquatur angulo refractionis radii NZ: patet esse NZ refractum ipsius AN. Q. E. D.

## 65. NOTA

(1) In AN, ZN ut opus sit productis, capiuntur æ, & rectis, æ, & singulatim æquales. Erunt igitur BN, NB illis æ, & singulatim æquales. Habebit igitur BN ad NA rationem eam quam æ ad æ; id est datam illam, quam sinus incidentis radii ad finem emergentis. Quare et fluxionibus rectarum BN, NB eadem data ratio intercedet. (Geometr. Flux. Theor. IV.) Sed propter rectam AB magnitudine datam, fluxioni rectæ BN æqualis erit fluxio rectæ AN. (Geometr. Flux. Theor. V.) Similiter propter rectam ZB magnitudine datam, fluxioni rectæ ZN fluxio rectæ ZN æqualis erit. Quare

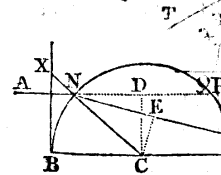
REFRACTIONIUS.

65. NOTA I. Potest etiam Curva huic ufui inserviens describi, quæ per datum quodvis punctum B, extra axem AZ positum, transibit; scilicet agantur AB & ZB, & in ipsis capiantur BG & BR in ratione finium incidentiæ & Refractionis; et centris A, Z, ac intervallis AG & ZR, describanturque circuli occurrentes in N; eritque N ad Curvam, quam oportet describere.

II. Præterea Problematis resolutio, mutatis mutandis, se ad omnes casus extendit, sive incidentes aut refracti radii convergant, divergant, vel existant paralleli, sive refraction fiat è rariori Medio in densius, vel è densiori in rariis. Et quidem, si radii ex neutra parte paralleli sint, i. e. si punctorum A & Z neutrum sit ad infinitam distantiam, Curva BN erit aliqua quatuor Ellipsis quas Cartesius in hunc usum in Geometria descripsit. Sin alterutrum infinite distet, ita ut radii punctum illud respicientes evadant paralleli, Curva erit conica sectio, uti notum est: et in hoc casu, circulus RN vel GN, propter infinitam centri distantiam, evadet recta linea, ipsi AZ ad B vel G perpendicularis.

## L E M M A X.

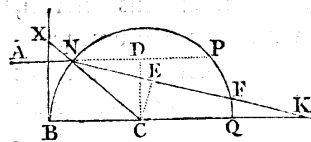
E parallelis radiis, ad Circulum refractis, radium illum determinare, cujus pars circulo inclusa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo inclusam.



Sit AN radius incidens; NK, refractus; NP & NT, partes eorum Circulo inclusæ; CP & CE, perpendicula ad istas partes è centro circuli demissa; & BC, semidiameter acta parallela ipsi AN;

Quare fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN rationem habebit, quam sinus incidentis radii ad finem emergentis. Sed et recta NS ad rectam NZ rationem habet, quam sinus incidentis radii ad finem emergentis. Habet igitur recta NS ad rectam NZ rationem eam quam fluxio rectæ AN ad fluxionem rectæ ZN. Quamobrem si recta ZT, & T, à punctis Z, & ad perpendiculum cum rectis ZN, NSeductæ, in puncto T concurrant, juncta NT Curvam, ad quam est N, in N coeget. (Newton, Principia, Anal. Prop. 32.)

sitque

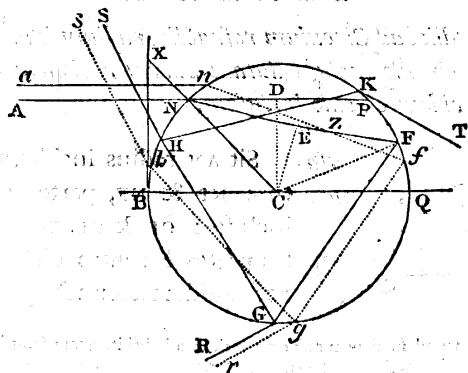


fitque  $CD.CE::I.R$ , &  $NP.NF::p.q$ . His positis, ut innotescat punctum N, quod radius AN & NK determinat, erige ad BC normalem BX, cujus quadratum fit ad BC quadratum, ut  $\frac{qq-pp}{pp}$  ad  $\frac{II-RR}{II}$ , & acta CX secabit Circulum in desiderato puncto N. Est enim ex hypothese  $p.q::(NP.NF)::ND.NE$ , &  $I.R::CD.CE$ . Quare  $\frac{q}{p}ND=NE$ ; &  $\frac{R}{I}CD=CE$ . Porro, cum sit  $NDq+CDq(=NCq)=NEq+CEq$ , aufer hinc inde  $NDq+CEq$ , & restabit  $CDq-CEq=NEq-NDq$ ; hoc est, substituendo valores ipsarum CE & NE modò inventos,  $CDq-\frac{RR}{II}CDq=\frac{qq}{pp}NDq-NDq$ , & factâ reductione  $\frac{II-RR}{II}CDq=\frac{qq-pp}{pp}NDq$ ; quo in proportionalitatem resolutio, fit  $\frac{qq-pp}{pp}NDq::\frac{II-RR}{II}CDq::(CDq.NDq)::BXq.BCq$ . Q. E. D.

## P R O P. XXXV.

*Sole Sphæram pellucidam illustrante, radiorum ejus, post unam reflexionem emergentium Maximam ad axem inclinationem determinare.*

Sit BNK Sphæra propofita; BQ, diameter five axis incidentibus radiis parallelus; AN, aliquis ex incidentibus; NF, refractus ejus;



FG, reflexus; & GR, denuo refractus: & quærendus erit Maximus angulorum, quos RG cum axe BQ potest conficere. In quem finem

nem advertendum est, quòd in eo solo casu, ubi RG maximè inclinatur ad BQ, radii ipsi AN vicinissimi possunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis casibus ex emergentibus radiis sibi vicinissimis alii magis, alii minus continuo inclinantur ad BQ, adeoque aliquantulum inclinantur ad se invicem. Advertendum est præterea, quòd radii emergent paralleli, qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium an ipsi AN parallelum & quàm proximum, fitque ejus refractus nf, reflexus fg, ac iterum refractus gr; & punctis F & f coincidentibus, cum anguli NFN & Gfg sint æquales, & refractiones ad N, n & G, g similes; emergentes radii, GR & gr, æquè paralleli erunt ac incidentes AN & an.

Quærendus est itaque radius AN, cujus refractus cum refracto vicinissimi radii an concurrat ad F. Et quidem per Corol. 3. Prop. xxxii. (demissis à centro Sphære ad radios normalibus CD & CE, positoque  $I.R::CD.CE$ ) si radii isti ad quodvis punctum z concurrant, erit  $I \times NF.R \times NP::NZ.EZ::NF.EF$  (puncto nempe z ad ipsum F juxta hypothese cadente)::2. I. Quare  $I \times NF=2R \times NP$ , &  $I.2R::NP.NF$ . Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. x. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens BX, cujus quadratum fit ad quadratum semidiametri BC, ut  $4RR-II$  ad  $II-RR$ , & agatur CX; hæc enim Circulo occurret in N, & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corol. 1. Hinc fit  $3RR.II-RR::CNq.NDq$ . Cum enim sit  $4RR-II.II-RR::BXq.BCq$ ; componendo erit  $3RR.II-RR::(BXq+BCq.=CXq.BCq::)CNq.NDq$ .

Corol. 2. Est &  $I.2R::ND.NE$ . Nam supra fuit  $I.2R::NP.NF$ , & ex his expeditior evadit Problematis resolutio.

## Scholium.

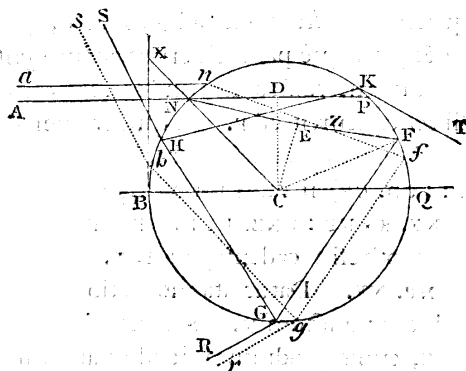
Una cum Maxima inclinatione radii RG, datur Maximus arcuum FQ, ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FQ, quem FQ subtendit, est æqualis angulo, quem CF & AN comprehendunt; hoc est, æqualis dimidio anguli, quem RG & AN, vel BQ, comprehendunt: & proinde arcuum FQ, æquè ac angulorum ab RG & BQ comprehensorum, maximus est, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

## P R O P.

DE CURVATURIS SPHÆRÆ PRO P. XXXVI.

*Sole Sphæram pellucidam, BNP, illustrante; radorum ejus, post duas reflexiones emergentium, minimam ad axem inclinationem determinare.*

Sint AN & AN' radii duo incidentes sibi quam proximi; qui post duas reflexiones, in ff & gg, emergant secundum HS & bs: et manifestum est, quod in eo solo casu, ubi angulus acutus, quem



BQ & SH comprehendunt minimus est, radii illi HS & bs possunt esse paralleli, uti supra de radius GR & gr dictum fuit; & ubi hoc accedit, radius etiam FG ad fg parallelus erit. Unde 2 arc. ff = (arc. ff + Gg = arc. FG - fg = arc. NF - nf =) arc. NN - ff. Adeoque 3 arc. ff = arc. NN; & cum NF dividatur in z in ratione istorum arcuum, ut patet, erit NZ = 3ZF = 3EZ. Cum itaque per Corol. 3. Prop. XXXII. sit  $1 \times NF. R \times NP :: NZ. EZ :: 3. 1$ ; erit  $1 \times NF = 3R \times NP$ , five  $1. 3R :: NP. NF$ . Datur itaque ratio NP ad NF, & inde per Lem. x. dabitur punctum N, ducendo nempe BX, quæ circumulum tanget in vertice B, & cujus quadratum sit ad BC quadratum ut  $9RR - II$  ad  $II - RR$ , & agendo CX, quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corol. I. Hinc est  $8RR. II - RR :: CNq. DNq$ . Nam  $9RR - II. II - RR :: BXq. BCq$ ; & componendo,  $8RR. II - RR :: CXq. BCq :: CNq. NDq$ .

Corol.

Corol. 2. Est etiam  $1. 3R :: ND. NE$ , utpote cum supra fuerit  $1. 3R :: NP. NF$ . REFRAC- TIONIBUS.

Scholium.

Ad eundem modum maxima radii KT, post tres reflexiones emergentis, inclinatio ad axem, juxta ac maximus arcuum qq investigabitur. Scilicet in eo casu FG & fg convenient ad G, eritque arc. ff = (arc. FG - fg = arc. NF - nf =) NN - ff; & inde 2 arc. ff = arc. NN, & NZ = 2ZF; adeoque  $4. 1 :: NZ. EZ ::$  (per Corol. 3. ad Prop. XXXII.)  $1 \times NF. R \times NP$ , five  $1. 4R :: NP. NF$ , & proinde per Lem. x.  $16RR - II. II - RR :: BXq. BCq$ ; unde confectatur esse  $15RR. II - RR :: CNq. NDq$ , &  $1. 4R :: ND. NE$ .

Atque ita, si radii post quatuor reflexiones emergentis, inclinatio minima desideratur, determinabis faciendo, ut sit  $25RR - II. II - RR :: BXq. BCq$ ; vel  $24RR. II - RR :: CNq. NDq$ . Et  $1. 5R :: ND. NE$ , & sic præterea in infinitum.

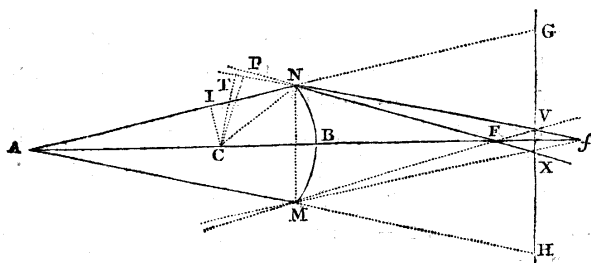
66. Transactis refractionibus Homogeneorum radorum, jam restat, ut Heterogeneos conferamus. De horum ad Plana refractionibus paulo fufius agebamus, ut eo Prismatum (quorum usus in experimentis faciendis posthac erit frequentissimis) affectiones innotescerent. Præcipuum verò, quod circa curvas superficies jam determinandum occurrit, est quantitas erroris radorum; à quo oritur confusio, five indistincta visio Objectorum, quæ in Telescopiis per nimiam vitri, objectum respicientis, aperturam evenire solet. Et in hunc finem cum præmissa sit Prop. XXXI. unde errores innotescunt, qui in sphaericis superficiebus per inepititudinem Figuræ efficiuntur: sequentem jam subjungimus, quæ errores ex inæquali Refrangibilitate diversorum radorum orti, determinari possunt.

P R O P. XXXVII.

*Heterogeneis radiis in Sphæram incidentibus, errores ex inæqualibus radorum similiter incidentium refractionibus progenitos determinare.*

E puncto A in Sphæram NBM, centro c descriptam, incident, secundum lineam aliquam AN, radii duo maximè diffformes; quorum

DE CURVARUM rum refracti sunt NF & Nf, axi occurrentes in F & f, & in illos demittantur perpendiculara CI, CP & CT. Jam, si accurata refractione desideretur, refractiones radiorum NF & Nf seorsim compu-



tandæ sunt; sed, cum arcus NM ponatur admodum exigua portio circuli, veritatem quam proxime affequemur assumendo angulos CNI, CNP, & CNT ferè esse ut eorum sinus. Sit ergo I communis sinus incidentiæ; P, sinus refractionis radiorum maximè refrangibilium; ac T, sinus ille minimè refrangibilium. Erit ang. CNI. ang. CNP :: I. P, & ang. CNP. ang. CNT :: P. T, ac divisim ang. INP. ang. CNP :: P-I. P, & ang. CNP. ang. PNT :: P. P-T, & ex æquo, ang. INP. ang. PNT :: P-I. P-T.

Sume jam arcum BM æqualem arcui BN; & radiorum secundum AM incidentium duc refractos MF, mf, prioribus occurrentes in v & x. Age vx, & produc donec occurrat incidentibus radiis ad G & H; & patet vx esse latitudinem minimi spatii, in quod omnes radii congregari possunt. Estque GX. vx :: (ang. GNX. ang. VNX proximè :: ang. INP. ang. PNT ::) P-I. P-T; & GH+vx (2GX). vx :: 2P-2I. P-T; ac divisim GH. vx :: P+T-2I. P-T. Unde datis P, T, I, dabitur ratio GH ad vx.

Ex. gr. Cum suprà determinaverim, quòd ad vitrum aëri terminum sit I. P :: 44 $\frac{1}{2}$ . 69 $\frac{1}{2}$ , & I. T :: 44 $\frac{1}{2}$ . 68 $\frac{1}{2}$ ; si assumatur I = 44 $\frac{1}{2}$ , erit P = 69 $\frac{1}{2}$ , ac T = 68 $\frac{1}{2}$ , & P+T-2I = 49, & P-T = I, adeoque GH. vx :: 49. I, circiter.

*Scholium.*

(<sup>n</sup>) Hæc ita se haberent, si vera esset æstimatio lineæ PQ fig. p. 334, quam Newtonus hic posuit. Verùm eam vitiosam esse suprà monuimus. (Not.<sup>a</sup>.) Nimirum illa PQ his notis algebraicè designanda est,  $\frac{289}{4.11.22}$ . Unde pro literis a, y, i, x numeris 120, 1, 11, 17 substitutis, efficietur PQ =

*Scholium.*

REFRACTIONIBUS.

67. Ope hujus & Prop. xxxi. errores Homogeneorum Radiorum, qui in sphaericis superficiibus per Figuræ ineptitudinem obveniunt, cum Heterogeneorum erroribus conferri possunt; & constabit hosce longè majores esse in parvis Sphaerarum portionibus: atque adeo heterogeneitatem Lucis, & non ineptitudinem Figuræ Sphæricæ, in causâ esse, quòd Telescopia in majorem perfectionis gradum nondum promotâ habeamus.

Concipiamus e.g. quòd NMB in figuris p. 334 & p. 346. referat Objectivum Vitrum Telescopii, cujus anterior superficies NM plana sit; eò ut radios in posteriori, seu sphaericâ, superficie NBM solummodo refringat; & ponamus cù semidiametrum hujus Sphærae esse 10 pedes, ut Telescopium ferè 20 pedes, five 240 digitos, longum conficiat; sitque Apertura NM 2 dig. quanta maxima cum visione satis distinctâ adhibeatur in hujusmodi Telescopiis, quæ Objectum quasi 70 vel 80 vicibus ampliant; & sinus incidentiæ sit ad sinum refractionis, in confinio vitri & aëris peractæ, ut 11 ad 17 circiter, prout suprà determinavimus. His positis scribendum est 120 pro a, 1 pro y, 11 pro I, & 17 pro R, in valore ipsius PQ, quem exhibuimus in Corol. 7. Prop. xxxi. hoc est in termino  $\frac{17}{4120}$ ; & emergit  $\frac{17}{4120}$  dig., five  $\frac{17}{633600}$  dig., = PQ: estque hic error lateralis Homogeneorum Radiorum, ortus ab ineptitudine Figuræ Sphæricæ. Præterea concipiamus radios AN & AM fig. p. 346. esse parallelos axi; & erit GH = NM = 2 dig. adeoque vx, error nempe lateralis heterogeneorum ab invicem in eodem loco concursus, erit  $\frac{2}{49}$  dig. Confer jam hos errores, & patebit vx esse ad PQ (seu  $\frac{2}{49}$  ad  $\frac{17}{633600}$ ) ut 1267200 ad 833, five ut 1521 ad 1 circiter (<sup>n</sup>). Adeoque vx esse quasi mille & quingentis vicibus majorem quam PQ; tanta fanè disproporatio, ut PQ respectu vx pro nullo haberi possit. Error quidem vx, cum sit  $\frac{2}{49}$  dig. tantus est, ut miror, quòd Objecta per hujusmodi Telescopia tam distinctè videri

$\frac{17 \times 17}{4 \times 11 \times 11 \times 120 \times 120} = \frac{289}{6969600}$  Quare vx : PQ =  $\frac{2}{49} : \frac{289}{6969600} = 2 \times 6969600 : 49 \times 289 = 984 : 1$ . Similem numerorum emendationem adhibuit quisquis ille fuerit, qui hunc librum primus edidit.

X x 2

possint.

possint. Sed alterius generis error PQ, five  $\frac{17}{633600}$  dig. i. e.  $\frac{1}{37271}$  dig. circiter, longè minor est, quàm qui potest esse sensibilis, & proinde negligendus; & indistincta visio erroribus ex heterogeneitate Lucis exortis solummodo tribuenda. Et hinc patet perfectionem Telescopiorum non è Conicis Sectionibus petendam esse, sed figuras Sphæricas huic ufui æquè inservire posse. In Microscopiis quidem errores homogeneorum radiorum, ex sphæricâ superficie Vitri Objectivi, propter Aperturam benè magnam, enormes oriuntur & admodum sensibiles; adeo ut illa Vitra, si secundum conicam aliquam sectionem debite formarentur, paulo perfectiora evaderent. Sed (°) methodus tamen me non latet corrigendi errores illos absque Conicis Sectionibus; & efficiendi ut Vitra è Sphæricis superficiebus formari possint, quæ radios homogeneos satis accuratè refringent, ne dicam, quæ longè accuratius refringent obliquos radiorum penicillos, quàm vitra aliis quibuscunque figuris terminata; adeo ut Sphæricas superficies usibus Dioptricis, præ cæteris omnibus accommodatas esse censeam.

(°) Nempe si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis & aquam inter se claudentibus consentur. Vid. Newtoni Princip. Schol. Prop. ult. Lib. 1. Et Optics. Prop. 11. Part. I. Lib. 1. Curator Editionis Primæ.

## A R G U M E N T A C A P I T U M

## PARTIS SECUNDÆ LECTIONUM OPTICARUM.

SECT. I. Exponitur Doctrina de Coloribus, & per experimenta Prismatis probatur.	Pag. 349
SECT. II. De variis Colorum Phænomenis.	399
SECT. III. De Phænomenis Lucis per Prisma in Oculum transmissæ.	411
SECT. IV. De Phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum transmissæ.	419
SECT. V. De Phænomenis Lucis per Media sphæricè terminata transmissæ; deque Iride.	424

## OPTICÆ PARS SECUNDA.

## DE COLORUM ORIGINE.

## S E C T I O P R I M A.

*Exponitur Doctrina de Coloribus, & per Experimenta Prismatici probatur.*

QUI in fabricandis Telescopiis occupati sunt, de Coloribus conqueruntur, quibus Objecta, dum vitris istis mediantibus aspiciuntur, tingi solent; quique eo magis augmentur & apparent, quo Vitrum Oculare ex sphaeris minoribus efformatur, vel etiam quo Vitrum Objectivum majori latitudine radiis intrantibus patet. Unde duplici incommodo implicati impediuntur, ne Perspicilla ad optatum perfectionis gradum perducant: tum quod Oculare Vitrum ultra certos gradus parvum, ad Objecta magis amplianda, nequeant adhibere; tum quod vitrum Objectivum ultra certos limites aperire nequeant, ad Objecta magis lucida & perspicua reddenda. Qui gradus vel limites, si non probe observentur, Objecta coloribus involuta reddentur, & multo minus distincta, quam si vel minora cernerentur, ope vitri ocularis minus convexi, vel minus lucida diminuta Perspicilli aperturâ. Jam, cum istæ perfectiones præcipuæ sint, quæ in Perspicillis desiderantur; nempe ut Objecta magis amplient, & reddant lucidiora: operæ pretium videtur in naturam Colorum inquirere; ut investigemus tandem quid in causâ sit, quod ita appareant, & Objecta reddant indistincta; hujus enim ignorantia quàm plurimos labore non exiguo sed inani tamen exercuit, dum perfectionem Telescopiorum à vitiosis

vitrorum.

vitrorum figuris ortam esse credentes, in istis meliori figurâ perpoliendis navârunt operam. At, si causam horum colorum satis exploratam habuissent, simul innotuisset inæqualis diverforum radorum Refrangibilitas, & inde vitia Telescopiorum non ab inaptitudine figuræ Sphæricæ ad refractiones ritè peragendas originem ducere constitisset. Quo benè intellecto, conatus suos procul dubio mutassent, & laboribus istis secundum aliam methodum dispositis, Opticam in gradum multo perfectiorem jam promotam haberemus.

2. Qui de Coloribus hucusque differuere, vel id nomine tenuerunt, ut Peripatetici; vel in eorum naturam & causas inquirere conabantur, ut Epicurei & alii recentiores. Quæ Peripatetici de hisce tradidere, etsi vera forent, tamen ad nostrum propositum nihil valerent: quippe, dum modum, quo generantur, & causas, unde fiunt tam varii, non attingant. Etenim illi, de originibus & variis rerum speciebus disputantes, pro causis, ex quibus ipsarum existentiam & discrimen mutantur, varias quasdam Formas assignârunt; verum de particulari cuiusvis Formæ causâ & ratione, ob quam differt ab aliis, haud unquam quicquam differuere. Et sic ea fecerunt missa, quorum explicatio videtur summum Philosophorum officium, imo quæ sola mentem, scientiæ naturalis avidam, explere possint.

3. Attamen, ne mancâ Philosophiam tradidisse viderentur, effecerunt, ut ejusmodi disquisitiones pro maxime absurdis & ridendis habeantur; utpote quæ supponunt Formarum esse alias Formas, & Qualitates Qualitatum. Itaque cum Lux definiatur esse Qualitas vel Forma, quæ dat esse lucidum, non expectandum est, ut aliquid de ejus causis audiâmus, vel quâ ratione ad varios Colores producendos fiat varia. Dicunt equidem, quod plus luminis quibusdam coloribus immiscetur, quàm aliis: at hoc non sufficit ad eorum productionem, tum quod nullus omnino color ex albedine & nigredine solummodo mixtis, præter fuscis intermediis, generatur; tum quod quantitas lucis non mutat speciem coloris. Corpus enim Rubrum, verbî gratiâ, semper apparet Rubrum, sive aspiciatur in crepusculo, sive in meridie lucidissimo. Porro autem ipsa definitio, quam attribuunt coloribus, adeo non pandit eorum naturam, ut eos ne nomine tenuis exprimat. At

Aristoteles

Aristoteles Χρῶμα δὲ ἐστὶ τῆ διαφανὸς ἐν σώματι ὁρισμένῃ πέρχας. Quæ <sup>LUCIS</sup> superficiæ coloratæ potius quàm coloris descriptio est. Illa enim dici potest extremitas perspicua in corpore terminato. At color plerumque videtur, ubi nulla talis datur extremitas, ut in Iride & Prismate, in Vitris vel Liquoribus perspicuis, & aliquo colore leviter tinctis. In Aquâ Marinâ, quæ viridis plurimum apparet, qui tamen color non in extremitate aquæ, sed per totam ejus crassitiem, generatur; in Aere, qui, licet maximè perspicuus & nullo corpore denso terminatus, serenâ tamen nocte cæruleus apparet; & in Flammâ, quæ non minùs perspicua est, & luci pervia, quàm ipse Aer. Sic cum humores oculi colore aliquo tinguntur, omnia videntur eodem colore tincta, licet extremitas perspicui sit aliis coloribus prædita. Et cum Solem nudis oculis modò aspexeris, luminosa omnia deinceps videntur rubra, & nigra plerumque apparent cærulea; qui color erit magis conspicuus, si clausis oculis te in locum aliquem tenebrosissimum statim conseras. Imo premendo oculum colores in tenebris excitare liceat; quis autem vocabit illos extremitatem perspicui? Cæterum non opus est, ut has opiniones enixè refutem, quæ, etsi veræ essent, tamen non sunt sufficientes, neque proposito meo adversantur. Esto enim Lux qualitas corporis lucidi: esto Lumen actus perspicui; & Color ejus extremitas: & quicquid de illis dixerunt, esto; abinde tamen haud concipi poterit, quo pacto Lux refringatur; unde Colores sint varii; quid in causâ sit, quòd in Perspicillis apparent; & quâ ratione incommodum istud devitari possit.

4. Ad opiniones aliorum Philosophorum quod attinet, dixerunt Colores vel ex Umbrâ Luceque variè mixtis; vel ex contortione globulorum, aut eorum variis pressionibus generari; vel denique ex variis modis, quibus Medium quoddam Æthereum vibratur, statuentes Lucem productam esse ex impulsu vibrantis Ætheris in retiformem tunicam delato. Extra oleas nimis vagarer, si has opiniones sigillatim refutandas adortus essem: nec opus est, ut faciam, cum omnes in communi quodam errore consentiant; scilicet, quòd modificatio Lucis, quâ singulos colores exhibet, ei non sit insita ab origine suâ, sed inter reflectendum vel refringendum acquiritur. Inter radios lucis nullum contemplantur discrimen, priusquam incidant in corpus aliquod colorificum; opinati tan-

tum,

DE  
RADIORUM

tum, quod, pro variâ dispositione corporis istius, variis modis reflectuntur vel refringuntur, & pro specie modificationis, quam sic acquirunt, varia deinde Colorum phantasmata spectantibus exhibent. Mixtura Lucis & Umbræ, gyratio globorum, vel varia vibratio Medii non supponuntur ineffe radiis antecedenter ad eorum reflexiones vel refractiones, sed per istas actiones generari creduntur. Quemadmodum & Peripatetici statuunt Colores à corporibus originem ducere, quorum dicunt esse qualitates. Attamen contrarium esse verum ex sequentibus abunde patebit. Invenio scilicet, quod modificatio Lucis, unde Colores originem sumunt, luci connata sit; & non oritur à Reflexione neque à Refractione neque à qualitatibus corporum, aut modis quibuscumque, nec ab iis vel destrui potest, vel ullo modo mutari.

5. Verum, ut sententiam meam distinctius proferam, invenio primò, quod radiis diversè refrangibilibus competant diversi colores; maximè refrangibilibus Purpura, sive Violarum color competit, et Rubor minimè refrangibilibus, atque mediocribus. Viriditas, vel potius confinium Viridis & virescentis Cærulei. Cæruleus autem Purpuræ intercedit & Viriditati, Flavusque Viriditati & Rubori. Adeoque radii prout sunt plus plusque refrangibiles, apti sunt ad hos ordine colores, Rubrum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generandos unà cum omnibus eorum successivis gradibus & coloribus intermediis.

6. Invenio præterea, quod nullius radiorum generis Forma, sive dispositio colorifica, vel refractione, vel aliâ quâcunque (quam potuerim animadvertere) causâ, mutari potest; sed unicum tantum, sibi proprium, colorem unumquodque semper conservat & exhibet; si modò à radiorum diversi generis mixturâ non conturbetur. Nam colores, qui refractionibus generari videntur, non nisi difformium radiorum mixturâ variâ, vel separatione fiunt.

7. Tertio invenio, quod color Albus & Niger, unà cum Cincereis seu Fuscis intermediis, fiunt ex radiis cujusque speciei confusè mixtis; & similiter, quod cæteri omnes colores, qui non sunt ex primitivis, per varias horum radiorum mixturas producuntur. Et inde non mirum est, si difformibus radiis per inæqualem refractionem segregatis, diversi colores ex his de novo emergere videantur.

8. Quinetiam

8. Quinetiam invenio, quod Primitivi Colores per mixturam radiorum alterutrinque confinium exhiberi possunt. Viridis nempe ex Flavò & Cæruleo; Flavus ex adjacente Viridi Citreoque, & sic de aliis. Per colores autem Primitivos non tantum quinque prædictos intelligo, sed & quoscumque alios, quibus exhibendis aptum datur aliquod uniforme radiorum genus.

9. Invenio denique, quod omnes omnium corporum colores non aliunde generantur quàm è dispositione quâdam, quâ apta sunt ut alios radios reflectant, & intromittant alios. Sic corpus rubrum est, quod radios ad Rubedinem aptos reflectit maximè, & plerumque cæteros intromittit; Purpureum, quod radios isti colori generando proprios reflectit, & intromittit alios: Album verò, quod ferè omnes reflectit; & Nigrum, quod omnes intromittit, paucissimis, sed omnium tamen specierum, radiis reperlitis.

10. Verum ne videar officii limites excessisse, dum naturam Colorum pertractare aggrediar, qui nihil ad Mathesin attinere censeantur; non abs re erit, si de ratione incepti hujus iterum commonefaciam: nimirum tanta est inter proprietates Refractionum & Colorum affinitas, ut seorsim explicari nequeant. Qui alterutras ritè velit cognoscere, ut alteras cognoscat necesse est: & præterea, si de Refractionibus non agerem, & earum disquisitionis non esset in causâ, quod negotium de Coloribus simul explicandis inceptarem; tamen generatio Colorum tantam Geometriam complectitur, & eorum cognitio tantâ firmatur evidentiâ, ut vel ipsorum gratiâ possem aggredi; sic limites Matheseos non nihil ampliaturus. Quemadmodum enim Astronomia, Geographia, Navigatio, Optica & Mechanica pro scientiis Mathematicis habeantur, licet in iis agatur de rebus Physicis, Cælo, Terrâ, Navibus, Luce & Motu Locali: sic etiam Colores ad Physicam pertinent, eorum tamen scientia pro Mathematicâ habenda est, quatenus ratione mathematicâ tractantur. Imo verò, cum horum accurata scientia videtur ex difficillimis esse, quæ Philosophus desideret; spero me quasi exemplo monstraturum, quantum Mathesis in Philosophiâ Naturali valeat; & exinde ut Geometras ad examen Naturæ strictius aggrediendum, & avidos scientiæ naturalis ad Geometriam prius addiscendam hortor: ut ne priores suum omnino tempus in speculationibus humanæ vitæ nequaquam profuturis absumant;

VOL. III.

Y y

absumant;



DE  
RADIORUM

absumant; neque posteriores, operam præposterâ methodo usque navantes, à spe suâ decidant. Verùm ut Geometris philosophantibus, & Philosophis geometriam exercentibus, pro conjecturis & probabilibus, quæ venditantur ubique, scientiam Naturæ summis tandem evidentiis firmatam nanciscamur. Itaque ad institutum redeo, de Coloribus secundum præcedentes quinque Propositiones explicatis disceptaturus.

## P R O P. I.

*Radii diversè Refrangibilibus diversi competunt Colores.*

## E X P E R. I.

11. Quo primum comprobem, repetamus experimentum Prismatis sub initio propositum; nempe Radii Solares obtenebratum cubiculum ad foramen F (fig. 1.) ingressi, à Prismate ABC, quàm proximè foramen istud intus disposito, refringantur, tendentes deinde versus oppositum parietem HI, ad imaginem PT ibi depingendam; & Imago illa, ut vulgo notum est, coloribus tingetur: quorum Rubeus ad extremitatem T à recto cursu minus deviantem, & Purpureus ad alteram procliviorē extremitatem P procidet; Cæruleus autem Viridisque & Flavus ad Q, R & S, intermedia loca, cernuntur. Constat itaque quod radii maximè refracti Purpuram exhibent, & minimè refracti Ruborem; cæterique, intermediam refractionem passi, colores in ordine præfinito intermedios. Sed in majorem evidentiam, tum doctrinæ de radiorum diversâ Refrangibilitate sub initio propositæ, tum hujus doctrinæ, quod certis Refrangibilitatis gradibus certi convenient Colores; videamus è contra an diversi coloris radii diversam Refractionem patientur; hoc est, an radii versus P tendentes refractionem iterum majorem patientur, quàm qui tendunt versus T; id quod variis modis tentare liceat, quorum facillimum & maximè perspicuum sequentem existimo.

## E X P E R. II.

12. Sume aliud Prisma abc (fig. 1.) & illud alicubi inter primum Prisma, ABC, & imaginem, PT, ita colloca, ut sit illi Prismati

mati ABC transversum, sive parallelum imagini PT, radiosque versus PT tendentes intercipiat, & alioversum refringat, puta versus pt. Hoc facto, Imaginem pt refractionibus utriusque Prismatis sic effectam videbis, ut prius coloratam, sed in alio tamen situ dispositam; non parallelam imagini PT, sed secundum extremitates rubras manifesto convergentem. Jam, cum radii ad utroque colores, Rubrum T & Purpureum P pertinentes, similiter incidant in Prisma secundum abc, si eandem præterea Refractionem paterentur, imagines PT & pt deberent esse parallelæ; & ideo, cum non existunt parallelæ, sed imaginis pt extremitas Purpurea, p, longius ab alterâ imagine PT transferatur, quàm extremitas Rubra, t; necessario concedendum est, quod radii ad extremitatem purpuream, P, tendentes magis refringantur, quàm qui tendunt ad extremitatem rubeam T: hoc est, quod radii generantes Purpuram apti sunt, ut magis refringantur quàm Ruborem efficientes: atque idem quoque de coloribus intermediis eadem ratione constabit, sicut ostendendum proposui.

13. In experiendis hisce notari poterit, quod quo vicinior anteriori Prismati, ABC; sive quo remotior à pariete, HI, collocetur prisma posterius abc; imagines, pt & PT, eo magis ab invicem distantes, etiam ad se magis inclinabuntur; adeo ut angulum semi-rectum vel paulo minorem eo contineant, cum Prismata collocantur ad invicem vicinissima; cujus rei ratio facillima est consideranti, quod distantia, pp & tt, sunt in ratione quâdam datâ. Sic in fig. 2. si parallelæ pp ac tt sint in ratione datâ, quo majores existant, eo major erit inclinatio linearum PT ac omnium pt. Et hinc patet axes imaginum omnium productas convenire ad commune aliquod punctum cum axe ipsius PT.

14. Si fortè concursus Imaginum desideretur, radii OF, à Sole directi, eò usque producantur, donec occurrant cum plano HI, in quod dictæ imagines projiciuntur, quemadmodum videre est ad x; id quod fiet auferendo Prisma ABC, ut jubar per F trajectory rectâ tendat ad x: & erit x locus, ad quem imagines PT & pt convergunt. Nam, quemadmodum radii maximè refrangibiles cadunt in P ac p, & minimè refrangibiles in T & t, conficientes imagines oblongas, PT ac pt; si alii præterea radii darentur minus adhuc refrangibiles, illi citra punctum T ac t in papyrus IH caderent: quo

Y y 2

pacto

DE  
RADIORUM

paſto imagines illæ paulo longiores evaderent, auctæ ſcilicet ad extremitates  $r$  ac  $z$ . Atque ita, ſi fingeremus radios gradatim minus atque adhuc minus refrangibiles dari, uſque dum devotum eſſet ad radios adeo pertinaces, ut non poſſent omnino refringi; illi radii Prisma ſine aliqua refractione pertranſeunt, incidere deberent in ipſiſſimum punctum  $x$ , ad quod poſuimus radios à Sole directè venientes tendere. Imagines itaque,  $pt$  &  $pt$ , ſic productæ convenirent ad  $x$ , & proinde ad idem  $x$  convergunt. Cæterum dubitari poteſt, an imagines illæ, ſi eo uſque producerentur, dum convenirent ad  $x$ , forent accuratè rectæ vel paululum incurvatæ; neque iſtud (cùm multi foret laboris & parvi momenti) jam lubet determinare; ſufficit, quod ex obſervatione quàm proximè convergunt ad  $x$ .

15. De hoc experimento ſub initio obſervabam, § 23. quod omnibus adverſatur objectionibus, quæ contra doctrinam de inæquali Refrangibilitate traditam proponi poſſunt; ex eo quod per tranſverſam refractionem ſecundi Prisma conſtat inæquales refractiones non eſſe fortuitas & irregulares, neque ex radii cuiuſque diffuſione vel dilatatione ortas eſſe, aut alià quavis cauſa præter diſpoſitionem cuiuſque radii ad refractionem in gradu aliquo certo & conſtante patiendam; quandoquidem cuiuſque refractione in utroque Prisma ſecundum illam legem peragitur. Addo jam, quod ex hinc etiam conſtat, refractiones ſingulorum radiorum ſecundum eaſdem leges peragi, ſive commiſceantur cum radiis aliorum generum, ut ſit in albâ luce, ſive ſeparatim refringantur, luce priùs in colores converſâ. Nam experiri eſt, quod ſimiles ſunt refractiones poſterioris Prisma, cùm proximè collocatur poſt alterum Prisma, antequam Lux per id trajecta tranſmigret in Colores, atque cùm longius poſt illud Prisma ſtatuitur, ubi Lux evaſit colorata.

16. Sicui in poteſtate eſt Inſtrumentum aliquod ad quantitates Refractionum accuratè menſurandas paratum, nullus dubito, quin iſtius etiam ope ſeorſim dimetiendo refractiones diverſorum generum radiorum, facilè obſervabit earum differentias; licet ego prædictis tanquam maniſeſtiſſimis acquieſcens, haud operæ pretium duxerim rem aliis modis experiri. Verum, ut cuique magis pateat,

teat, quanta ſit prædictorum evidentia, quædam, quæ exinde ſcaturiant notatu digniſſima, proferre non pigebit.

LUCIS  
COLORIS.

## E X P E R. III.

17. Sit  $Ff$  (fig. 3.) paries, vel operculum fenestrae duobus foraminibus,  $F$  &  $f$ , luci pervium, iſque digitos duos ab invicem diſtantibus; & intus diſponantur duo Prisma,  $ABC$ ,  $DEG$ , in ſitu ſibi invicem parallelo, & perpendiculari ad lineam  $Ff$  per centra foraminum ductam; quæ duo lucem ingreſſam refringunt ad imagines duas,  $PT$  &  $MN$ , in oppoſitum parietem projiciendas, ſimili prorfus modo, quo factum eſt in experimento priori; & præterea ſint anguli Prisma,  $ACB$ ,  $DGE$ , comprehenſi planis refringentibus æquales; quibus ita conſtitutis videbis imagines,  $PT$  &  $MN$ , in directum jacentes cum extremitatibus earum  $T$  &  $M$  contiguas. Quod ſi non eveniat, ſitus unius è Prisma parum mutandus eſt, donec extremitates contiguas eſſe cernas, vel fortè nonnihil coincident. Purpurâ  $m$  & Rubore  $t$  ſic juxta poſitis, adhibeatur Prisma tertium  $abc$ , quod primis Prisma & eorum imaginibus interponatur, in ſitu ad lineam  $Ff$  ſive ad imagines dictas,  $PT$ ,  $MN$ , parallelo; ita nempe ut radios utriuſque Prisma  $ABC$ ,  $DEG$ , tendentes verſus  $PT$  &  $MN$ , pariter intercipiat, eoſque refringens aliò projiciat, quemadmodum ad  $pt$  &  $mn$ ; adeo ut quæ duobus Prisma in priori ſpecimine facta ſunt, hic videas facta tribus.

18. His ita paratis & conſtitutis, videbis imagines  $pt$  &  $mn$  ab invicem diſjunctas eſſe, quæ priùs apud  $PT$  &  $MN$  fuerunt contiguæ & in directum poſitæ; ita quidem ut Purpura,  $m$ , in extremitate imaginis  $mn$ , magis diſtet ab imaginibus primis  $PT$  &  $MN$ , quàm Rubor  $t$  in extremitate imaginis  $pt$ ; id quod nullo modo potuiſſet accidere, niſi radii ad Purpuram generandam apti aliquanto magis refringerentur ex incidentiâ pari, quàm radii generantes Rubedinem. Etenim, cùm radii coloris utriuſque pariter incident in Prisma poſterius  $abc$ , pariter etiam emergerent, ſi æqualiter refringerentur; & exinde depingerent imagines,  $pt$  &  $mn$ , prioribus,  $PT$  &  $MN$ , parallelas & in directum jacentes. Dixi radios utriuſque coloris (Purpurei Rubique) pariter incidere in Prisma poſterius  $abc$ ; quod ne moram injiciat alicui, concipiendum

DE  
RADIORUM

dum est, quòd radii  $FT$  tantum inclinatur versus extremitatem ejus  $c$ , quantum alteri  $fM$  versus extremitatem alteram  $ab$ , & sic incident pariter sive ad eosdem angulos, licet non paralleli. Si quis tamen velit efficere, ut incident etiam paralleli, nihil aliud agendum est, quàm ut alterum è Prismatibus anterioribus,  $ABC$ , vel  $DEG$ , circa suum axem paululum convertatur, donec inter  $T$  &  $M$ , interiores imaginum extremitates, tanta intercedat distantia, quanta est inter foramina  $F$  &  $f$ , sive quanta isti rei sufficiens videatur; imaginibus ad istam distantiam in directum jacentibus: & Prismate  $abc$  deinceps interposito, facile percipiet, quòd incidentes parallelè emergent inclinati; tum quòd imagines non amplius in directum jacebunt, tum quòd Purpura  $M$  ad majorem distantiam transferetur quàm Rubedo  $T$ .

19. Si tria Prismata non præsto sint, experimentum jam recitatum duobus experiri possit, idque modo magis expedito & facili. Sit  $ABCDE$  (fig. 4.) prisma, cujus unum latus planum,  $ABDE$ , papyro denigratà tegatur, duobus parvis foraminibus,  $F$  &  $f$ , luci pervià, quorum foraminum situs esto ad longitudinem Prismatis transversus. Tunc Prismate hoc ita disposito, ut radii permeantes ista foramina terminentur in oppositum quoddam planum, puta papyrum  $HI$ ; transferatur ista papyrus ultra citraque, donec videas imagines duas,  $PT$  &  $MN$ , contiguas extremitatibus in directum conjunctas ut priùs; deinde altero Prismate  $abc$  interposito, in situ ad alterum transverso, videbis imagines illas  $PT$  &  $MN$  ad  $pt$  &  $mn$  ita translatas esse, ut non amplius jaceant in directum, rubedine  $t$  à  $T$  minùs remotà, quàm purpura  $m$ , sicut in prioribus contingebat.

## E X P E R. IV.

20. Est & aliud ex eodem fonte derivatum specimen, haud expertu difficilius aut minoris evidentiae. Prismate  $ABC$  (fig. 5.) juxta foramen  $F$  ut priùs collocato, ad distantiam convenientem (veluti duodecim pedum) statuatur aliud Prisma,  $abc$ , in situ transverso respectu prioris, vel fortè parallelo, aut alio quovis pro arbitrio; ita tamen ut antè Prisma,  $ABC$ , lucem refractam & coloratam projiciat in aliquod ex planis lateribus,  $ac$ ; quod quidem latus obducatur papyro denigratà, & exiguo foramine,  $G$ , per medium

## SECT. I.

## O P T I C Æ.

LUCIS  
COLORIBUS.

medium transfossà, per quod aliqui ex radiis, ab anteriore Prismate refractis, transeant in hoc Prisma posterius; ubi, cum rursus refracti fuerint, pergant ad papyrum  $HI$  ab inde decem pedibus, vel pluribus, distantem. Quibus ita constructis & dispositis, in situ illo figatur papyrus,  $HI$ , & posterius Prisma  $abc$ . Denique præ manibus sumatur antè Prisma  $ABC$ , non ut moveatur è loco ejus, sed ut motu tantum angulari nunc huc nunc illuc paululum inclinetur, ut alios atque alios colores successivè trajiciat per foramen  $G$  in oppositam papyrum  $HI$ ; & videbis, quòd color quilibet diversus ad locum diversum perget. Veluti, cum ea sit positio Prismatis  $ABC$ , ut Rubeum colorem projiciat in  $G$ , si ponatur quòd ille ab altero Prismate  $abc$  refringatur ad  $T$ ; tum positione Prismatis  $ABC$  paululum mutatà, inclinando circa axem donec Purpura cadat in  $G$ ; videbis, quòd ille color juxta obliquiorem tramitem refringetur, puta ad  $P$ : & pari modo, si color aliquis intermedius incidat in  $G$ , idem refringetur ad locum ipsis  $P$  &  $T$  interjacentem. Quamobrem, cum radii cujuslibet generis pergentes à foramine  $F$ , positione dato, ad foramen  $G$  positione datum, & ideo similiter incidentes in Prisma posterius  $abc$ , refringantur ad loca diversa  $P$ ,  $T$ , cæteraque intermedia; constat, quòd inæqualiter refringantur: & cum refractus  $GP$  observetur magis deflectere ab incidente  $FO$  quàm refractus  $GT$ , constat, quòd radii Purpuram exhibentes magis refringantur quàm exhibentes Ruborem; cæterique deinceps in ordine intermedio.

21. Siqua forsan oboritur suspicio, quòd ex motu Prismatis  $ABC$ , foraminibus  $F$  &  $G$  interpositi, incidentia radiorum diversos colores efficientium tantum varietur, quantum sufficiat ad varietatem efficiendam locorum  $P$ ,  $T$ , &c. ad quos refringuntur, quamvis motus istè sit exiguus & ineptus huic effectui; tamen, ut suspicio illa prorsus eximatur, antè Prisma  $ABC$  ad alteras partes foraminis  $F$ , Solem versus, collocandum est; ut radii incidentes in foramen  $G$  directè veniant à dicto foramine  $F$ : eo enim pacto, cum foramina  $F$  &  $G$  positione determinantur, positio radiorum per utrumque trajectorum determinabitur; eademque accurata erit omnium incidentia, quoscunque colores exhibentium: & tamen diversicolorum refractio non secus peragetur ad loca diversa,  $P$ ,  $T$ , &  $C$ , quàm modò explicui.

## E X P E R.

DE  
RADIORUM

## EXPER. V.

22. Ex abundanti denique placet alium recensere modum, quo hæc eadem tentari possint, ne copia desit experturis. Nimirum radiis, ut prius, per Prisma ABC (fig. 6.) trajectis, ad distantiam quamlibet, puta viginti pedum, adhibeatur Speculum planum, quale IK vel GH; quod eosdem versus locum quemvis D reflectat: ubi per aliud Prisma, LMN, transmittantur denuò versus *p* vel *t*. His positis, si Speculum istud ita collocetur ad IK, ut rubrum colorem reflectat, & notetur locus *t* ad quem hi radii tendunt, postquam transire per Prisma LMN; deinde Speculum statuatur ad GH, ut violaceum vel cæruleum colorem ad idem Prisma LMN secundum eandem lineam PTD, reflectat; & notetur locus *p*, ad ad quem isti etiam radii à dicto Prismate LMN refringantur: invenietur, quòd cæruleus color, versus *p* refractus, longius divaricabit ab incidentibus radiis PTD, quàm rubeus refractus versus *t*: atque adeo quòd radii Cæruleum generantes majorem refractionem patiantur, quàm generantes Rubeum.

23. Cum veritatem propositam sic fecerim stabilitam, hanc Propositionem concludam adnotando connexionem & affinitatem, quam Coloribus & Refractionibus interesse dixeram: nempe ex ostensis non solum pateat, quòd diversa Colorum genera cum definitis gradibus Refrangibilitatis reciprocantur; sed & iisdem experimentis probatur dari radios diversè Refrangibiles, & radios diversè Refrangibiles esse diversi Coloris; iisdemque probatur è contrà radios diversicolorese esse diversè refrangibiles, & inde radios diversè refrangibiles dari. Et scopus eorum, quæ in primis Lectionibus de dispari Refrangibilitate radiorum edocui, quoad causas Colorum intelligendas, multum illustratur; ut pateat, quòd una absque aliis dilucidè tractari nequeant.

## PROP. II.

*Radiorum Formæ, sive Dispositiones Colorificæ, non sunt Refractione mutabiles.*

24. Transactâ assertionem, quòd diversicolorese radii sint diversè refrangibiles, & è contrà; videamus, an cujuscunque radiorum, seorsim

seorsim spectati, generis Color à Refractione mutari possit; & hoc à novissimè (\*) tradito experimento quadantenus decernitur. Scilicet, cum extrema Purpura incidebat in foramen G (fig. 5.) radii, secundâ vice ad *p* refracti, Purpuram iterum exhibuere sine aliquâ Flavedine, Rubore, aut Viriditate exinde generatâ: & cum extrema Rubedo in G projiciebatur; eadem Rubedo in *t* absque Violaceo, Cæruleo, aut Viridi emergente apparuit.

25. Sed experimentum nondum omnibus numeris absolutum est; nam ubi Prisma *abc* non transversum, sed alteri Prismati ABC parallelum statuebatur, è Purpurâ Cæruleus, & è Rubedine Flavus eliciebatur; præsertim si non summæ colorum extremitates per G trajiciebantur; cum autem Viriditas trajecta fuit, colores utrinque proximi (Cæruleus nempe & Flavus) emergere; & sic Flavus Citriusque Ruborem & Viriditatem, ac Cæruleus Viriditatem & Purpuram præbuerunt. Eorum itaque reminisci oportet, quæ sub initio de more, quo oblonga hæc imago, PT, ex circulis in directum positis formatur, explicui; & inde constabit hosce colores non simplices esse, sed è plurium mixturâ componi. Nam concipe genus radiorum æqualiter refrangibilium, & intensam Purpuram generantium, ab integro Solari disco profluere, & per Prisma, versus imaginem PT (fig. 7.) trajectos incidere in circulum AC. Deinde aliud concipe radiorum, paulo minus refrangibilium, genus in alium circulum YZ, qui priorem in e continet, incidere; & manifestum est, quòd nulli istorum generum radii commiscebuntur: quippe cum circulos, AC & YZ, ex nullâ parte coincidentes occupant. Quòd si tertium radiorum, intermediam refractionem passorum, genus, in circulum ER, quasi in medio positum, incidere singas, patebit aliquos ex istis cum utrisque prioribus in spatiis HI & KL misceri, in quibus nempe circuli ab illis illuminati coincidunt; atque ita, si concipias imaginem totam, PT, ex innumeris circulis, in longum dispositis, componi, quorum quilibet à diversis radiorum generibus illuminatur; constabit, quòd in omni ejus parte radii heterogenei commisceantur: quibus deinde per iteratam refractionem magis segregatis, color quilibet in simpliciores resolvi debet. Sic in Viridi latet Flavus & Cæruleus; qui tamen non conspiciuntur, tum quòd Viridita-

(\*) Imo ex Quarto.

De  
RADIORUM

tem generantes, five (ut perspicuitatis gratiâ voces fingam) Viridiformes radii propter copiam præpollent, tum quòd Flavus & Cæruleus Viridem componunt; sed quatenus per secundam refractionem secernuntur, unusquisque sub propriâ formâ videbitur. Et sic in aliis.

## EXPER. VI.

26. His perspectis periclitatus sum, quid è pluribus refractionibus eveniret; hoc fretus consilio, quòd Colores iteratis Refractionibus plus plusque mutari deberent, si modò à singulis quamlibet internam mutationem paterentur; contrâ verò, si non intrinsecus mutati, sed, per divergentiam difformium radiorum, è misturis tantum educti & segregati essent: tum apparentes mutationes iteratis Refractionibus minores fieri, propterea quòd Colores quâlibet vice simpliciores evaderent: & experienti posterior casus evenit. Scilicet, cum coloris per posterius Prisma *abc* trajecti, partem aliquam tertio Prismate, ad distantiam aliquot pedum disposito, exceperim; Color ille denuo trajectus adeo perdurabat, ut, si ratione non constitisset mutationem aliquam eventuram fuisse, sensu iudice haud mutari percepissem. Tentabam deinde, siquam quartâ Refractione mutationem sensibilem inducere potuerim, sed frustra. Interea cavendum est, ne foramina, *F* ac *G*, cæteraque, per quæ lux transit, majora statuatur, quàm exigunt colores, ut evadant perspicui.

27. Est & alia methodus, quâ diversi Colores ab invicem segregari possunt, ut in segregatis examen statuatur; scilicet experimentum sub initio traditum est, quo Solis imago, *PT*, per contractionem cujusque circularis imaginis, oblongam illam efformantis, multo oblongior quàm aliàs evaserit. Nam in contractâ imagine *pt* (fig. 8.) quæ totidem constat circulis, eadem centra retinentibus, quot sunt in majori *PT*, circuli minus coincidunt. Sic enim *ac* & *ef* ex parte *HI* coincidunt; at cum in minores *ac* & *ef* contrahuntur, videre est, quòd ex omni parte ab invicem distant, & sic de aliis. Quamobrem, cum circuli à diversis radiorum generibus illuminati jam minus confunduntur, Colores evadent minus commixti, utut non fient omnino simplices; propterea quòd circuli, inter *ac*, *ef* cæterosque positi, cum illis ex ali-

quâ suâ parte possint coincidere. Sed hæc de causâ plures ejusdem cujusque coloris gradus tantum commisceri possunt, ut Cyaneus & Indicus in Cæruleo, Coccineus, Minius, & fortasse Citrius in Rubro; & sic de aliis. Quæ quidem mixtura semper fiet eo minor, quo imago *pt* in angustiore contrahitur.

## EXPER. VII.

28. Disposui itaque Prisma *ABC* (fig. 9.) unâ cum lente *LM*, ad distantiam quasi decem pedum à foramine *F*, per quod Sol illuxit cubiculum; & radii, per hæc duo vitra trajecti, desideratam imaginem contractam, *pt*, ad pedes exinde decem circiter formabant; lente *LM* existente tali, ut radios parallelos ad focum quinque pedibus à se distantem cogeret. Deinde aliud adhibui Prisma, *HIK*; cujus latus planum *HI* velamine nigro, ad *n* (ut dictum est) transverso, tegebatur, & ad imaginem *pt* statui; ubi Colores secundum latitudinem maximè contractos & distinctè terminatos vidi, ut eorum aliquis pro arbitrio transmitteretur per *n* in parietem, vel papyrus *yz*. Quibus positis observabam deinde, quòd Colores hoc modo multo minus à repetitis Refractionibus mutati fuerint, quàm in præcedentibus. Cum rubor per *n* transmissus est, idem rubor ad *yz* apparuit, & non alius color quispian, demptis variis ejusdem gradibus, ut Coccineo & Minio: et sic Viriditas in varios solummodo gradus discreta fuit, ex unâ parte vergens ad Flavescentem Viriditatem, & ex aliâ Thalassinum; sed in Flavum aut Cæruleum, aliumve colorem quemvis, ex nulli sui parte transformari potuit. Atque idem in aliis coloribus contigit.

29. Observabam præterea, quòd cum foramen *F* factum erat angustius, ut per imaginis *pt* majorem contractionem colores evaderent simpliciores, colores ad *yz* trajecti minus adhuc mutati fuerint, & vix aliquam mutationem sensibilem passi fuisse videbantur, cum foramina non latius duodecimâ parte digiti patuere; hoc tantum excepto discrimine, quòd lux apud *pt* fortior erat (quia magis contracta) quàm apud *yz*. Atque adeo nil dubitandum esse censeo, quin colores evaderint prorsus immutabiles, si modò per indefinitam parvitatem foraminum, *F* & *n*, omnino in simplices discerni possunt. Et hoc ex eo etiam confirmatur, quòd

De  
RADIORUM

cum texti lentem LM, juxta perimetrum ejus, velamine nigro, per medium ad latitudinem ferè semissis digiti circulariter pertuso, figura imaginis YZ pene orbicularis evasit; & eo magis orbicularis, quo magis foramen F contraxi. Id quod notari vellem, cum plurimum illustret, causam imaginis PT in longitudinem diductæ non aliam fore, quàm radorum coloribus dissimilium diversam refrangibilitatem.

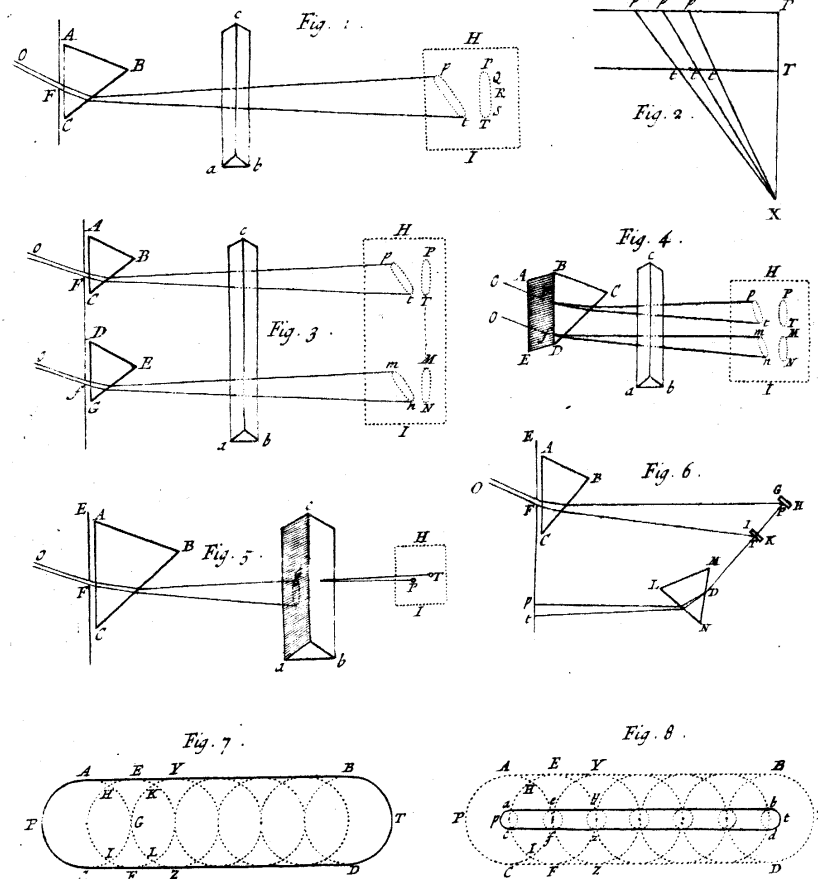
30. Cæterum, quo propositum adhuc magis pateat, & ex abundanti ut constet, quinam sint Colores Primitivi; adverto circulos AC, EF, YZ cæterosque in alternas partes juxta lineam, quæ per omnium centra transit, maximè extendi, & ab invicem recedere, antequam attingant parallelas rectas AB & CD, quibuscum imago illa utrinque terminatur. Sic AC & EF, se mutuo secantes in H & I, recedunt postea, non omnino coincidentes in triangulis AHE & CIF. Colores itaque juxta ipsissimas extremitates AB & CD sunt omnino simplices. Et ex hoc fundamento propositum assequi possem; sed cum circuli illi, statim ut ab extremitatibus ipsis recedunt, inter se mutuo nimis interferuntur, quàm ut Colores, per aliquam sensibilem latitudinem, fatis ad experimenta commodè instituenda segregantur; rem potius ad hunc modum assequar.

## E X P E R. VIII.

31. E præostensis constat, figuras, ex quibus in longum dispositis imago PT componitur, circulares esse propter Solis discum circularem; & inde, si discus ille triangularis esset, vel aliâ quâcunque non circulari perimetro terminatus, illæ etiam figuræ vel triangulares, vel aliò quovis modo ad instar Solis terminatæ evaderent. Et par est ratio de foramine F, & figuris ad instar illius foraminis; ex quibus, in longum similiter dispositis, imago PT constituitur. His animadvertis, vice orbicularis foraminis F triangulare substituitur, cujus altitudo verbi gratiâ sit plusquam digiti, basis tertiæ quartæve partis digiti, & crura æqualia. Et Prismate ABC ad trianguli hujus perpendicularum existente parallelo, imago PT (fig. 10.) quadrilatera ex triangulis *caf*, *emb*, *gni* cæterisque infinitè multis efformata est; quibus juxta bases, in lineâ *cd* positas, cum se mutuo parte maximâ communicantibus, exinde ad

Tab. I.

Fig. 364.



ad usque ipsorum vertices recessio gradatim facta est, donec in verticibus, ad rectam *ab* sitis, penitus diffocientur, adeoque colores ibi simplices evadunt.

32. Jam verò observabam, quòd simplices five primitivi colores juxta terminum *ab*, etsi longè debiliores, tamen (sensu judice) ejusdem speciei apparère, ac compositi juxta terminum *cd*; cujus rei ratio est, quòd color quilibet primitivus per commisturam colorum utrinque confinium exhiberi potest, ut in sequentibus patebit. Colorum, verò quos hoc pacto primitivos esse constitit, gradus esse insigniores, Coccineus five Purpureus, Minius, Citrius, Luteus five Heliocryseus, Subflava Viriditas, Gramineus, Thalassinus, Cyaneus, Indicus & ejusmodi Violaceus; qui ad usque extremitatem imaginis extendebatur, sed absque immixta rutili alicujus fulgoris tinctura apparuit, si modò cubiculum factum fuerit valdè tenebrosus.

33. Observabam præterea, quòd coloribus hisce juxta terminum *ab* conspicuis, non potui sensibilem speciei mutationem, Refractionibus utcumque repetitis, inducere. Quinetiam tentabam, si quo alio pacto mutare possem, quemadmodum reflectendo à corporibus diversimodè coloratis. Sed in eo frustra fui; nam (superflua luce quaquaversum penitus exclusa) si cæruliformes radii in aurum incidere, illud aurum cærulei coloris evasit: si flaviformes in Indicum incidere, flavescibat Indicum. Et sic in cæteris, adeoque hanc Propositionem satis superque stabilem effecisseam.

### PROPOSITIONE III.

*Colores Albi & Nigri, cum Cinereis sive Fuscis intermediis, ex radiis uniuscujusque speciei confuse mixtis generantur.*

34. Assertionis veritas è præcedenti Propositione manifesta est; nam colores qui non sunt ex primitivis (quales non repèriuntur jam recensiti) per compositionem generari necesse est. At non gravabor tamen fusiis probare; idque potissimum, cum lucem cui color Albus competit, ex radiis quoad qualitates colorificas æquè ac refrangibilitatem heterogeneis componi, eaque de causa albere certissimè constat. Proponitur itaque jam monstrandum esse,

DE  
RADIO RUM

esse, quòd, cum omnes omnino Colores, quos prismata generant, debitè commisceantur, Albedo exinde resultabit; deque tali mixturà perfectè componendà plures modos, eo quo cogitabam ordine, recensere animus est.

## E X P E R. IX.

35. Ac primò rem aggressus sum cum pluribus prismatibus ita dispositis, ut Colores eorum in eundem locum inciderent, & sic inter se miscerentur. Sint ABC, DEF ac GHI (fig. I I.) tria prismata, juxta se, situ parallelo, ita disposita, ut alterum DEF sit alteris duobus, ABC & GHI, utrinque vicinissimis intermedium, in morem trium linearum conficientium capitalem literam Græcam  $\Xi$ ; & lux per unumquodque prisma liberè transiens, excipiat in papyrum PT, pede uno vel duobus postpositam. Coloribus omnium prismatum sic in ipsam PT projectis, convertantur prismata circa proprios axes, & videbis colores istos sibi invicem accedere vel recedere. Quare convertantur, donec talis sit eorum situs, ut unius prismatis, ABC, Rubor, & alterius, GHI, Purpura, vel Color Indicus, cum Viriditate tertii, DEF, coincidant; sicut vides factum ad R: & ex istis coloribus, ita sibi commixtis, Albedinem generari cernes; colore Purpureo & Cæruleo juxta P conspecto; Rubeo verò & Flavò juxta T; & Albo juxta R cæteros intercedente.

36. Cæterum in istis experiendis convenit observare sequentia. Primò, si anguli prismatum, planis refringentibus contenti, ACB, DEF & GHI, sint inæquales; præstat, ut illud prisma, cujus angulus GIH maximus est, ponatur versus exteriorem partem anguli contenti radiis incidentibus & refractis, & istud versus interiorem, cujus angulus ACB est minimus.

37. Secundo Aperturæ, per quas lux transmittitur trans prismata, debent esse magnæ; imo convenit, ut transitus luci per tota prismata pateat, obstaculo nullo adhibito; neque opus est, ut experimentum in tenebris peragatur, sicut in aliis quamplurimis requiritur.

38. Tertio papyrus PT, in quam Colores incidunt, non nimis distare debet à prismatibus: sufficit distantia pedum plus minus duorum. Has autem aperturas & distantiam statuo, ut colores

eo meliùs commisceantur ad Albedinem perfectiorem componendam. LUCIS  
COLORIBUS.

39. Quartò, ut colores ad R faciliùs etiam & satiùs commisceantur, prisma ABC statuatur in situ quocunque tali, ut radii, tum ingredienti, tum emergentes, Refractionem præterpropter æqualem patiantur, & in eo situ figatur. Et colores ejus ad distantiam duorum pedum excipiantur, vel ad eam potius, ubi vides Flavum ejus & Cæruleum modò contiguos, Albedine intermedià tum evanescente. Postea figatur aliud prisma GHI in tali situ, ut Purpura ejus contingat Ruborem alterius ABC, non autem coincidat illi, & linea contactus notetur. Deinde tertium prisma DEF sic fige, ut ejus colorum medietas cadat in dictam lineam contactus; quod ubi contingit, faciliè cognosces, intercipiendo lucem cætera prismata ingressuram. Denique papyrus PT ultra citraque transferatur paululum, donec videas Albedinem perfectam in medio colorum ad R generari. Quam quidem Albedinem ex variis coloribus compositam esse constabit, intercipiendo colores unius duorumve prismatum, priusquam attingant papyrus; nam loco Albedinis, eos, quos non intercipis, colores intueberis.

40. Denique si velis, ut colores cujusque prismatis perfectiùs misceantur, possis adhibere plura prismata, modò præsto sint; tamen eventus non deerit expectationi, si tria tantum adhibeas. Etenim colores cujusque prismatis, seorsum spectati, non sunt omnino simplices, sed Viridis & Rubeus nonnihil miscentur in Flavò; & Purpureus ac Viridis in Cæruleo; & sic de reliquis, quemadmodum in sequentibus ostendetur: & inde fiet, quòd cum tria tantum Prismata adhibentur, non solum tres colores, Rubeus, Viridis & Indicus commisceantur in R, sed etiam Cæruleus & Flavus, unà cum omnibus eorum gradibus intermediis, istam Albedinis compositionem ingrediantur.

## E X P E R. X.

41. Verum, cum tot prismata in situ tam accurato disponere, propter motum Solis & alia incommoda, difficile forsitan & laboriosum simul inveniatur, nisi adhibeatur machina quædam eà de causà fabricata, ut ejus ope prismata in desiderato situ figantur; alium propterea modum profero, quo ista negotio leviori, idque unico



DE  
RADIORUM

unico prismatē periclitari poteris. Sumatur papyrus, vel aliud opacum corpus attenuatum, in morem laminæ, & in eo confodiantur oblongæ rimæ sex, aut plures, parallelæ, quarum latitudines sint æquales distantis, aut iis paulo majores. Deinde papyrus ista figatur alicui ex planis lateribus prismatis. Sit illud latūs papyro obductum ACED (fig. 12.) & rimæ in papyro excisæ litteris / designentur, quarum situs esto parallelus ad EC concursum laterum refringentium prismatis, sive ad verticem ejus. Papyrus autem debet toti isti plano, ADEC, superindui; nequa lux alibi transmissa quàm per prædictas rimas perturbet experimentum. Tum prisma statuatur in luce Solis, ut radii ejus per dictas rimas id ingrediantur, vel, postquam refracti fuerint, per eas egrediantur, & in isto situ figatur. Quo facto, sumatur alia papyrus PT, quæ sic teneatur à posticâ parte prismatis, ad distantiam trium duorumve digitorum, ut in eam lux terminetur; & videbis tot lineas colorum, quot sunt oblongæ rimæ /, quarum linearum cuique tot competunt colores, quot solent apparere virtute prismatum. Nempe quælibet rima subit officium unius è prismatibus, experimento priori adhibitis, & proprios colores, Cæruleum, Rubrum, cæterosque generat; quasi tot essent Prismata, quot sunt rimæ. Porro, si papyrus PT longius differatur à prismate, coloratas istas lineas paululum dilatari cernes, & interjecta spatia minui, donec absorbeantur à coloribus tandem factis contiguis. Et, si papyrus adhuc longius differatur, colores à diversis rimis effecti, Rubri cum Cæruleis primò, deinde alii cum aliis, incipient plus plusque misceri, & sic sese paulatim diluent; donec, cum mistura satis absoluta est, convertantur in Albedinem, præterquam in eorum extremitatibus P ac T, ubi mixtura & confusio ferè nulla est. Et isthæc accidunt, cum papyrus PT quasi ad distantiam decem vel duodecim vicibus majorem ipsâ AC vel EC, latitudine planorum prismæ constituentium, amovetur. Quòd si amoveatur adhuc longius, absimilium radiorum commistio perfectior fortasse evadet, sed colores Purpurei & Cærulei ad P, ac Flavi ac Rubri ad T, latiores fient, & interjectum spatium album minuetur, donec totum destruat ab istis coloribus occupatum.

42. In hisce autem experiendis cavendum est, ut oblonga foramina, /, sint accuratè æqualia, & æqualibus distantis ab invicem

LUCIS  
COLORIBUS.

cem diffita; ne luce magis copiosa per aliquod ingressa quàm per cætera, colores exinde generati prævaleant cæteris, & misturam perfectam conturbent, & sic vice Albedinis colores apparebunt hinc illinc more fortuito sparsi. Illa vero distantia rimarum /, ut & earundem latitudo, non malè statuitur esse pars digiti circiter duodecima, aut eâ major fortè, si prisma satis amplum adhibeas. Quinetiam, si cupias, ut experimentum sit omnibus numeris absolutum, vice prismatum vitreorum vulgo venalium, quæ sunt nimis gracilia, debes amplioribus uti; qualia possis efficere ex laminis vitreis utrinque perpolitis, & conjunctis in morem vasculi prismiformis; quod vasculum impleatur aquâ clarissimâ, & undique cemento obturetur. Non multum refert, quænam sit hujus latitudo; sufficit, ut sit trium digitorum. Sed refringentia latera debent esse quatuor, vel sex digitos lata, aut amplius; ut rimæ præfatae, /, cum distantis earum fiant majores, & plures, & magis accuratæ. Sin utaris angustioribus, qualia vulgo venduntur, colores externi juxta P ac T, dilatando, prius destruent interjectam albedinem, quàm perficiatur per remotionem papyri PT. Et illa præterea, quæ in totum constant ex vitro, colore aliquo vel Viridi vel Flavo plerumque tinguntur; & radios ita tingunt in transitu, ut Albedinem perfectam exhibere nequeant.

43. Jam verò audire videor objectionem, ex receptis Philosophorum opinionibus depromptam. Dicat enim aliquis, quòd Colores reverà & propriè loquendo non miscentur, sed destruantur potius; idque eâ de causâ, quòd umbræ vicinia, quæ necessaria est ad productionem Colorum, tollitur, cum radii, per diversas rimas trajecti, commisceri incipiunt; & propterea, quòd radiis sic mixtis, quorum motus inter se dissentit, necesse est, ut isti motus destruant alterutros, quibus cessantibus Color omnis perit, & in Albedinem convertitur. Sic Cartesianus aliquis contendat fortè, quòd, cum globuli miscentur, quorum rotationes contrariantur sibi; necesse est, ut impediant sese, & alternos motus destruant. Et sic alii objiciant alia.

44. Sed responsio multiplex in promptu est: & imprimis inquam, quòd, cum umbræ, coloribus interjectæ, primùm evanescunt, removendo papyrus PT; colores tamen non ideo pereunt, neque minimum immutantur, donec incipiunt misceri per remotionem

tiorem distantiam papyri; & Albedo non producitur, donec, per distantiam adhuc remotiorem, mixtura radiorum omnis generis evadat perfecta. Unde confinium Umbræ non est necessarium ad Colores producendos, neque Albedo generatur ex isto sublato.

45. Secundo, Colores, qui primò omnium miscentur, nimirum Purpureus sive Violaceus, & Rubeus, videntur maximè esse omnium dissimiles, propterea quòd adversas colorum extremitates occupent. Quamobrem itaque motus eorum contrarii non destruant sese, neque color albus generatur, antequam cæteri etiam colores omnes miscentur?

46. Tertio, cuique licet observare, idque nullo negotio, quòd colores non omnino mutantur trajiciendo radios per Medium quantumvis luminosum: sic colores Prismatum sunt iidem, sive trajiciantur per spatium illuminatum, sive tenebris involutum; & res omnes eodem modo coloratæ cernuntur, sive conspiciantur, cum lumen Solis trajiciatur per intermedium spatium, sive cum excludatur; id quod secus esset, si lux in lucem, per idem Medium transeuntem, potest agere. Quinimo si radii, duobus prismatibus refracti, sese decussent, postquam ab invicem discreti sunt, eosdem colores efficient, quos aliàs efficerent, si non omnino miscerentur. Id quod non possèt evenire, si radii, diversis coloribus tincti, sibi mutuò per eadem spatia transeuntibus mutationem aliquam inducerent.

47. Quarto, cum in illà distantia papyrum PT fixeris, ubi colores Albedinem optimè componunt; statuatur alia papyrus YZ, ad distantiam duorum vel trium digitorum à prisma, & in eà notentur lineæ coloratæ; tum excindantur istæ partes papyri, in quas dictæ lineæ cecidère. Factis eo pacto rimis oblongis vvvvvv parallelis & æqualibus, ut & æquè latæ ac distantibus; deinde papyrus ista YZ in locum suum restituatur, trës digitos circiter à prisma distantem; ut per rimas ejus lux colorata trajiciatur ad alteram papyrum PT longinquiorem; quo facto possis observare, quòd si parùm deprimas papyrum YZ, ut Purpureos colores & Cæruleos, superioribus labris rimarum ejus impingentes, intercipiat, & transmittat cæteros; Albedo ad papyrum PT convertitur in Rubrum colorem, aut Citrium vel Flavum: sin attollas eam, ut Rubei & Flavi labris inferioribus intercipientur, cæterique perla-

bantur,

bantur; Albedo ista convertitur in Purpureum, Indicum & Cæruleum; perinde ut fieri oportet in mixturâ colorum: nam unis est mixturâ sublatis, alteri debent ad propriam speciem & formam restitui.

48. Quinto, papyro YZ sublata, & reliquis stantibus, papyrum alteram PT in meditullio Albedinis ac perfora, ut lucis ejus alba portiuncula trajiciatur; quam deinceps accipe in aliam papyrum, isti PT ad distantiam quatuor vel sex digitorum postpositam, & vice Albedinis colores iterum apparebunt. At, quomodo colores ille de novo generari potuissent, si destruerentur in productione, potius quàm miscerentur, non video. Concedendum est itaque, quòd tantum miscentur; & quòd radii, variis coloribus tincti, & promanantes à diversis rimis L, l, decussant sese in dicto foramine ac effecto, & postea divergentes ab invicem gradatim segregantur, & segregati proprios iterum colores depingunt, quemadmodum posthac fusiùs explicabitur. Ad eundem præterea modum, si Speculum aliquod planum & exiguum, K, statuas in medio Albedinis, ad PT papyrum effectæ, ita quidem ut aliquos ex albificantibus radiis aliorum, veluti ad P, reflectat; lux alba sic reflexa degenerabit in colores, quos videre est ad P papyrum objiciendo. Etenim radii tincti cum diversis coloribus, & in albedinem ad speculum K commisti, inclinantur ad se invicem; propterea quòd adveniunt à diversis fissuris L, l, l, l, l, l. Atqui tantum divergunt à Speculo, postquam reflectuntur, quantum antea convergebant. Divergentes itaque paulatim diffocientur; ac diffociati proprios colores non secus exhibebunt, quàm si nunquam fuissent commisti. Liquet ergo, quòd in mixturâ radiorum diversicolorum dispositiones ad efficiendos varios colores non destruntur; utut Albedinem exhibeant, dum commisceantur sibi.

49. Ad hæc, lamina K, si valde obliquetur ad radios in ipsam incidentes, non amplius Alba apparebit, sed vel cum Rubro vel Cæruleo colore imbuta, prout vel versus verticalem angulum, vel versus basin prismatis inclinatur; id quòd nullo modo accideret, si alba lux, quacum illuminatur, homogenea esset; quandoquidem alba & specularia corpora reflectendo lucem, non mutant colorem ejus. Sed hoc ex eo evenire fatendum est, quòd in Speculum, quando incidentibus radiis admodum obliquatur, pauciores ex ob-

liquioribus radiis in illud incident, inque reflexâ luce major sit copia radiorum minus obliquorum, qui proinde prædominantur, & proprium colorem ostendunt; quem non possent exerere, si, ad albedinem lucis incidentis producendam, non tantum cum aliis coloribus miscerentur, sed reverâ transmutarentur in uniformem Albedinem. Cæterum nota, quod in isthoc experimento faciendo, præstat laminam non perpolitam, sed superficie nonnihil asperâ, qualis est nummi argentei vel chartæ, &c. præditam adhibere.

50. Præterea vulgo notum est, quod ex pulveribus diversicoloribus, inter se commistis, novus color emergit; tamen, si pulveres isti inspiciantur Microscopiis, omnes videntur tincti propriis coloribus. Adeo ut ex mixturâ pulverum colores proprii non destruantur, sed permiscendo tantum color novus eliciatur. Verum iidem planè colores ex mixturâ colorum Prismaticum ac Pulverum producuntur. Sic pulvis Cæruleus cum Flavo mixtus producit Viriditatem; & eadem Viriditas etiam producitur ex mixturâ radiorum tinctorum cum Cæruleo & Flavo: & proinde non dubium est, quin colores novi ex coalescentibus Prismaticum coloribus, non factâ assimilatione sed mixturâ tantum, similiter oriantur. Cæterum, ut nullum dubitandi locum relinquerem, effeci, ut Pulveres colorum principalium, quos Prismata generant, Rubei, Flavi, Viridis, Cærulei & Purpurei, in proportionem certâ miscerentur; & licet Albedo perfecta non prodibat, tamen isti colores ad sensum perire, & quoddam genus Albedinis fuscum & obscurum, sive mediocre inter Albedinem perfectam & Nigredinem, producebatur: quod nostro proposito non minus inservit, quam si Albedo perfecta prodiiisset; quandoquidem Fuscus ille ab Albo perfecto tantum differt quantitate lucis, non autem specie coloris; ut exinde pateat, quod producitur ex Albo cum Nigredine contempto. Neque expectandum est, ut mihi videtur, alium quam Fuscum colorem è tali Pulverum mixturâ generari. Nam, cum Pulveres colorati intromittant maximam partem lucis, istam ferè solam reflectentes, quæ apta est ad exhibendos proprios colores, ut ostendetur postea; eorum mixtura maximam quoque partem lucis intromittet. Unde pro Albedine perfectâ talis color generandus est, qualis efficitur ex Albedine & Nigredine mixtis,

id est Fuscus. Attamen non eo inficias, quin tales fortè Pulveres <sup>LUCIS</sup> <sup>COLORIBUS.</sup> inveniantur, præsertim inter Mineralia, qui tantum lucis reflectant, ut mixti exhibeant Albedinem perfectiorem, quam hætenus vidi ex mixturis effectam. Cæterum, quod Pulveres coloribus tantum quinque præcipuis tinctos miscebam; non ideo cogitandum est Albedinem ex quinque solis productam fuisse, sed ex omnigenis. Nam in omnium corporum coloribus alii latent principalibus commisti, licet minus fortes, ut à principali separati non cernantur; sic in Cæruleo pulvere latent Cyaneus & Indicus, aliique gradus omnes usque ad Viridem aut Flavum fortassis ex unâ parte, & ad intensum Purpureum ex alterâ; utut Cæruleus solus appareat, quod sit cæteris longè copiosior.

51. Experientiis hæc admonitus in mentem præterea revocabam, quod corpuscula, quæ conspiciuntur in radiis Solaribus, huc & illuc volitantia, varios colores exhibent, modò quisquam ea diligenter observat in cubiculo quaquaversum luci occluso, præter unicum foramen per quod illuminantur; & tamen, cum isti pulvisculi in acervum congregantur, nullus omninò color apparet præterquam fuscus.

52. Non minus apposita est observatio, quod, cum Aqua, sapone in eâ soluto, paululum inspissata, & in spumam agitando conversa fuerit; postquam paululum constitit spuma, in singulis bullulis, ex quibus conglomeratis efformata est, innumeri omnis generis colores acutiùs inspicienti apparere; & tamen spuma, ad tantam distantiam spectata, ubi colores in singulis bullulis ab invicem distingui nequibant, apparuit perfectè candida.

53. Patet itaque colores Prismaticum reverâ non destrui ad Albedinem producendam, sed commisceri tantum; quandoquidem emergunt immutati, cum radii coeuntes decussavère, & per subsequentem divergentiam iterum dissociantur; & proprios etiam colores exhibent; cum aliqui copiosius quam cæteri reflectuntur: atque subalbus color, è mixturâ Pulverum omnigenis coloribus præditorum, ut & Albedo perfectior, è diversicoloribus bullulis, sine aliquâ congrementum colorum mutatione similiter emergat. Ad hæc, cum rei dignitas postulare videatur, ut nullus non moveatur lapis; præter modos præcedentes componendi Albedinem

libet adhibere Tertium & Quartum deinde, quo facilius prædicta experiri possis, & magis fortè cum evidentia.

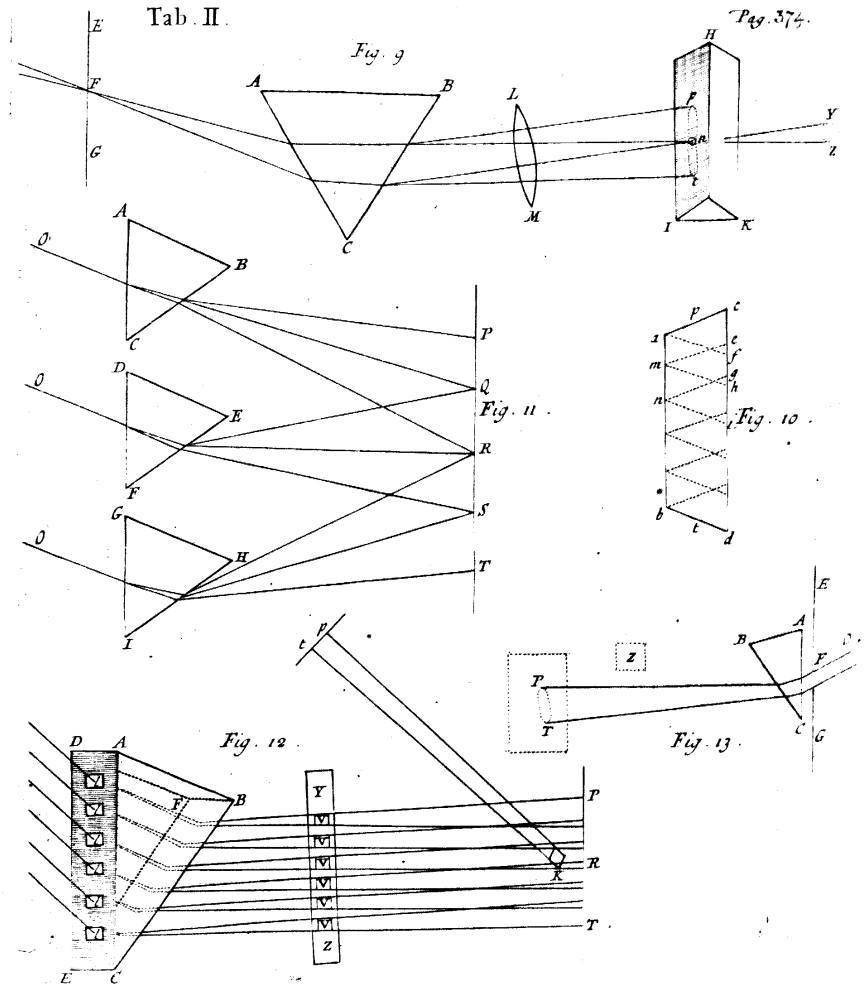
## EXPER. XI.

54. Posito quòd Sol illuceat obscurato cubiculo per unicum tantum foramen F (fig. 13.) cui Prisma ABC affigitur, ingressam lucem refringens ad PT; juxta colores, in papyrus PT sic projectos, teneatur alia papyrus Z, ut illuminetur à coloratà luce, quam altera papyrus PT reflectit. Quo factò, papyrus Z, sic illuminata radiis omnium colorum à PT confusè reflexis apparebit alba. De hoc autem specimine, maximè luculento & facili, juvabit observare sequentia.

55. Primo, quòd auferendo papyrus PT, ne lucem amplius ad Z reflectat; è consequente defectu lucis in Z, cognoscas eam illuminari per solam lucem coloratam à PT reflexam.

56. Secundo, si papyrus Z ipsi PT valde vicinam teneas, ut una pars ejus magis illuminetur ab uno colore, & alia ab alio; ipsa Z non apparebit alba, sed ejus partes ab omnibus coloribus istis tingentur, quibus sunt vicinissimæ. Sin ipsa Z ad majorem à PT distantiam transferatur, ut omnes ejus partes æqualiter ferè ab omnibus coloribus illuminentur, ex illà colorum mixturà generabitur Albedo. Pari ratione, si quémlibet è coloribus ad papyrus PT tendentibus intercipias, ne reflectetur ad Z; illud Z non amplius albescet, sed evadet coloratum pro mixturà, quam cæteri colores, in ipsam PT prolapsi, componunt.

57. Denique, quòd Albedo illa Z, non destruendo colores, sed tantum miscendo generatur, exinde pateat, quòd colores PT cernuntur beneficio radiorum non secus oculo mixtim incidentium, quam papyro Z. Itaque, si colores destruerentur potius, quam miscerentur ad Z, etiam destruerentur ad corneam tunicam oculi, vel pupillam; ubi tamen certissimum est, quòd misceantur tantum, ut decussantes postea divergant ad varias partes retinæ, & sic excitent phantasmata propria. Quinimò si radii, tincti cum diversis coloribus, dum per eadem spatia confusè transeant, possent inter se invicem agere, & dispositiones mutare, quas quilibet habent ad expingendos proprios colores; omnes omnium rerum colores conturbarentur, & se mutuò transmutarent, dum per Aera transmittuntur,



transmittuntur, ubique scilicet radiis aliorum corporum omnigenis coloribus tinctorum occurrentes; & sic in coloribus visibilium nulla esset certitudo, constantia nulla.

## EXPER. XII.

58. Quantum præterea modum descripturus, quo colores in Albedinem misceri possint, pono ABC (fig. 14.) esse prismam foras ante foramen F dispositam, quod refractam lucem in obtenebratum cubiculum transmittit versus MN. Tum lentem MN convexam sume, cujus focus est ad distantiam semipedis, vel pedis unius duorumve, quale est Objectivum Vitrum Perspicilli bipedalis, & eam statue paulo plus distantem à foramine F, quam focus distat à se; ita scilicet ut lux colorata per eam deinceps trajiciatur, sicut videre est in schemate: sit autem ejus latitudo, sive Apertura tanta, ut omnes radios transmittat. Deinde, cum lentem in dicto situ stabilitam feceris, pone statuatur papyrus PT, in quam radii hi refracti terminentur; eamque primò colloca proximè ad lentem, deinde ad majorem distantiam continuato motu transfer; & videbis colores, Purpureum P Rubeumque T, contrahi, & eoque minui, dum omnes convertantur in Albedinem; puta ad X, quatuor vel sex pedes, aut longius fortè, distantem à lente, pro convexitate ejus vel positione. Deinde, si papyrus adhuc longius transferas, colores iterum emergent, sed in situ contrario; Rubro ad T conspecto, & Purpureo ad P; neque ulla inter eos ad PT & TT differentia intercedit, præterquam quòd situs sit contrarius. Scilicet à lente MN effectum est, ut omnes radii venientes ab aliquot punctis foraminis F in totidem iterum punctis congregentur ad papyrus X; & sic omnes omnium specierum, tum Purpuram ad P, tum Rubedinem ad T, tum alios alibi colores efficientium, convergunt ad X; & ibi confusè miscentur ad Albedinem generandam: de quâ imagine albâ & orbiculari monebam supra. Postea verò, cum sese decussavere in X, radii ex tendunt ad T, & TX ad T, adeo ut colores \* expingantur ad P & T per eosdem radios PT, & iidem ad T & T per eosdem TT, & sic de aliis. Unde liquet iterum, quòd dispositiones radiorum dissimilium, ad diversos colores producendos, non destruantur per eorum mixturam; quan-

\* Lege iidem colores.

DE  
RADIORUM

doquidem eosdem expingunt cum segregantur, quos ante mixturam expungebant.

59. Porro, si radios cujusvis coloris intercipias, interponendo aliquod corpus opacum prope lentem MN, & cæteros facias missos; videbis non modò colores interceptos è papyris PT ac TT tolli, sed & Albedinem x destrui; & ejus vice colorem aliquem, qualis efficitur per mixturam radiorum præterlabentium, generari. Sic, si radios intercipias ostendentes Rubeum ad N, Rubedo T ac T tollitur, ac Albedo x convertetur in Cæruleum. Vel, si sisas tum Rubeum ad N tum Purpureum ad M, & intermedios Flavum, Viridem, & Cæruleum præterlapsos mittas, ex eorum mixturâ Viriditas producet ad x. Et sic prætermittendo quos velis, & sistendo alios pro arbitrato, possis experiri mixturas quaslibet; & explorare, qui color inde generabitur, modò pretium laboris experientiam illam judicaveris.

60. Verum, cum experimenti hujus dignitas videatur exigere, ut summâ cum diligentia retegatur, & penitus explicetur, dum plura de coloribus simul complectitur & exhibet, quàm in unico tantum experimento solent latere; non gravabor modum copiosius ostendere, quo radii miscentur ad x; & nonnulla postmodo, scitu non indigna, patefacere. Itaque concipiantur tales Refractiones in Prismate fieri, ut radii incidant in varios circulos ad lentem MN, qui varios gradus Refractionis patiuntur, prout explicui in præcedentibus; sitque PQRS (fig. 15.) oblonga imago, composita ex præcedentibus circulis, & in lentem projecta; quorum circulorum extremi duo sunt PQ Purpureus, & ST Rubeus. Porro sit *ff* diameter foraminis, per quod lux in lentem trajicitur; cujus foraminis punctum aliquod, ut F, primò consideremus, à quo venientes radii dictos circulos, PQ, ST, totamque imaginem PT efformant: & præterea, cum radii eundem quemlibet circulum efformantes sint homogenei, ponatur, quòd lens sit tali figurâ prædita, ut eos omnes ad eundem illum circulum, puta Rubeum ST, pertinentes, versus punctum quoddam, z, exactè refringat; quod fieri posse per lentem convexis Hyperbolis terminatam, ut & per lentes aliter formatas, Cartesius in Dioptrica & Geometria edocuit. Est itaque z focus radiorum FS, FT, & cæterorum uniformiter Rubeorum, & recta Fz ducta erit axis lentis. Præterea, cum radii

LUCIS  
COLORIBUS.

radii FP, FQ, cæterique conficientes alterum extremum circulum PQ, colorem Purpureum ostendant, & propterea magis refringantur quàm alteri tendentes ad ST; illi ideo emergent ad punctum quoddam aliquanto propinquius quàm z, veluti ad y; ut ita facile percipiant, qui norunt focos lentium esse tanto propinquiores sibi, quanto major est earum vis refractiva. Liqueat itaque radios, in coloribus & refractionibus absimilibus, ad diversos focos convergere. Sed, cum eadem lens pluribus focis haud queat aptari, & ideo, cum z supponatur focus in quem omnes radii ad circulum Rubeum ST pertinentes exactè conveniant, radii pertinentes ad alterum circulum, PQ, purpureum omnes in ejus focum y exactè convenire nequeunt; attamen eorum concursus juxta y in axe tam proximè accuratus erit, ut quoad sensum & experientiam omnem habeatur pro accurato.

61. Quinetiam, si lens MN ponatur sphaericè convexa, ut neuter focorum y vel z strictè loquendo possit esse accuratus; tamen, quantum ad præsentia spectat, pro accuratis habere liceat. Itaque concipiendo, quòd radii manantes à PQ & ST convergant ad y vel z, & sibi decussantes divergant itidem; patebit, quòd hi duo radiorum penicilli concurrent, & miscebuntur in spatio focus y & z intermedio, veluti ad t, modo lentis centrum a ponatur intermedium circulis PQ & ST. Ad eundem modum radii cæterorum generum convergent in alios focos ipsi z & y intermedios, ac tanto propinquiores ipsi y, quanto major est eorum passio refractiva. Sic focus viridiformium radiorum cadet in medio spatio, veluti ad x; radiique cæruliformes convenient citius inter x & y, & flaviformes longinquius inter x & z; ac cæteri colores intermedii in spatiis intermediis, eorumque penicilli sese decussabunt ultra citraque locum t; ita tamen ut istæ decussationes sint eo densiores, quanto sint ipsi t viciniore, & ut spatium xt sit minimum, per quod omnes radii transeunt manantes ab eodem puncto F. Non dissimili modo radii venientes ab alio quovis puncto foraminis, ut f, si sint rubriformes, convergent ad z; si purpuriformes ad y; & ad intermedium aliquod punctum, si sint intermedii generis, & eorum concursus densissimus erit in loco medio, veluti at. Atque adeo ex radiis, ab integro foramine *ff* manantibus, foci minimè refrangibilium jacebunt in superficie

De  
RADIORUM

yy lenti proximâ, & foci maximè refrangibilium jacebunt in aliâ superficie  $zzz$  à lente remotissimâ, focique mediocriter refrangibilium jacebunt in aliis intermediis superficiebus. Et sic omnes omnium radorum foci totum spatium  $yzzy$ , à superficiebus istis integratum, occupabunt, & in eo præcipuè penicilli decussabunt, & commiscebuntur.

62. Jam ex hac descriptione venit observandum, quòd si papyrus HI teneatur in medio dicti spatii  $yzzy$ , ut in eam radii terminentur, ubi est densissimus eorum concursus, & mixtura ad Albedinem generandam perfectissima; radii viridiformes, tendentes ad focos in papyro sitos, in eam incident intra literas  $xx$ . Sed rubriformes venientes ab  $st$ , ac tendentes ad focos in superficie  $zzz$  sitos ut dictum est, incident in papyrus intra literas  $ll$ , paulo vicinius ad  $i$ . Et pari modo purpuriformes incident in eundem locum  $ll$  dum tendunt à  $pq$  ad focos sitos in superficie quâdam  $yy$  ad lentem proximâ. Cæteri autem radii cadent in alia spatia inter  $xx$  &  $ll$  mediocria, ipsisque  $xx$  tanto viciniora, quanto foci eorum minùs absint à papyro. Liquef itaque, quòd totum spatium  $xxl$  non debet albescere, sed pars ejus tantum media inter literas  $x$  &  $l$  interiores sita, ubi scilicet colores omnes commiscetur. Etenim in extremitate  $x$  versus  $H$  radii viridiformes cadunt soli, qui proinde tingent extremitatem istam cum Viriditate. Ad alteram autem extremitatem, versus  $i$ , nulla miscetur Viriditas, sed Purpura tantum cum Rubore. Qui dicta perpendet, etiam facile concipiet, quòd, cum papyrus paululum transferatur ultra citraque, colores alii præter Viriditatem apparebunt ad extremitatem imaginis versus  $H$ . Sic videlicet inter  $p$  &  $y$  Purpureus apparebit extrinsecus; inter  $y$  &  $x$ , Cæruleus & Viridis ad  $x$ , deinde Flavus inter  $x$  &  $z$ , ac Rubeus denique ad  $z$ , & postea perpetuo. Ad alteram autem imaginis extremitatem, versus  $i$  sitam, Rubeus erit extimus à  $t$  usque ad  $l$ , ubi commiscetur Purpuræ: quæ quidem mixtura dat pallidum. At ultra  $l$ , Purpura semper conspicietur. Cæterum, cum distantia inter  $y$  &  $x$  valde parva sit, & multo magis distantia inter  $x$  &  $l$  five  $x$  &  $i$ , hoc est, latitudo limbi colorati; propter summam ejus exilitatem, conspectui vix patebit, sed totum spatium  $xxl$ , nisi acrius observanti, apparebit album.

63. Cum hæc advertissem, experiebar deinde an responderent præconceptis; & licet malè successit primò, dum utebar angustâ lente; postea tamen, cum adhibui lentem eâ de causâ latiore, ut angulus  $xyt$  five  $xy$ , & inde  $xl$  five  $xt$ , hoc est, latitudo dicti limbi colorati fieret major; quod optabam, evenit. Adhibeatur igitur lens, cujus latitudo, five Apertura sit trium digitorum aut major eo, foci autem longinquitas pro lubitu pedum trium vel quatuor; tum ea collocetur ad distantiam sex vel octo pedum à foramine  $fef$ , ut colores,  $pqrst$ , in eam prolapsi usque ad extremitates ejus extendantur, nullis tamen præterlabentibus. Deinde papyrus HI pone collocetur, & transferatur ultra citraque, & ad extremitatem imaginis, versus  $H$ , videbis omnes Prismatum colores à Purpurâ ad Rubedinem usque gradatim successivos. Sed ad alteras imaginis partes, versus  $i$ , inter Purpuram ad  $z$  & Rubedinem ad  $y$  conspicuam, neque Viriditas, neque alius quisquam ex intermediis coloribus apparebit, nisi fortè qui fiunt ex Rubeo & Purpureo mixti; quemadmodum ex eo cognoscas, quòd, cum intercipis extremitatem Purpuræ, ope corporis opaci juxta lentem interpositi, ille limbus imaginis versus  $i$  fiet rubeus; sin extremitas Rubedinis ad  $t$  intercipiatur, limbus idem fiet Purpureus. Et hinc est, quòd transitus à Purpurâ ad Rubedinem, ex hac parte imaginis, fiet multo celerior quàm ex alterâ versus  $H$ , ubi colores Refractionibus absimiles omnes interveniunt. Cæterum, cum dictorum colorum latitudo tam exigua sit (scilicet haud major centesimâ parte digiti, ut nisi vitra sint benè polita, & à venis libera, & insuper experientis diligentia & curiositas solito major, fortè excidet proposito) Quamobrem in majorem evidentiam rei & experiendi copiam, addo, quòd, si Microscopium sumas, atque ita disponas, ut papyrus aliquam affixam laminæ, super quàm Objecta collocantur contemplanda, distinctè amplificet; dein ita statuas, ut imago lucida  $xxl$  incidat in istam papyrus, colores in ejus limbo, sic ampliatis, videbis fat manifestos.

## EXPER. XI.

64. Verum, cum mixtura radorum, quoad colores dissimilium, non sit adeo perfecta in hoc specimine, quin ut è coloribus aliqui in extremitate albedinis appareant (licet tam exigui, ut in-

DE  
RADIORUM

cautus fortè non advertat); placet insuper observare, quòd si vice lentis refractoriæ speculum concavum, accuratè formatum & perpolitum, adhibeas, dicta mistura fiet omnibus numeris perfectæ. Etenim irregularitas illa, quâ refractiones ita perturbantur, in reflectionibus nulla est; sed radii quoscunque colores depingentes, & utcunque refrangibiles, ad eosdem tamen angulos reflectuntur, in quibus incidunt. Quamobrem, si MN (fig. 16) sit Speculum Ellipticum, cujus foci sint F & x; radii omnes à puncto F manantes, cujuscunque sint generis, sive Purpuram ad P, sive Rubedinem ad T, sive alios alibi quoscunque colores ad Speculum exhibentes, omnes accuratè conveniunt in eodem puncto x. Quinimo, licet Speculum MN non sit ex Ellipticâ figurâ segmentum, sed è Sphæricâ, modo semidiameter sphæræ, hoc est distantia ejus à focus prædictis F & x satis magna sit, puta trium pluriumve pedum, & distantia focorum valdè parva, puta non plus quàm unius digiti: si hæc inquam ponantur, radii ab F manantes adeo propemodum convenient in x, ut istud x quoad sensum pro exacto foco habeatur: & eodem modo radii manantes ab aliis punctis, ut f, ipsi F vicinis, in aliis, ut x, ipsi x vicinis quàm proximè convenient. Et sic omnes omnino colores reflectuntur à speculo PF in unumquodque punctum imaginis xxx, totamque exhibebunt albam.

65. Sunt & alii modi componendi Albedinem; quemadmodum, si vice lentis speculive, duo Prismata, ILM & KMN (fig. 17.) in situ ad consimile Prisma ABC parallelo, ad distantiam aliquot pedum juxta posita adhibeantur; quæ radios in contrarias partes refringant, faciantque versas x convergere, quos Prisma ABC divergentes effecerat. Colores ad x congregati component Albedinem, ac post decussationem sub propriis (ut antea) formis ad  $\pi$  denuo apparebunt.

66. Opportuna hîc alia subit assertiois demonstratio, quòd colores in concursu non destruantur ad Albedinem efficiendam, sed commiscantur tantum: utpote rotam, dentibus undique in perimetro consitam, ita colloca juxta duo prismata ILM & KMN, vel juxta lentem MN in præcedenti experimento, ut è coloribus aliqui in dentem aliquem impingent, dum cæteri per intervallum inter illum & proximum dentem præterlabantur, & in chartam

ad

ad præfatum colorum concursum, x, excipiat. Tum rotam imprimis lentè circumvolve, & videbis singulos colores in chartam, sine aliquâ albedinis apparitione, successivè procedere; postea, si rotam tam celeri motu circumagi facias, ut succenturiantes colores, propter velocitatem consecutionis, ab invicem distingui nequeant, transmigrabunt in Albedinem, eamque quoad sensum homogeneam; sine aliquâ colorum apparitione, ex quibus, celerimè se mutuo consequentibus Albedo illa efficitur: & hanc Albedinem, è coloribus illis successivè commissis componi per se manifestum est.

67. Quinetiam Albedo non tantum ad locum concursus, x, è commissis coloribus componitur, sed etiam ad foramen fff, ubi lux modò transiit Prisma & colores nondum apparuere; quandoquidem omnes radii, quibuscunque coloribus affecti, qui ad punctum quodvis imaginis xxx convergunt, ab alio quodam puncto foraminis fff manantur, & sic iidem radii ad utrumque spatium fff & xxx miscantur, & utriusque albedinis eadem est compositio.

68. At hæc clariora fient observando primò, quòd rei alicujus utcunque figuratæ, & applicatæ ad foramen fff, umbra distinctè projicitur in papyrum radios excipientem ad x. Quinimo bullularum Aeris in prisma latentium (sicut vitris omnibus contingere solet) umbras videre licet; ad instar macularum in dictam papyrum projectas: id quod nullo pacto contingere potuisset, nisi radii manantes ab aliquot punctis ipsius fff, in totidem punctis rursus convenirent ad xxx. Et licet non exactè conveniant in iisdem punctis manantes ab iisdem, cum lens refractaria vice speculi adhibetur ut in figuris 14 & 15, & proinde colores nonnullos generent in confinio lucis & umbræ, sicut fusè explicui; tamen spatium, in quod conveniunt, tantillum est, ut pro puncto sensibili fermè habeatur.

69. Secundo, si lentem in figurâ 14 ita statuas, ut æquidistet à focus ejus F & x in medio posita, ac deinde colores excipias in papyrum PT, tum ultra lentem versas x, tum citra versas F alternis temporibus admotam; possis observare, quòd colores eodem plane modo apparent, diminuuntur, & in Albedinem paulatim convertuntur, dum dicta papyrus motu lento & continuo transfertur ad F, atque dum transfertur ad x; adeo ut divergentia colorum

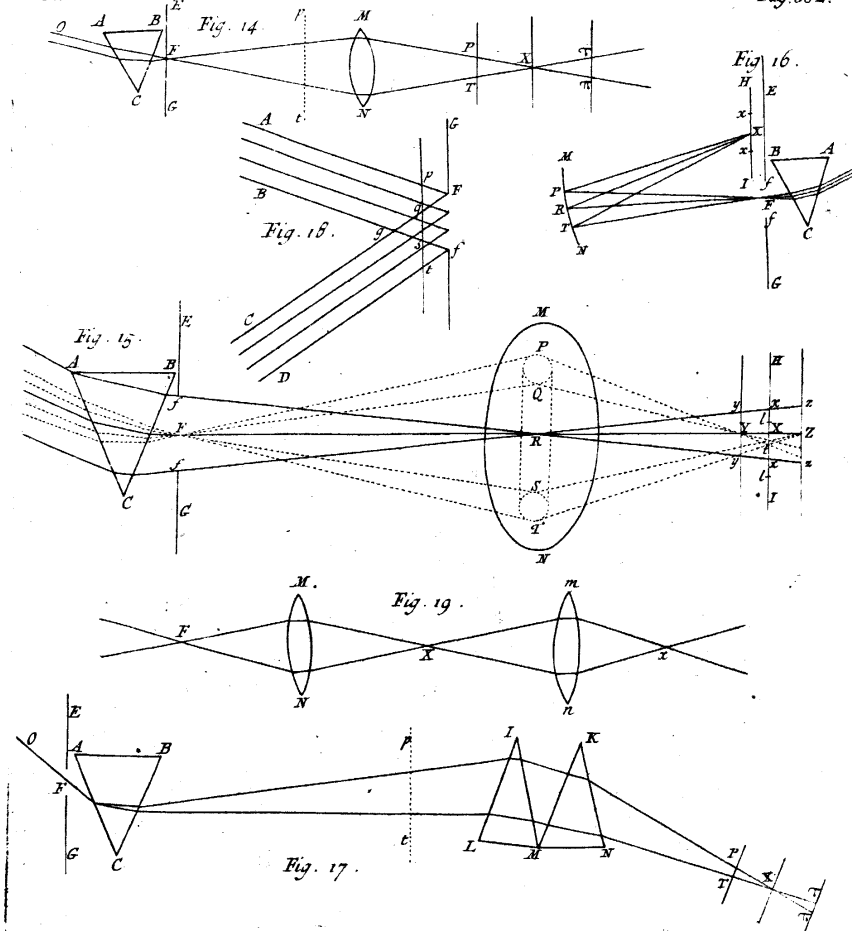
rum



rum ab  $F$  & convergentia ad  $x$  omnino similis sit. Pari ratione, si papyrus  $\pi\tau$  lentè moveatur ad  $x$ , juxta &  $pt$  moveatur ad  $F$ , iidem colores conspiciuntur in utrâque, & eodem modo desinent in Albedinem; hoc tantùm excepto, quòd eorum situs contrariatur propter decussationem radorum in  $x$ ; atque adeo divergentia colorum ab utrisque,  $F$  &  $x$ , similis est. Quid itaque concludendum est exinde, quàm quòd eodem modo commiscuntur, & ad  $F$ , antequam divaricaverunt ab invicem, & ad  $x$ , ubi rursus congregantur in Albedinem? Sed, ut comparatio modò facta evadat illustrior, venit observandum porro, quòd cum papyrus statuitur ipsi  $F$  contigua, & amovetur deinde versus  $pt$ , & postea statuitur ad  $x$ , & amovetur versus  $\pi\tau$ ; quòd inquam Albedo ad  $F$  &  $x$ , in utroque casu, primò degenerabit in colores secundum extremitates ejus, dum in meditullio manet alba; cujus rei ratio non est alia, quàm quòd radii divergentes perinde segregantur in confinio lucis & umbræ. Sic, posito quòd radii divergant à spatio  $Ff$  (fig. 18.) alii quidem paralleli tendentes ad  $AB$ , atque alii ad priores inclinati sed inter se paralleli tendentes ad  $CD$ ; prima segregatio fiet in extremitatibus juxta lineas  $FA$  &  $FD$ , ultimaque in medio veluti ad  $g$ : nam in lineâ  $pt$ , inter  $Ff$  &  $g$  ductâ, videre est, quòd paralleli juxta extremitates  $pq$  &  $st$  ab invicem segregantur, sed maxime transeunt per intermedium spatium  $qs$ .

70. Tertio, sicut lens  $MN$  in fig. 14. refringendo radios divergentes ab  $F$ , facit ut convergant ad  $x$  & ibi conficiant Albedinem; eodem modo, si isti radii, postquam decussavêre, divergentes ab  $x$  iterum trajiciantur per aliam lentem  $mn$  (fig. 19.) priori similem, & similiter positam inter focos ejus  $x$  &  $x$ , id est æquali ab utrisque distantia; colores, sic ad  $x$  secundâ vice congregati, Albedinem rursus component, sicut antè composuerant ad  $x$ ; hoc tantùm interposito discrimine, quòd apparebunt in limbo Albedinis ad  $x$  duplo latioris, quàm (è mox ostensis) apparent ad  $x$ , atque insuper in situ contrario. At speculis, ut dictum est, adhibitis, quæ lucem aliquoties reperiunt, isti colores erunt nulli; atque adeo penicilli  $Fx$  &  $xx$  evadent omnino similes, & similis fiet decussatio & commixtura radorum ad  $F$ ,  $x$  &  $x$ . Concludendum est itaque, quòd Lux, cum modò trajicitur per Prisma, licet Albedinem exhibeat, tamen constat ex radiis heterogeneis confusè mixtis,

Tab. III.



mixtis, & ab invicem per divergentiam mox discessuris; qui postquam ita segregantur, propriis apparent formis; sin iterum congregantur, Albedinem rursus componunt, & sic præterea in infinitum.

## EXPER. XII.

71. Imo verò Lux non solum componitur ex omnium colorum radiis, ut egreditur prisma, & nondum discernitur in colores istos; sed etiam cum nondum attingit Prisma, & antecederet ad omnem refractionem: & inde non mirum est, quod, cum segregantur in colores, virtute prismatis radios inæqualiter refringentis, & colores iterum commiscuntur ope lentis, aut alio quovis modo præmonstrato; quod inquam rursus componunt Albedinem: neque hoc solum exinde confirmatur, quod lux è coloribus composita primigeniæ luci persimilis sit; sed etiam ex eo, quod radii penitus differunt Refrangibilitate, & conceptus non est durior, quod differunt coloribus: imo cum eidem refrangibilitatis gradui color idem perpetuo competat (ut Purpureus maximè refrangibilibus, Rubeus minimè refrangibilibus, & sic porro); quid aliud ab istâ cognatione innuitur, quàm quod sint congenita, & fortasse quod à communi quâdam causâ dependent? Sed in hujus rei majorem evidentiam ostendam præterea, quod radorum Solis æqualiter incidentium quædam genera reflecti possunt, dum alia per reflectentem superficiem trajiciuntur; adeoque diversos colores diversis radiis, ante omnem refractionem, inesse. Sit ABC (fig. 20.) Prisma, quod excipit radios, in obscurum cubiculum per foramen F, uno digito latum, trajectos, eosque refringit ad papyrum vel parietem, HI, iis obsistentem apud T: porro autem, cum superficies prismatis BC non omnes refringat radios versus T, sed & plurimos reflectat; eos apud P siste etiam cum aliâ papyro KL, in morem albæ imaginis, foramini F persimili, terminante. Deinde converte Prisma circa axem ejus secundum ordinem litterarum ABCA, & videbis tum amplitudinem colorum ad T, tum quantitatem lucis ad P augeri perpetuo; donec tandem, cum Refractio ad planum BC fit maximè obliqua, colores ad T incipient evanescere, & reflecti ad P; Purpureus primò, deinde Cæruleus, Viridis & Flavus, & denique Ruber, cujus quidem lucis accessu imago.

imago *p* fiet multo lucidior quàm antea. Interea verò, dum colores ad *t* gradatim evanescent, videbis Albedinem ad *p* paululum mutari, & nonnihil vergere ad Cæruleum, per accessum nempe Purpurei & Cærulei, qui primò reflectuntur; id quod nullo modo accidisse potuisset, nisi radiis, prout à Sole veniunt, discrimen ineffe concedatur: scilicet quòd ex iis quidam, ad efficiendos Rubeum & Flavum dispositi, pertinacius, & cum minore Refractione, penetrant superficiem *bc*, & versus *t* perlabuntur; dum alii, ad exhibendum Purpureum & Cæruleum parati, superficiem dictam aut penetrant languidiùs, majores refractiones patientes; aut, si nequeant penetrare propter nimiam eorum obliquitatem, tum faciliùs & citiùs reflectuntur ad *p*, iis primò omnium reflexis, quorum potentia ad istam superficiem penetrandam sit minima; id est purpuriformibus & cæteris deinde suo ordine, prout incidentia sit magis obliqua; donec rubriformes ultimò reflectantur, obliquitate tantà & debilitati, ut non sint amplius potentes dictæ superficiei resistentiam superare. Atque hæc facile constabunt iis, qui nòrunt, quòd quo major est vis refractiva superficiei cujufvis, eo citiùs & ad minorem obliquitatem radii reflectuntur; & quo minor, eo magis obliqui penetrabunt.

72. De hoc autem experimento convenit observare, primò quòd, cum prædicta variatio Albedinis ad *p* sit admodum parva, propter exuberantiam lucis albæ collatæ ad reflexum Cæruleum, itaque cavendum est, ne prismate utaris, quod ex vitro conflatur tincto cum colore aliquo; ne lucem ad *p* reflexam ita tingat, ut difficile sit dictam variationem observare; præstat adhibere prisma ex laminis vitreis tenuibus & perpolitis confectum, & aquà limpidissimà repletum.

73. Secundo, licet mutatio dicta sit parva, tamen satis est ad ostendendum, quòd radii retinent eosdem colores cum reflectuntur, quos exhibent, cum trajiciuntur per superficiem *bc*; siquidem tingunt Albedinem *p* colore suo, quantum liceat tam paucis tingere. Colores itaque suos habuere prius, & eosdem retinent, sive refringantur, sive reflectantur; licet in mixturis plerumque celati lateant, donec eruantur (non autem fiunt) virtute prismatum.

74. Tertio,

74. Tertio, ex luce ad priorem speciem Albedinis, per reflexionem omnium colorum à *t*, restitutà, quid aliud denotatur, quàm Albedinem istam per misturam omnium colorum reproduci? Scilicet, cum Rubor ultimò reflexus admiscetur cæteris coloribus antea reflexis, reflexorum colorum mistura tunc perfecta est ad Albedinem componendam, quæ superadditur albedini prius existenti in *p*.

75. Quarto, ne qua oriatur suspicio, quòd refractiones in superficiebus *ac* & *ab*, ad ingressum radiorum in Prisma & egressum factæ, possint aliquid conducere ad effectus hosce producentes; observare licet, quòd effectus iidem producentur, cujuscunque licet magnitudinis statuatur angulus *abc*; hoc est, quæcunque sit refractionis superficiei *ac*; modò angulus *abc* ponatur ejusdem esse magnitudinis atque angulus *acb*; aliàs enim pro imagine albà ad *p* generabuntur colores. Experimentum itaque nullatenus dependet à refractionibus superficierum *ac* & *ab*; imo possis efficere, quòd, cum colores partim reflectuntur ad *p*, & partim trajiciuntur ad *t*, radii perpendiculariter incidant in *ac*, emergantque ex *ab*, & sic neutrà superficiei refringantur, modò statuas angulum *abc*, ut & *acb*, esse grad. 40. circiter, & iidem tamen effectus producentur.

#### E X P E R . XV.

76. Cæterum in majorem evidentiam & explicationem modi, quo prædicta fiunt, liceat experiri per lucem in colores discretam, quòd Purpureus primò, & cæteri deinde (quisque suo ordine) reflectuntur. Etenim (in fig. 21.) sint *abc* & *abc* duo Prismata parallela, quorum alterum *abc* projiciat colores in alterum *abc* ad distantiam duodecim vel plurium pedum. Tum Prismate *abc* circa axem ejus secundum ordinem literarum *abca* converso, donec tanta sit obliquitas radiorum in superficiem *bc* incidentium, ut incipiant ad *p* reflecti, non amplius potentes penetrare ad *t*; videbis omnes purpuriformes primò omnium reflecti, cæterosque deinde suo ordine.

77. Veruntamen quia purpuriformes radii paulo magis refringantur in primo Prismate, *abc*, & ideo magis inclinentur ad superficiem *bc* secundi Prismatis, *abc*, quàm cæteri; poterit objici, quòd

DE  
RADIORUM

quod ea de causa primò omnium reflectuntur. Quamobrem (in fig. 22.) duo prismata statuantur non parallela sibi invicem, sed in situ transverso; ut omnicoles radii quasi ad eisdem angulos incident in præfatam superficiem *bc*; quo posito, possis observare, convertendo prisma *abc* circa axem ejus secundum ordinem literarum *abca*, quod radii purpuriformes primò omnium reflectuntur, & ultimò rubriformes, coloribus ad *p* continuò translatis, prout à *t* dispareant.

## EXPER. XVI.

78. Sunt & alii præterea modi, quibus experiri liceat, quòd ex radiis similiter incidentibus quædam genera penitus reflecti possunt, dum alia partim transmittantur. Quemadmodum si *efg* (fig. 23.) sit operculum fenestræ ad *F* tenebratum, & foras statuatur Prisma *ABC*, quod lucem Solis, foramen *F* ingressuram, intercipiat, & refringat versus *f*; ad illud *f*, pedibus ab *F* duodecim aut longius postpositum, statuatur opacum corpus *efg*; quod lucem sistat, dempto parvo foramine *f*, per quod aliqua pars lucis, nempe Violacea, longius trajiciatur ad *y*. Istud autem *f* non sit semisse digiti latius. Deinde præ manibus fumatur aliud Prisma *abc*, & ad radios transverse positum statuatur, à posticâ parte foraminis *f*, circaque axem ejus convertatur, donec videas lucem Violaceam, postquam ab ejus basi *bc* obliquissimè refracta fuerit versus *t*, totam à *t* disparuisse modò, & ad *p* reflecti. Luce Violaceâ tam oblique ad *p* reflexâ ut ad *t* statim pervasura esset, modò ex angulari motu Prismatis, secundum ordinem literarum *abca* factò, angulus *cyf* vel minimum augetur; prisma istud *abc* in eo statu figatur. Tum alterum prisma, *ABC*, motu circa axem ejus nunc hæc nunc illâ partem convertatur, ut colores, quos projicit in obstaculum *eg*, paululum attollantur; eoque pacto omnes successivè transmittantur per foramen *f* in posterius prisma *abc*: & videbis, quòd, cum Flavido transmittitur ad *y*, illi radii non omnes ad *p* reflectentur, sed plurimi perrumpent superficiem *bc*, & ad *t* pertingent; et cum Rubor ad *y* transmittitur, illi radii fortius adhuc perrumpent, ut ex copiâ perrumpentis lucis & minori ejus refractione constet. Neque mirum videatur, quòd purpuriformes radii sint minùs potentes penetrare superficiem *bc*, quàm

quàm rubriformes; quandoquidem Prismatibus eodem modo dispositis antehâc ostendi, quòd majorem refractionem patientur, posito scilicet angulo *cyf* tanto, ut omnigeni radii possint superficiem *bc* penetrare. Jam, cum radii, qui citius & facilius reflectuntur in experimento ad fig. 20. tradito (P), nempe purpuriformes, etiam citius & facilius reflectantur in experimentis duobus novissimè recitatis; cum eadem iisdem radiis semper eveniant, liquet quòd hoc fit non ex contingentia, sed ex prædispositione radiorum; & quòd antecederet ad omnem reflectionem aut refractionem, quidam ad exhibendos quosdam colores sunt apti, & facilius reflexibiles, alii verò aliis coloribus & progrediendi viribus afficiuntur. Neque aliud experimentis jam recitatis discrimen interesse videtur, quàm quòd in primo radii omnium formarum, prout à Sole adveniunt, confusè mixti incident in prisma, quod rubriformes transmittit & reflectit cæruliformes: in reliquis autem duobus experimentis, dissimiles radii priùs discernuntur ab invicem, quàm incident in dictum prisma.

## EXPER. XVII.

79. Ad hæc lubet aliud adducere modum, quo dissimilitudo radiorum, in luce Solis mixtorum, innotescat, non multo dissimilem ei ad fig. 20. ostenso, sed conspectui jucundiorum & æquè scientificum. In fig. 24. sunt *AABbc* & *BbDdc* duo Prismata, ita juxta se posita & colligata, ut duo ex eorum planis *cb* conveniant sibi & coincident; excepto tantum quod nonnihil aëris, in morem tenuissimæ laminæ, intercedat iis; id quod eveniet ultrò, siquidem haud queas prismata tam arctè constringere, quin tantum intercedet aëris, quantum proposito sufficiet. Porro in majorem rei evidentiam convenit, ut anguli *ACB* & *CBD* sint æquales proximè; eò ut plana *AAC* & *BbDd* fiant parallela, licet hoc non sit omnino necessarium. His præmissis, statuatur dicta prismata juxta foramen *F*; ut lux ingressa per ea trajiciatur versus *l*, primò permeans superficiem *AAC*, deinde intermediam superficiem *Bbc*, & inde per *BbDd* prolapsa in papyrus ad *l* collocatam, quam Albedine tingit, tanquam si non omnino transiret prismata, sed vitrum parallelis planis, *AAC* & *BbDd*, terminatum. Præterea, cum intermedia superficies *Bbc* lucem ei incidentem non omnem

(P) Id est, decimo quarto.

C c c 2

transmittat

DE  
RADIORUM

transmittat ad  $\gamma$ , sed multam reflectat, quæ aliquò exibat è prismate ABC per superficiem ejus AAB $\beta$ , puta versus  $\pi$ : ad illud  $\pi$  statuatur alia papyrus, quæ lucem hanc similiter albicantem terminet. Quod ubi feceris, converte Prisma quadrangulare (ex duobus triangularibus colligatis confectum) motu lento circa axem ejus secundum ordinem literarum ABDCA; tandemque videbis, quòd albedo ad  $\pi$  ac  $\gamma$  degenerabit in colores, Flavedine primò, deinde Rubedine ad  $\gamma$  conspectâ, Cæruleo autem colore ad  $\pi$ ; donec, post intentissimam Rubedinem ad  $\gamma$ , color & lux omnis evanescat inde, & Cæruleus ad  $\pi$  iterum tranformetur in Albedinem aliquanto lucidiorem quàm antea. Utpote dum Prismata circa communem axem, ut dictum est, convertantur, radiorum, in mediam superficiem B $\beta$ C (hoc est in laminam aëris prismatibus interjectam) prolapsorum, incidentia continuò fit obliquior; donec tanta fit eorum obliquitas, ut nequeant amplius penetrare dictam laminam, progredique ad  $\gamma$ , sed abinde reflectantur ad  $\pi$ : quod accidet, cum angulus  $\pi\epsilon\gamma$  (obliquitas incidentium) sit graduum ferè quinquaginta. Radii autem purpuriformes, minimè omnium potentes penetrare dictam laminam aëream, reflectentur primò, & Albedinem, prius reflexam ad  $\pi$ , nonnihil tingent eorum colore; dum ex radiis præterlabentibus ad  $\gamma$  Flavedo imperfecta, aut potius color inter Flavum & Viridem mediocris, componitur. Postea Cæruleus, & Viridis deinde reflexus, paulo magis tinget lucem in  $\pi$  cum colore Cæruleo (licet admodum diluto propter exuberantiam Albedinis commixtæ) manebitque Rubor in  $\gamma$ , qui mox, per Flavedinis, hæcenus commixtæ, reflectionem, fiet intensior, donec ipse etiam denuo reflexus Albedinem in  $\pi$  redintegret.

80. Cæterum ut hoc specimen evadat illustratius, fumatur aliud Prisma GHI, quod à posticâ parte prismatum ABCD ita collocetur, ut lucem  $oe\gamma$ , per ea transmissam, refringat versus  $\pi\tau$ , & in colores permutet; Violaceo in  $\pi$ , Rubeo in  $\tau$ , cæterisque in intermedia loca projectis. Tum Prismata colligata circa communem axem (ut prius) rotentur, donec lux alba versus  $\gamma$  transmissa incipiat flavescere; & videbis, quòd color purpureus in  $\pi$  simul evanescet. Id quod arguit purpuriformes radios non amplius ad prisma

LUCIS  
COLORIBUS.

prisma GHI pertingere, sed à superficie CB $\beta$  primò omnium ad  $\pi$  reflecti; & lucem  $e\gamma$  ideo flavescere, quòd Purpura è misturâ tollitur, quâ prius Albedinem exhibuit. Ad eundem modum, si prismata ABCD diutius rotentur, videbis reliquos colores ad  $\pi$  ad  $\tau$  successive disparere, prout lux  $e\gamma$  plus plusque rubescit; & cum sit ruberrima, tum solam rubedinem in  $\gamma$  manere: quòd manifestò convincit hanc lucem  $e\gamma$  non aliunde rubescere, quàm quòd à radiis aliorum colorum, per superficiem CB $\beta$  reflexis, secernitur.

81. Simili ratione, si cum prismate quarto, KLM, refringas radios ad  $\pi$  reflexos, & colores eo pacto productos, & in album parietem projectos, duodecim pedes aut longius distantem, animadvertas; videbis, quòd, cum lux  $e\gamma$  incipit viridè flavescere, purpura  $\pi$ , quam prisma hoc elicit è luce  $e\pi$ , plusquam cæteri colores augebitur; per accessum nempe purpuræ, quæ tum in  $\pi$  disparuit; cæterisque deinde coloribus in  $\pi\tau$  gradatim fiet accessus prout à  $\pi\tau$  disparent; donec, cum omnis color à  $\pi\tau$  disparuit, colores ad  $\pi\tau$  non amplius augeantur; hoc autem discrimine, quòd Violaceus & Cæruleus ad  $\pi\tau$  augmentum suum omne paulo citius obtinent, quàm Rubeus aut Flavus: sed hoc tam exile est, ut observator, nisi sit attentus, ægrè advertat.

## E X P E R. XVIII.

82. Ut istis denique finem imponamus, lubet alium adducere modum, quo quædam genera radiorum, luce Solis intermixta, partim transmitti possint, dum alia reflectuntur. Nempe si duas laminas vitreas CB (fig. 25.) planè perpolitas, & ad invicem applicatas, secundum planitiem earum connectas, easque vasi RQ aquæ pleno immergas, extremitate superficialium juxta positarum undique cerâ vel pice prius obturatâ, ut aqua non interreat & expellat aërem, qui more laminæ tenuissimæ, ut dictum est, interjacebit vitris; si hæc inquam fiant, possis efficere dictorum vitrorum talem esse situm, ut (illucente Sole) aër interjectus cæruliformes radios reflectat versus  $\pi$ , & transmittat rubriformes versus  $\tau$ , atque alias omnes apparentias modò recensitas exhibeat.

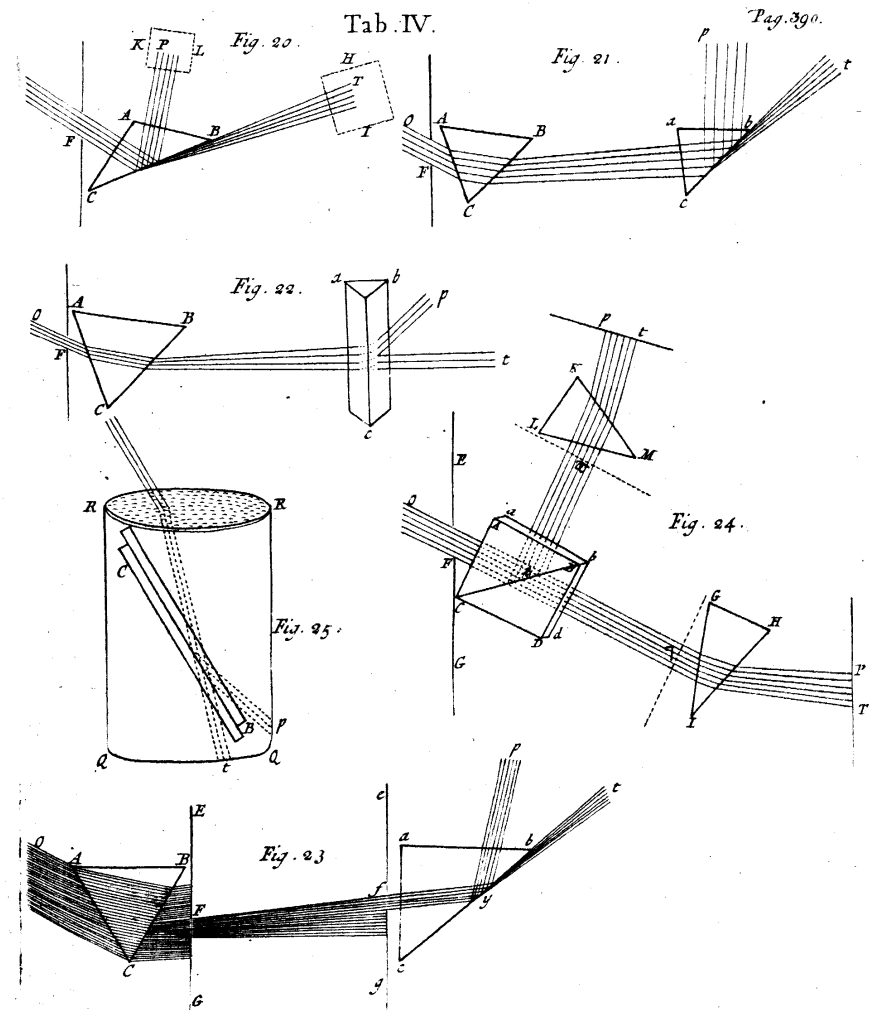
83. Cæterum de hisce modis experiendi notandum venit, primò, quòd Colores hîc producuntur à parallelis superficiebus, quarum aliquæ recurvant radios, quantum aliæ incurvant; atque adeo

DE  
RADIORUM

adeo quæ mutuos effectus destruerent, si quos in immutandis intrinsecis dispositionibus radiorum, quoad eorum colores, ut opinantur Philosophi, producerent. Deinde quod Lux postquam per istas superficies trajiciatur, licet Alba sit, manifestò tamen constet ex heterogeneis radiis; quandoquidem eorum aliqua genera penitus reflecti possunt ad  $p$ , dum alia ad  $t$  partim trajiciantur. Et eadem ratione constat reflexam Albedinem similiter compositam esse, siquidem (ut dixi) redintegrata est, cum Rubor omnium ultimus reflectitur à  $t$ ; & hæc ex eo etiamnum summè confirmantur, quod à solâ vitrorum obliquitate, sine aliquâ Refractionis vel Reflectionis novâ modificatione, efficiuntur.

84. Lux itaque, quamvis uniformis esset, quæ à Sole immediatè profuit, postquam tamen unquam reflexa vel refracta fuit, constat ex heterogeneis radiis. Et ejusmodi est ea lux omnis, quæ per vitreas fenestras trajicitur, vel quam Planetæ, Nubes, &c. ad nos reflectunt. Imo Lux omnis, à Sole aut lucernis quibuscvis derivata: siquidem aliqualem saltem refractionem ab Atmosphærâ (ut dicunt Astronomi) patitur; ut taceam, quæ in Objectis, denique in oculi tunicis, ante visionis actionem impressam, fiunt. Jam, si nihil aliud ostenderam, fuisset aliquod prodiisse tenus; siquidem omnia Visibilium phænomena nobis per ejusmodi lucem exhibentur. Atqui, cum Solis lux immediatè albere censeatur, & ille color non sit ex Primitivis, sed per mixturam generari ostendatur; & cum nullum inter lucem originalem & illam, quæ à diversicoloribus radiis componitur, sensibile discrimen intercedat; haud dubitandum est, quin utraque sit ejusdem naturæ. Imo verò certissimum est; siquidem (in Prop. II.) ostenditur, quod inhærentes dispositiones, vel Formæ radiorum, quibus apti sunt ad proprios colores exhibendos, nec destrui possunt, nec ullo modo vi secundariæ Refractionis mutari. Et par est ratio de Refractione primariâ. Concludendum est itaque, quod istæ dispositiones sunt insitæ radiis ab eorum origine, quamvis proprios colores, antequam heterogenei ab invicem virtute Refractionis secernantur, exhibere nequeant.

85. Cæterum de eo quod dixi lucis colorem Album esse, & tamen Sol aliquantulum flavescere videtur; notandum est, quod cæruliformes radii ab Atmosphærâ præ cæteris conturbantur (ut cæruleus



cæruleus ejus color innuit) & inde quòd è directis solaribus radiis <sup>LUCIS</sup> flaviformes prævalere solent; & efficere, ut Sol flavescat, qui se- <sup>COLORIBUS.</sup> cus fortasse appareret albus. Et ad hunc effectum atmosphæra circa Solem fortè conglobata potest etiam conducere. At non eo inficias, quin aliquod radiorum genus in originali luce sæpissimè redundet, quandoquidem flammarum & siderum diversi sunt colores.

86. De Lucis & Albedinis compositione hæc fatis. Quòd autem Nigredo ex omnibus coloribus similiter composita sit, & in solo lucis defectu ab Albedine differat, ex eo manifestum est, quòd nigrorum, in radiis solaribus intra cubiculum (aliàs obtenebratum) intromissis positorum, termini omnigenis coloribus tincti apparent, si prismate juxta oculum interposito inspiciantur; quòd singulos prismatis colores, seorsim incidentes, pari intentione reflectant, idque longè debiliori quàm alba corpora; & quòd alba defectu lucis nigrescere videntur, ita ut corpus, quòd reverà album est, in debiliori luce nigrius apparere possit.

87. Denique de Cinereis cæterisque non Primitivis coloribus Propositio manifesta est; siquidem Cinereos ex Albo & Nigro, cæterosque omnes ex Rubro, Flavò, & Cæruleo componere norunt Pictores.

#### P R O P. IV.

*Primitivi colores per compositionem colorum sibi met utrinque consensum exhiberi possunt.*

88. Hoc variis modis (perinde ut in Albedinis compositione, sistendo aliquos è coloribus antequam compositionem ingrediantur) tentari potest; & ipse aliquos expertus sum, quibus consistit Luteum à Croceo & subflavo, Porraceum à subflavo & Thalassino (vel etiam minus perfectè à Luteo & Cyaneo) & Cyaneum à Thalassino & Indico, aliosque omnes colores à coloribus hinc & inde conterminis componi posse. Quinetiam Indicus cum Rubei extremitate temperatus purpurascebat; & Minius cum extrema Purpurâ paululum conspersus Coccineus evasit; tanquam si inter colorum extremitates intercederet affinitas, qualis est in sonis inter Octavæ terminos.

89. Idem

DE  
RADIORUM

89. Iidem colores à coloratis Pulveribus componi possunt, sed minus perfectè ut opinor; propterea quòd ipsi componentes ex aliis coloribus, quorùm aliqui sunt dissimiliores, componuntur.

90. Cæterum, ne nimius hîc sim, breviter dicam, quo pacto Prismatici Colores, in hos effectus producendos, optimè misceri possunt. Nempe Prisma GDE (fig. 26.) ex pellucidissimis & perpolitatis lamellis vitreis, in vasculum aquæ plenum coaptatis, efficiatur; quo radorum, in colores per divergentiam discretorum, duò quælibet genera, juxta diversos angulos, D & E, sat acutos & æquales transmissa, ad invicem versus H cogantur.

## P R O P. V.

*Corporum naturalium Colores è genere Radorum derivantur, quos maximè reflectunt.*

91. Hoc è præmonstratis tantà necessitate & evidentia consequitur, ut supervacaneum esse videatur, me aliquid de industria hîc in probationem ejus moliri. Utpote cùm ostensum sit, quòd nullius generis uniformium radorum color, per reflectionem à corpore Physico mutari possit, sed unumquodque colore radorum tinctum apparet, quibuscum illuminatur. Si corpus, cujusque subdialis coloris, à Solis rubriformibus radiis in tenebroso cubiculo illuminetur, rubescit; si flaviformibus illuminetur, flavescit; si viridiformibus, virescit; & sic præterea.

92. Sed in hujus rei majorem evidentiam observandum est insuper, quòd unumquodque corpus proprium colorem præ cæteris, seorsim incidentibus, copiosè reflectit. Sic Cinnabaris in luce Rubèa maximè resplendet, in Viridi minùs, & adhuc minùs in Cærulea. Sic Indicum in Violacea & Cærulea luce maximè resplendet, & splendor ejus gradatim deminuitur, prout in Rubeam lucem per gradus intermedios continuò transfertur. Sic Porrus lucem Viridem plus quàm Rubeam aut Purpuream reflectere conspicitur, & sic in aliis. Et quo corpora sub dio sunt intensiorum & magis specificorum colorum, eo minùs in aliena luce resplendent.

93. Quamobrem, ut hæc facilius & magis cum evidentia percontes, corpora feligere oportet intensis coloribus, & quàm poteris maximè

maximè simplicibus prædita; id quod cognosces, si, prismate adhibito, feligas, quæ ad extremitates, nigredini conterminas, distinctiora apparent, & minùs variegata. Præterea colores Prismatum, quos in hæc corpora projicis, debent esse ab invicem per plures refractiones optimè discreti. Nam, si colores per unicum tantum Prismatis, juxta lucis ingressum positi, refractionem secernantur, non color lucis incidentis, sed alius quidem, inter corporis, in aprico conspecti, & lucis hujus incidentis colorem intermedius generabitur. Quemadmodum, si hujusmodi lux Flava in Cæruleum corpus incidat, corpus illud non flavescet, sed virebit potius: propterea quòd plures è viridiformibus radiis, in hac flavâ luce latitantibus, quàm è flaviformibus reflectere aptum sit; & sic Rubeum corpus in Viridi luce flavescere potest, & in Cærulea luce virescere, si modò lux illa ab aliis commistis coloribus non bene purgetur. Et ob hanc causam summè cavendum est in faciendis hæc experimentis, ut cubiculum fiat obscurissimum, ne lux erratica cum Prismatico colore commisceatur.

94. Denique, quo coloris cujusvis, à corporibus sub dio diversè coloratis reflexi, quantitas innotescat melius, corpora illa in eadem lucis quâlibet specie, juxta posita, confer; & videbis unumquodque in luce proprii coloris præ cæteris resplendere. Sic Indicum in Cærulea vel Purpurea luce plus quàm Cinnabaris resplendet, & Minius in Rubea. Aut si fortè (propter alterutrius coloris imperfectionem & obscuritatem) ambo æqualiter in luce Violacea resplendere contingat, tum in Rubea luce Cinnabaris fiet longè illustrior, aut contrà longè debilior in luce Violacea, si æqualiter resplendeant in Rubea. Cinnabaris itaque plures è rubriformibus quàm aliis quibuscumque radiis reflectit, & proinde rubet. Indicum verò plures è cæruliformibus & purpuriformibus reflectit, & proinde fit intermedii coloris. Et ad eundem modum si in Albis corporibus fiat experimentum, constabit, quod omni-genos reflectant æqualiter, & sic in aliis.

95. Antequam huic de coloribus physicorum corporum Propositioni finem impono, placet annotare de quibusdam apparentiis, quantà necessitate consequuntur è nostris principiis, quæ aliàs miræ videntur & explicatu difficillimæ. Et imprimis, quia corpora evadunt colorata, reflectendo quædam genera radorum



DE  
RADIORUM

& intromittendo cætera, si aliquatenus transpareant; concludendum esse videtur, quod colores maximè transmittantur, qui minimè reflectuntur, & inde quod alius sit eorum color cum transpi-ciuntur, atque alius cum cernantur luce reflexâ. Et hoc quàm bene convenit cum experientiâ, videre est in Libro Boylei de Coloribus conscripto. Scilicet infusio ligni Nephritici, quando diversâ luce transpicitur, Rubea vel Flava appareat, & Cærulea cum cernitur ad plagas lucis incidentis. E contra verò Aurum Foliatum apparet Flavum, & transparet Cæruleum. Sic vitri fragmenta, per totam profunditatem colorata, qualia in antiquis templorum fenestris reperiuntur, varios plerumque colores propositione spectatoris exhibent. Et crassiorum laminarum vitri pellucidissimi (qualia ad fabricanda Telescopia adhibentur) cum obversas oras aspexi, Cæruleum vidi reflexum; & Flavum transmissum, cum perspexi: Cæruleus autem maximè apparuit, cum illustrabatur jubare in obscuratum cubiculum immisso, & à lente concavâ distracto, ne nimîa luce color perfunderetur. Neque ullus dubito, quin plurima existant hujus rei exempla, si quis operæ pretium duxerit in variis liquoribus, aliisque corporibus transparenter coloratis, examen instituere; interea cavendo, ne lux è pluribus plagis simul incidat.

96. Quod autem isthoc non semper eveniat (quemadmodum in eâdem infusione ligni Nephritici, cum Cæruleus color salibus acidis destruitur, & in aliis plerisque, quæ undique sunt ejusdem coloris) ratio est, quod corporibus non solum insit potestas reflectendi vel transmittendi radios, sed etiam suffocandi, & in se terminandi. Sic aliqua obstruunt & retinent omnigenos radios, eoque pacto fiunt undique nigra; alia reflectunt quosdam, cæterosque supprimunt, ut opaca colorata; alia quosdam supprimunt, cæterosque partim reflectunt & partim transmittunt, ut transparenter colorata, quæ circumcirca ejusdem sunt coloris; & alia quosdam reflectunt, cæterosque transmittunt, ut in exemplis jam allatis constitit. Atque ita præterea.

97. Porro, quod Liquoris colorati varia crassities aliquando speciem Coloris variare potest, cum nostris principiis quàm optimè consentit. Sic infusio ligni Nephritici pro variâ ejus crassitie, vel Flavum vel Rubeum colorem referre potest. Cujus rei rationem

nem ut intelligas, concipe, quod liquor ille sit aptissimus ad reflectendum purpuriformes & cæruliformes radios; ineptissimus, ad reflectendum rubriformes; & mediocriter aptus ad reflectendum mediocres: & (in fig. 27.) posito ABC vitro coniformi hujus infusionis pleno, sit FI crassities ejus, cum Aureo colore splendentis; EH major crassities, ubi incipit rubescere; ac DG crassities, ubi sit intensioris & subobscuri ruboris. Et, cum cæruliformes & purpuriformes radii citissimè reflectantur, ut ex eo patet, quod unius tantum guttulæ crassities ad eos colores reflectendos, & spectantibus, exhibendos sufficit: ex illis paucissimi penetrabunt ad profunditatem FI; sed plurimi viridiformes, & adhuc plures flaviformes unâ cum rubriformibus trajicientur, ex quâ mixturâ fiet iste color Aureus. At per profunditatem EH pauci è flaviformibus transibunt, & pauciores è viridiformibus; ac soli ferè rubriformes ad usque profunditatem DG pervadere valebunt; quinimo ex illis etiam complures in itinere reflectentur, & inde rubor trajectory subobscurus evadet.

98. Ad eundem ferè modum, cum Lux per plura corpora, diversis coloribus pellucidè tineta, trajicitur, color ille ex adverso videbitur, qui facillimè pertransit omnia. Quod si nullus potest omnia pertransire, utcunque seorsim pellucida existunt, conjunctim tamen evadent maximè opaca. Quemadmodum, si lamina AB transmittat solos rubriformes, & CD solos cæruliformes, cum juxtâ ponuntur, transmittent nullos. Cujus quidem rei exemplum habes in Micrographiâ Hookii de Cæruleo & Rubeo liquore, qui seorsim apparuere, & conjunctim fuere opaci.

99. Denique huc referri potest, quod, cum aliquis è coloribus Prismaticis per corpus transparenter coloratum trajicitur, intermedius color emergit. Sic Viriditate v. g. in vitrum transparenter Rubeum incidente, flaviformes radii, qui in illâ Viriditate commisti latent, præ cæteris vitrum fortasse pervadent; efficientque, ut lux emergens flavescat.

Sed videor officii limites excessisse, in campum Physicum nimis expatiatus. Visum quidem fuerit hæc attigisse, ut universa rerum consensio pateret; sed sisto gradum, ac tandem, coronidis loco Instrumentum quoddam haud inelegans describam, quo præfata omnia summâ cum evidentia tentari possunt.

DE  
RADIORUM

100. Sit *ABCabc* (fig. 28.) Prisma, quod radios, per foramen *F* in obscuratum cubiculum transmissos, refringat versus lentem *MN*, ut colores, quos efficit in *p, q, r, s, t* per lentem deinde transiciantur ad *x*, & ibidem commisceantur in Albedinem componendam, sicut in præcedentibus ostendi. Deinde aliud Prisma, *DEGed*, priori parallelum ad locum *x*, ubi Albedo redintegrata est, statuatur; quod lucem versus *y* refringat. Hujus autem prismatis verticalis angulus, *eg*, sit æqualis angulo verticali, *cc*, prismatis anterioris, aut eo fortè minor, & similiter positus; ut incidentes radios in parallelismum reducat, quos prisma antèius dispersit.

101. His positis, observabis an lux *y* (pedes aliquot distans trajectory) æquè alba maneat ac fuerit in *x*; vel sensim abeat in colores. Si penitus appareat Alba, tunc prismata cum lente rectè disposuisti; sin aliqui colores ad *y* cernantur, prisma *DEG* circa suum axem eo modo parùm converti debet, ut colores minuantur; & cum penitus evanescit, & lux in totum albescit, siste Prisma. Quod si nequeas hoc modo efficere, quin lux, inter transeundum ab *x* ad *y*, ex aliquâ suâ parte transmigret in colores; lentem *MN* paulo longius à prismate *ABC* transfer, & loco *x* rursus invento, ubi Colores in Albedinem accuratissimè convergunt, in eo statue prisma *DEF* ut prius; & rursus experire, an possis lucem sine coloribus ad *y* projicere; & cum eo usque mutaveris positiones prismatum & lentis, dum effeceris lucem ad *y* trajectory, quàm minimè possis coloratam, prismata cum lente in eo situ figantur; idque vel ope trabis, ut in schemate describitur, vel tubi aut instrumenti cujusvis in eum finem fabricati.

102. Cum habeas hanc machinam è prismatibus & lente, ut dictum est, compositam, ope lucis per eam transmissæ cuncta possis experiri, quæ hæcenus fuerunt tradita. Hæc enim lux *xy* jubari à Sole directo per similes est, & easdem omnes apparentias exhibet, ac si à foramine *F* rectâ promanâset, nullum omnino refractionem passâ; adeoque ejusdem esse constitutionis facile credamus. Et tamen, cum in sua principia componentia, hoc est in radios diverforum generum, apud lentem *MN* discreta fuerit, facile erit modos examini subicere, quibus posthac in colores converti potest, idque tantum sistendo hoc vel illud radiorum genus apud

apud *MN*, ut constitutio lucis *xy*, quoad ejus conversionem in colores, pateat. Lucis  
Coloribus

103. Quemadmodum, si desideretur, ut sensui planissime pateat, quod Prisma convertit lucem in colores, non transmutando proprietates ejus intrinsecas, sed segregando tantum radios, ad excitandum varia colorum phantasmata dispositos, ex quibus lux omnis albens constituitur. Nihil aliud agendum est, quàm ut prisma aliquod *HIK* ita statuatur, ut lucem *xy* excipiat, & refringendo transmutet in colores *p, q, r, s, t* in papyrum aliquam procedentes. Deinde, si colorem quemlibet apud lentem *MN* interposito obstaculo sistas, videbis eundem colorem à papyro *LV* deficere. Sic Purpuram *p* obstruendo, disperebit Purpura *p*, cæteris coloribus non omnino mutatis; (dempto fortè Cæruleo, quatenus aliquid Purpuræ commixtum habeat). Sic Viridem *r* interceptiendo, Viridis *r* evanescit, & sic de aliis. Atque ita videre est, quod iidem colores apud papyrum *LV* & apud lentem *MN* pertinent ad eosdem radios; iisque non communicantur à Refractione prismatis *HIK*, siquidem præexisterant segregati quidem ad lentem *MN*, & congregati in luce *xy*.

104. Ad eundem modum, si cupias experimenta penitus rimari, quibus aliqua genera radiorum omnino reflecti possint, dumtaxat, licet similiter incidentia, partim transmittantur: prisma *HIK* circa axem ejus converte, donec altera pars colorum (Violacea nempe & Cærulea) postquam obliquissimè refracta fuerit versus *LV*, abinde penitus dispareat versus  $\pi$  deflexa; parte tamen alterâ ad *LV* pervadente. Deinde, si dimidium colorum, rubedinem versus, interceptias ad *MN*, Rubor & Flavus disparebunt ad *LV*, & lux ad  $\pi$  reflexa fiet admodum Cærulea. Sin alterum dimidium, Purpuram versus, interceptias; Rubor apud *LV* non mutabitur, sed lux in  $\pi$ , propter ablatum Purpureum & Cæruleum, flavesceat aut rubefceat. Id quod indicat purpuriformia & cæruleiformia radiorum genera penitus ad  $\pi$  reflecti, dum cætera partim refranguntur ad *LV*. Præterea, si corpus aliquod coloratum, v. g. Cinnabaris, hæc luce *xy* illuminetur, sub proprio colore perinde apparebit, quasi in luce subdiali constitutum aspiceres. Quod si cæruleiformes & viridiformes radios, juxta lentem prælapsuros, interceptias, Rubor ejus intendetur: at cum rubriformes radios interceptis, Cinnabaris

nabaris non amplius rubebit, sed Flavedinem aut Viriditatem, ali-  
umve quemvis colorem, pro specie radiorum, quos prætermittis,  
induet. Nec secus alia Colorum phænomena, quæ prismata ab  
immediatâ Solis luce eliciunt, ope lucis hujus xy poteris experiri,  
& intercipiendo quodvis radiorum genus apud MN, eorum causas  
intueri.

105. Si quis autem velit Instrumentum, quale jam descrip-  
imus, ad experimenta hujusmodi instituenda conficere, lentem  
adhibeat latam tres digitos & amplius; quæ radios parallelos ad  
focum duos pedes circiter distantem congregat: atque ita prismata  
distabunt octo pedibus, & conficient instrumentum satis magnum,  
quo omnia strictius examini subjiciantur. Quod ad positionem  
lentis attinet, si Prismatum anguli verticales, ACB & DGE, sunt æ-  
quales, puta 60 vel 70 graduum, ipsa æqualiter ab utrisque dis-  
tabit. Sin alter angulus sit major altero, lens illi prismati vici-  
nior collocetur, cujus angulus verticalis, existit major. Et nota,  
quòd jubar xy per spatium eo latius diffunditur, quo lens statui-  
tur anteriori prismati ABC vicinior. Atque adeo, siquando opus  
sit amplo jubare, debes tantum efficere, ut lens sit aliquanto vi-  
cinior anteriori prismati quàm posteriori; & adhibere prisma pos-  
terius, cujus angulus verticalis sit tanto ferè minor quàm angulus  
verticalis anterioris. Denique, si velis, ut colores, in lentem il-  
lam procidentes, sint magis directi & ab invicem distracti, quàm  
more jam descripto contingat, eâ nempe de causâ, ut singula ra-  
diorum genera pro lubitu distinctius, sive magis sejunctim, inter-  
cipiantur, id quod in experimentis nonnullis necessarium duco:  
nihil aliud agendum est, quàm ut Lux per duo parva foramina r  
& f, ab invicem longe distantia, prius trajiciatur, quàm incidat  
in Prismata: vel ut alia lens non procul ab interiori prismate col-  
locetur, quæ apta sit, ut lucem, à longinquo foramine r diver-  
gentem, congregat ad alteram subsequenter lentem MN. Cæte-  
rum hoc instrumentum sic rectè disponere invenio molestissimum  
esse, ut & effectus ejus hand ita distinctos & sensui patentes ac in  
præcedentibus; ubi per pauciores refractiones & majora vitrorum  
intervalla ostendebantur. Et ea propter auditores imprimis illa  
simpliciora & faciliora experimenta examini consultius subjicient.

## S E C T I O

## S E C T I O S E C U N D A.

*De variis Colorum Phænomenis.*DE VARIIS  
COLORUM  
PHÆNOME-  
NIS.*De Phænomenis Lucis per Prisma ad Parietem trajectæ.*

106. Hucusque fundamenta struxi, quibus Colorum, quocun-  
que modo effectuum, phænomena explicari possunt; effectuum  
verò, quos suprà minùs attigi, jam causas particulares & immédia-  
tas, non Geometrarum, quibus scio supervacaneum videatur, sed  
aliorum gratiâ sigillatim describam. Malo enim hîc aliqua, quæ  
plerisque superflua fortasse videbuntur, interserere, quàm quic-  
quam alicujus momenti omittere, quod incautis, & prejudicio la-  
borantibus, difficultatem subministrare possit.

Et imprimis circa Prismatis vulgo notos effectus, quorum cau-  
sam abundè satis retexi, circumstantiæ nonnullæ supersunt expli-  
candæ: utpote cur Primitivi Colores non omnes eliciuntur, cum  
lux (cujus radios, ab origine heterogeneous, Prisma per inæquales  
refractiones dispergit) non transit per angustum foramen; sicut  
passim in præcedentibus supposui, sed ex unicâ tantum parte li-  
mitatur. Verbi gratiâ, si corpus aliquod opacum FG (fig. 29.)  
Soli interponatur & Prismati, juxta basem ejus AB, quòd umbram  
projiceat in MP, colores efficiat in spatio PT; & lucem permittat  
in ipsum NT influere: in PT, confinio Lucis & Umbræ, nulli  
colores generabuntur præter Purpureum & Cæruleum cum variis  
eorum gradibus. Et ratio est, quòd ex radiis omnium formarum,  
qui transeunt per extremitatem dicti corporis opaci FG, soli pur-  
puriformes propter maximam eorum refractionem possunt ad P  
usque deflecti, unde color Purpureus ibi conspicitur. Deindè cæ-  
ruliformes, cum paulo minùs refrangibiles existant, incident in  
totum spatium NQ, non potentes ulterius versùs M deflecti quàm  
ad Q. Atque ita duæ radiorum species æque solæ incident in Q,  
& colorem ex Purpureo & Cæruleo compositum exhibebunt. Præ-  
terea viridiformes, minùs adhuc refrangibiles, in spatio NR non  
ultrâ extendentur quàm ad R. Flaviformes autem terminabuntur  
in S. Quare tres tantum species colorum miscebuntur ad R, &  
color ex iis omnibus, nempe ex Purpureo, Cæruleo & Viridi, ge-  
nerabitur.

nerabitur. At cum Purpureus & Viridis commixti producant Cæruleum (ut facile est ex ante dictis experiri) liquet colorem ad R non fore alium quam Cæruleum. Denique, cum radii rubriformes minimè omnium refringantur, ut in spatium NT incidentes non magis deflectantur versus N quam ad T; liquet quòd in dicto spatio NT fiet mixtura colorum omnium, & proinde albescet; sed in ipso s (ubi color omnis dempto rubeo miscetur) Cæruleus ad Viriditatem nonnihil vergens apparebit, sed maximè dilutus, propterea quòd solus Rubor ex Albedinis compositione desit.

107. Porro, si corpus opacum, fg, Soli interponatur & Prismati, juxta verticem ejus c, sicut videre est in schemate 30: inter obscuratum spatium, NT, & lucidum PM, cernes alios duos colores, Rubeum in T & Flavum in R, idque propter jam dictas rationes. Quippe radii, prout apti sunt ad hos ordine colores, Rubeum, Flavum, Viridem, Cæruleum & Violaceum, generando, intenduntur per spatia MT, MS, MR, MQ & MP; cum Soli rubriformes extenduntur usque ad T, cæteris propter majorem refractionem citius terminatis, necesse est, ut iste color in T sit Rubeus. Item, cum tria radiorum genera in R incident, color ex istis, nempe Rubeo, Flavò & Viridi, compositus ibidem cernetur. Rubeus autem & Viridis Flavum constituunt, atque adeo Flavus apparebit in R. Præterea, cum omnium formarum radii misceantur in P, & postea perpetuò versus M, spatium illud PM apparebit Album. Nec secus constat, quòd citreus in S, & in Q Flavus ad viriditatem vergens, apparebit; sed adeo dilutus tamen & Cæruleo redundans, ut nomen Viriditatis non mereatur.

108. Tertio, si opaca duo corpora GF & gf (fig. 31.) Soli & Prismati interponantur, ut radii inter utrumque, quasi per oblongam rimam prismati parallelam, transeant, atque distantia ff sit satis magna, pro utroque termino F & f generabuntur colores; Purpureus nempe ad P, & Cæruleus ad R, per terminum F; atque Flavus ad r, & Rubeus ad t, per terminum f; sicut modò explicatum fuit: eritque TP spatium album utrifque coloribus interjectum. Jam, si obstacula GF & gf ad se invicem paululum admoveantur, ut intermedium spatium ff evadat angustius, isto pacto spatium album quoque TP fiet angustius, donec tandem evanescat & colores utrinque coeant. Si spatium ff magis adhuc

coarctetur,

coarctetur, Viriditas in medio colorum emerget vice Albedinis, quæ jam evanuit, quæ quidem Viriditas non antea apparuit, propterea quod commixturam radiorum heterogeneorum, quibus involuta latuit; jam verò heterogeneis istis per obstacula duo, sibi propius admota, alternè interceptis, Viriditas ea paulatim detegitur, patet, & evadit perfectior; donec, cum dictum ff satis angustum est, ab omni ferè mixtura liberatur & eruitur, propriæque specie non minus quam cæteri colores elucet. Et hinc in transitu colligitur, quòd Viriditas inter colores medietatem exactè obtinet, non magis ad Rubeum vergens quam ad Violaceum, neque ad Flavum quam Cæruleum; hoc est, in specie coloris, & respectu multitudinis radiorum, ad colores utrinque pertinentium. Nam in gradu refrangibilitatis minus differt à parte Rubea Flavæque, & in aliâ quâdam proprietate (cui jam explicandæ non est locus) minus differt à parte Purpureâ & Cæruleâ.

109. Præterea, cum Albedo TP propter angustiam pervii spatii ff incipit evanescere, colores etiam contractiores paulatim apparebunt; ita ut, cum istud ff sit valde angustum, Flavus ad Rubeum & Cæruleus ad Violaceum quasi duplo vicinior evadat, quam cum amplitudo ejus permittit Albedinem in medio colorum produci, & ut quinque colores (Viriditate jam internatâ) non occupent plus spatii quam eorum duo prius occupavere. Cujus rei ratio ex schematum inspectione patebit animadvertenti, quòd Flavus ad r, & Cæruleus ad R, ex heterogeneis radiis compositus, mutatur in ferè uniformem Flavum ad loca s & s incidentem, & in ferè uniformem Cæruleum ad loca Q & q similiter incidentem, heterogeneis radiis è mixtura per angustiam spatii ff magnâ ex parte sublatis.

110. Quarto, si Lux terminetur obstaculo gg, cujus extremitas perpendiculariter transversa est ad longitudinem prismatis, Colores omnino nulli virtute termini illius generabuntur. Etenim ponamus parallelos radios, OF & OF, cæterosque (fig. 32.) juxta extremitatem dictam gg in Prisma ABC prolapsos, ibidemque refractos esse ad P & p, atque MN esse umbram ipsius gg. Jam licet radii purpuriformes, FP & fp, magis refringantur quam rubriformes, FT & ft; tamen istâ refractione secundum terminum umbræ factâ, ita ut ex dictis radiis multi magis deflectant versus

Vol. III.

E e e

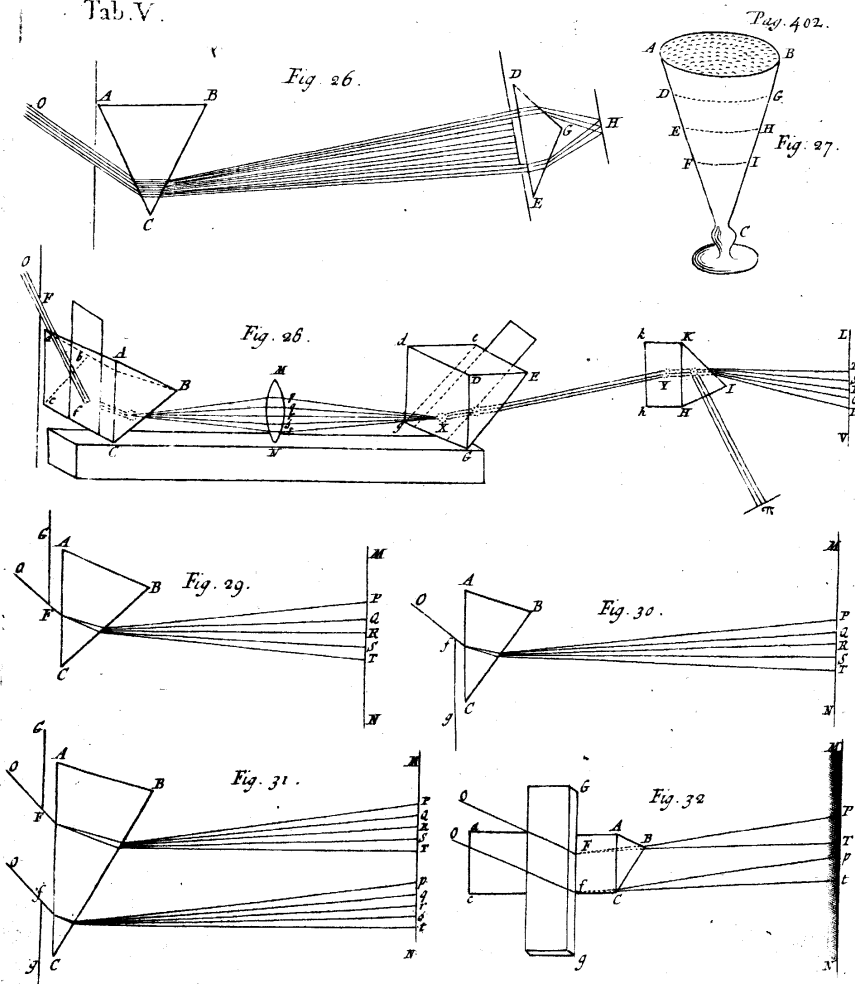
umbram

umbram quàm cæteri; palam est, quòd ubicunque purpuriformes incident, rubriformes etiam incident in eundem locum, & è contrà. Quod idem de radiis intermediis pari modo concipiatur. Et sic radiis omnium specierum ubique per extremitatem umbræ commixtis, umbra benè definiatur sine aliquo colore (præter Album vel Fuscum ex luce & umbrâ mixtis) conspecto. Sed cavendum est, ne colores, per limites prismatis *aa* vel *cc* generati, habeantur pro generatis à limite *gg*. Quamobrem prismata, quæ ex vitro in totum fiunt, ad examen hujus & proximè præcedentis commodè instituendum, nimis sunt exigua; propterea quòd Colores per extremitatem verticis & basis producti, interjectum spatium album haud relinquent satis amplum, in quo generatio colorum prædictis modis probetur. Itaque, ut prisma conficiatur ex vitris planis & benè politis, qualia ad Specula conspicienda adhibentur, moneo; quibus in morem cunei connexis, & in vasculum dein prismiforme completis, ut suprà dictum, vasculum istud impleatur aquâ limpidissimâ, & occludatur; & sic prismata ad arbitrium ampla conficias.

III. Quinto, ut omnia jam uno comprehendam specimine, fit *gg* (fig. 33.) corpus opacum orbiculari foramine, *rf*, unum duosve digitos lato, pertusum; per quod Lux in Prisma trajiciatur: ubi, cum refracta fuerit, projicitur in papyrum, vel quodvis album corpus *MN*, quasi semisse pedis à prismate postpositum: & videbis illuminatum spatium, *PRTZ*, rotundum ad modum foraminis *rf*; album in ejus medietate; & duobus semilunaris colorum terminatum, Purpureo & Cæruleo ad *p*, Flavò autem & Rubeo ad *t*; qui colores paulatim deficient versus *y* & *z*, ubi nulli omnino conspiciuntur. Præterea, si papyrum ad majorem distantiam paulatim distuleris, velut ad *mn*; videbis colores distendi & augeri, & intermediam Albedinem usque comminui, dum prorsus evanescat; totumque spatium coloribus Rubeo, Flavò, Cæruleo & Purpureo tinctum appareat; & papyrum longius differendo, Viriditas è medio emerget, & crescet tum amplitudine spatii, tum perfectione speciei, totumque spatium coloratum diffrahetur in oblongam formam. Quorum omnium rationes ex supradictis depromantur.

III. Adhæc,

Tab. V.



112. Adhæc, si Lux obstaculo ad quamvis distantiam post Prisma collocato terminetur, consimilis erit Colorum generatio. <sup>COLORUM PHÆNOMENA.</sup> Sit v. g. obstaculum *gg* (fig. 34.) perforatum in *F*, & ad distantiam pedis unius, aut amplius, post Prisma *ABC* collocatum. Prisma autem satis amplum adhibeatur (quale ex laminis vitreis, ut supra, possis efficere) ne lux omnis prius abeat in colores, quam attingat foramen *F*; & lux illa, postquam transiit per *F*, non secus convertetur in colores apud *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, quam contigit in præcedentibus. Scilicet inspicienti schema patebit, quomodo radii diverforum generum, inæqualiter refracti, convergant à diversis partibus prismatis ad istud *F*, ubi (ut & hinc inde versus *G*, & *g*) componunt Albedinem; sed inibi decussantes divergunt postea, diversi que Colores in diversa spatia *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* tendunt. Et hinc, cum radii repagulo quolibet *H* ex utràvis parte prismatis intercipiuntur, è coloribus *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* aliqui tollentur. Si radios nempe vertici *c* vicinos intercipias, tolles Purpureum *P*; vel tolles Rubeum *T*, si intercipias eos basi *AB* vicinos. Et sic de aliis; ita ut quoslibet pro arbitrio possis tollere, vel efficere, ut quilibet solus appareat.

113. Denique, si Lux ex unicâ tantum parte pone Prisma limitetur, vel si duo statuantur limites, iique vel ad eandem vel ad oppositas partes prismatis, vel quocunque alio modo Lux terminetur; modus, quo Colores exinde generantur, ex antedictis facile patebit, ut jacturam temporis fecero de hâc re plura verba factururus. Quinetiam, si duo vel plura prismata quocunque modo inter se disponantur, peritus Optices facile explorabit causam.

114. Cæterum de modo tollendi quoslibet colores in fig. 34, per interpositionem obstaculi *H*, hîc obiter notandum venit, quantum ista circumstantia adversatur hypothefibus Philosophorum, quæ de coloribus huc usque fuerunt excogitatae. Ex illis enim positis Refracta Lux ad eas semper partes cum Cæruleo & Violaceo terminanda est, versus quas fit refractio; quandoquidem gyrationes Globulorum ex opinione Cartesii, vel partes anteriores pulsum Ætheris obliquè vibrantis, ex hypothefi Hookii, per viciniam quiescentis Medii ad eas semper partes impediuntur, & hebescunt. Et tamen hîc videre est, quòd admoto obstaculo *H*, ut radios vertici Prismatis vicinos intercيدات, possis Violaceum & Cæ-

ruleum tollere; & efficere, ut Viridis vel Flavus aut etiam Ruber, ad eas partes maneant extimus, versus quas refractione peragitur. Nec hypothesis eorum tutior est, qui supponunt colores ex Lucis & Umbræ mixturâ generari; nam eadem videtur esse in eorum confinio mixtura, sive aliqui ex radiis ante refractionem limite *H* intercipientur, sive omnes per prisma liberè transeant.

115. Hujusmodi etiam hypotheses ex aliis experimentis passim occurrentibus everti possent, modò id instituto meo necessarium ducerem. Quemadmodum ex illis ubi lucem partim reflecti posse, & partim transmitti docebam; nam lux transmissa dabat Flavum Rubeumque, idque in meditullio ejus, ubi à nullo quiescente Medio, vel tenebris, terminabatur. Sic etiam maxime valet, quòd ostendi Colorem lucis, ex uniformibus radiis constantis, non posse per quolibet Refractiones mutari. Cæterum non opus est, ut hypotheses refutem, quæ ex inventâ tandem veritate suâ sponte corrueant.

116. Phænomenis jam antè explicatis affinia sunt sequentia, quæ circa compositionem Albedinis versantur. Prismata duo, *ABC* & *abc* (fig. 35.) quorum anguli verticales, *ACB* & *acb*, æquantur, ita parallelis axibus dispone, ut alterius linea verticalis, *c*, cum *b*, extremitate basis alterius, conveniat; planis *BC* & *bc* in directum jacentibus. Quo factò, si Sol transluceat ea in papyrum *MN*, octo vel duodecim digitos postpositam, Colores quidem generabuntur ad *M* & *N*, per exteriores prismatum terminos *B* & *c*, non autem per interiores *c* & *b*; sed medium spatium *PT* totum apparebit album. Sin alterutrum prisma tollas; alterius extremitas, *c* vel *b*, generabit colores ad *PT*: ac dein, si restituas, Albedo etiam restituetur. Scilicet Albedo ista componitur ex coloribus ab extremitate, *c* vel *b*, prismatis utriusque prolapsis; id quòd facile constet ex præfatis. Nam radii purpuriformes, ab utroque prismate refracti, limitantur in eodem puncto *P*; ita ut ab uno prismate manantes incidant in *PM*, ab altero in *PN*, & ab utroque simul in totum *MN*, non secus ac si omnes ab unico prismate venissent. Eodem modo Cæruliformes extenduntur per totum spatium *MN*, & eorum terminus communis est *Q*, prout manant à diversis prismatibus; & sic de cæteris. Quare omnigeni radii commiscuntur in unâquâque parte spatii *PT*, & Albedinem ideo component. Sin alterutrum

alterutrum Prisma tollas, puta *ABC*, vel Lucem ei potius occludas; tum radiis rubriformibus ab *MT*, flaviformibus ab *MS*, viridiformibus ab *MR*, cæruliformibus ab *MQ* & purpuriformibus ab *MP* sublatis, manebunt rubriformes in *NT*, flaviformes in *NS*, viridiformes in *NR*, cæruliformes in *NQ* & purpuriformes in *NP*: adeoque Purpureus apparebit in *P*, & Cæruleus in *R*, ut ostendimus antè. Et simili ratione, si lux occludatur alteri prismati *abc*, ne permeet, Rubor apparebit in *T*, & Flavedo in *R*.

117. In istis autem experiendis requiritur, ut anguli *ACB* & *acb* sint æquales; id quòd tentabis, si Prismata secundum longitudinem eorum ita connectas, ut duo ex planis dictos angulos comprehendentibus, puta *BC* & *bc* (fig. 36) fiant contigua, & reliqua duo *AC* & *ac* sibi opposita. Quo factò, si radii solis ingressi foramen *F* pergunt ad eundem locum *S*, cum trajiuntur per dicta prismata perpendiculariter ad eorum latera *AC* & *ac*, atque cum liberè progrediuntur nullo interjecto obstaculo; tum plana *AC* & *ac* sunt parallela, & anguli *ACB* & *acb* æquales: sin istud non eveniat, sunt inæquales. In quo casu notetur præterea, quòd inclinando plana *BC* & *bc* (fig. 35.) vel ab invicem reclinando, possis Albedinem in *PT* haud secus componere, ac si dicti anguli fuissent æquales, & plana *BC* & *bc* in directum jacentia.

118. Quinetiam possis hoc idem cum unico tantum Prismate perficere, dummodo satis magnum sit; puta cujus refringentia latera *AC* & *BC* (fig. 37.) sint sex vel octo digitos lata. Etenim sint *FG* & *fg* duo corpora opaca, plana, rectangula & ad Prismatis planum, *ACCA*, secundum planitiem ejus sic applicata, ut eorum angularia puncta, *G* & *g*, juxta plani istius centrum se mutuò contingant, & latera concurrentia (quorum *FG* & *fg* sint ad axem prismatis parallela) ex adverso jaceant in directum. Quo factò, si Lux refracta projiciatur in papyrum *MNX* pedes quasi duos distantem, obstaculum *FG* projiciet umbram in *MH*; Purpuram efficiet in *PHIQ*, ac Cæruleum colorem in *QILT*, & permittet lucem in *LN*. Dico jam, si Speculo aliquo, *μνχ*, colores, ex alterutrâ parte lineæ *HL*, velut *HLPT*, ita reflectantur, ut incidant in papyrum ad eundem locum cum coloribus *HLPT* ex alterâ parte, color omnis evanescet, totumque *HLPT* apparebit album. Nam purpuriformes radii à prismate ad *PHIQ* directè tendunt; & cætera quatuor

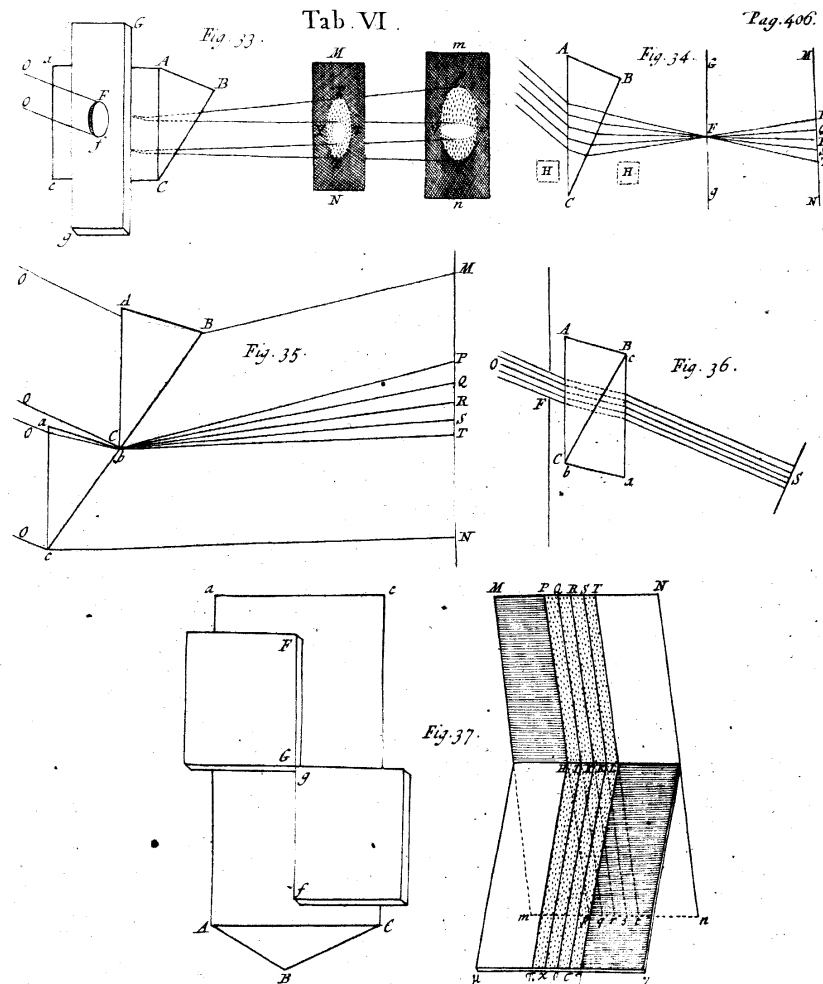
quatuor radiorum genera ad eundem locum reflectuntur à speculo, incidentes puta in  $\text{HITX}$ . Item purpuriformes & cæruliformes directè tendunt ad  $\text{QIXR}$ ; & cætera tria genera illuc reflectuntur ab  $\text{IXIX}$ ; & sic de reliquis: adeo ut omnes omnium generum radii passim per spatium  $\text{PHLT}$  misceantur, ibidemque component Albedinem. Sed notandum est, quòd, cum lux reflexione semper debilitatur, radiis quamplurimis inter reflectendum amissis, exinde forsan eveniat, quòd lux directà nonnihil prævalebit reflexæ, & color ejus dominabitur; nisi compensatio fiet, ita papyrus inclinando, ut directà lux paulo obliquius in eam incidat quàm reflexa, de quâ re facile judicium feras ex perfectione Albedinis emergentis.

119. Antequam ad aliud experimentorum genus transeo, necessarium erit, ut formam Imaginis Coloratæ, quam Lux, per arcum orbiculare foramen in tenebrosus cubiculum influens, & per prisma deinde transmissa affingit, paulo magis articulatum inspiciamus; & singulorum ejus colorum dimensiones ac distantias ab invicem, nec non Refrangibilitatis gradus singulis radiorum generibus competentes sedulo rimemur.

## E X P E R . XIX.

120. Ostendebatur sub initio, quòd, ubi Prisma (cujus angulus verticalis erat quasi 63 grad.) imaginem ad distantiam 22 pedum projiciebat, longitudo ejus erat  $13\frac{1}{4}$  dig. & latitudo  $2\frac{5}{8}$  dig. Adeoque centra extimorum circularum, ex quibus in longum dispositis imago illa constitit, distabant  $10\frac{1}{8}$  dig. Jam ad hanc distantiam, sive distractam longitudinem imaginis, cæteras ejus dimensiones referre convenit; propterea quòd ad absolutam ejus longitudinem (quæ à magnitudine componentium circularum dependet) non habent certam relationem. Quo autem dimensiones ejus majori  $\alpha\chi\pi\beta\epsilon\iota\chi$  investigarem, loca ubi Colores in suo genere perfectissimi, eorumque confinia in transversam papyrum incidebant, calamo scriptorio notabam; & observationibus hujusmodi sæpius repetitis & inter se collatis, has tandem conclusiones sigillatim perdidici.

I. Cæruleus & Violaceus ex unâ parte, & Viridis ac Rubeus ex alterâ imaginem bipartiebantur; adeo ut Viridis & Cærulei confinium





confinium (quod Thalassinum appellare possim) meditullium ejus occuparet.

COLORUM  
PHÆNOMENA  
NIS

II. Locus ubi Porracea, five floridissima Viriditas apparuit, divisit imaginis distractam longitudinem in ratione 3 ad 5; utpote longitudine illâ in 8 partes divisâ, Viriditas illa tribus partibus à Rubeo termino distabat, & quinque partibus à Purpureo.

III. Spatium, per quod Viriditas omnis adusque Cærulei & Flavi confinium distendebatur, fuit quasi sexta pars totius distractæ longitudinis.

IV. Cærulei & Purpurei confinium, five Indicus perfectissimus, à confinio Rubei Flavique, five à perfectissimo Citrino, quasi  $\frac{7}{12}$  partibus totius distractæ longitudinis distabat.

V. Denique hæc Indici & Citrini distantia per confinium Viridis & Cærulei in ratione 2 ad 3 dividebatur; ita scilicet ut confinium istud, five meditullium Imaginis, ab Indico  $\frac{14}{60}$  partibus totius distractæ longitudinis distaret, &  $\frac{21}{60}$  partibus à Citrino.

121. Cum isthæc quantâ potui diligentia observâsem, non proprio tantum sensu confusus, sed (propter summam difficultatem præcisè distinguendi confinia colorum, & loca maximæ perfectionis) aliorum judiciis fretus; imaginis dimensiones juxta hæc inventa delineavi, quemadmodum videre est in fig. 38. Scilicet centris x & y 10 $\frac{1}{4}$  uncis distantibus, & semidiametris 1 $\frac{1}{2}$  uncis, semicirculos duos, APC & BTD, è regione descripsi, & rectis, AB & CD, tangentibus connexui.

Deinde lineâ xy (quam supra denominavi distractam longitudinem imaginis) in 60 partes æquales divisâ, sumsi LY=9, YV=20, HY=30, & FY=44 partes ejusmodi. Et perpendiculis ad ista puncta erectis, imaginem in quinque partes, coloribus quinque insignioribus competentes, distinxî; parte FF referente expansionem Violacei, & FH expansionem Cærulei, & sic deinceps. Quo facto coloratam lucem in hanc figuram projeci; ut constaret deinde, an Color quilibet intra limites sic assignatos contineretur: & cum tota imago totam occupabat figuram, singuli etiam colores cum singulis partibus quàm optimè conveniebant. Interea verò in spatiis istis loca observabam, qualia in hoc schemate punctim notantur, ubi singuli Colores saturi & in suo genere illustrissimi apparuere.

Jam horum locorum & limitum, Colores determinantium, intervalla non alia fore manifestum est, etiam si circulos, ex quibus imago conflatur, per methodos sæpius recensitas, centris non mutatis, quantumvis minueres. Eà scilicet de causâ, ut heterogenei plus segregarentur, & Colores evaderent simpliciores. Quippe, cum in ipsissimis rectilineis terminis, AB & CD, colores sint absolute simplices; & Colores in mediâ imagine, prope lineam XY, cum istis, quibus interjacent, marginalibus congeneri appareant; ratio etiam suadet, quod heterogeneorum mixtura non sensibilibiter mutet locum alicujus Coloris; siquidem hinc & inde venientes se mutuo temperant. Sic radii viridiformes & purpuriformes, per Cæruleum sparsi, æquipolient; & ideo non dimovent aut conturbant Colorem illum, ut soli (quamvis nulli purpuriformes intermischerentur) ibidem componerent & exhiberent. Sed hæc excipienda sunt spatia circulis terminalibus, AC & BD, comprehensa; ubi temperamentum illud, ex parte exteriori, gradatim deficit, & ideo satuti Ruboris, qui solus è præfinitis in circulum terminalem se extendit, positionem in imagine è parte marginali, ubi transibit circulum, expedivi, ut indicat fig. 39. In his autem si quid hæsites, possis experimenta de novo instituere, contrahendo imaginis latitudinem, ut circuli, cæteris partibus, minores, evadant, & nullus dubito, quin omnia quadraverint.

122. Cæterum, quamvis colorum confinia in lineas ad F, M, I & L erectas incidebant, tamen loca, ubi satuti & intensi apparere, non omnia constitere in medio interjecti spatii. Nam Cæruleus, qui in suâ specie illustrissimus erat, & nullatenus purpurascens, propius ad F cadebat quàm ad X; et plenissima Flavido videbatur esse aliquantulum propior ad H quàm ad I. Atque ita Rubedo & Purpura propius ad centra X & Y quàm ad alteros limites intensæ apparuerunt; solaque Viriditas in medio limitum F & H effloruit. Unde constat ratio, quod, etsi Flavus & Cæruleus commixtione Viridem componunt, Rubeus tamen & Viridis, propter majus intervallum, non bene componunt Flavum, nec Viridis & Purpureus Cæruleum. Cum igitur Colores, juxta medium constipatiores sunt, ita ut inter Flavum & Rubeum, juxta & inter Cæruleum & Purpureum, quasi triente majus intersit intervallum quàm inter Viridem & Flavum, vel Cæruleum sibi hinc

& inde conterminum; quo Imago elegantius in partes inter se proportionatas distinguatur, in numerum quinque insigniorum colorum duos alios, Citreum scilicet inter Rubeum & Flavum, ac Indicum inter Cæruleum ac Violaceum, asciscere convenit; idque potissimè quod, post quinque insigniores, illi duo eminere videntur; spatiaque, ubi interferantur, pro speciei perfectione satis ampla obtinent; & sic exteriorum Colorum redundans expansio præscindetur, omnesque ad quantitatem Viriditatis politiori symmetriâ proportionati evadent.

## E X P E R. XX.

123. His itaque intertexis coloribus, observationes denuo instituebam; & ut breviter dicam, omnia comparuere juxta ac si partes Imaginis, quas colores occupant, proportionales essent chordæ sic divisæ, ut singulos gradus in Octavâ resonare faciat. Quod cum tandem deprehendi, figuram Imaginis in partes perinde divisi, ut videre est in schem. 39. Atque iterum tentavi, quàm benè cum his partibus Colores convenirent. Scilicet Imaginis distractâ longitudine XY productâ ad Z, ut YZ sit æqualis XY, finge XZ chordam esse; quam in XY ita dividere oportet, quasi singula segmenta, ad usque Z protensa, singulos octavæ gradus (*sol, la, fa, ut, re, mi, fa, sol*) edere deberent. Id quod fiet bisecando XY in H, & trisecando in G & I; rursusque trisecando XI in E, & capiendo KY quintam, & MY octavam partem totius XY. Et semitonia, EG & KM, Indicum & Citrium referent, cæterique quinque toni, XE, FG, GH, HI, IK, cæteros quinque præcellentes Colores; quorum singuli, cum tota colorum congeries in totam figuram adæquatè incidit, intra has singulas respectivè partes comprehensi fuerint. Inque meditullis harum partium circiter, Color quilibet in propriâ specie illustrissimus & intensissimus apparuit; etiam Purpura & Rubedo, quamvis ultra, versus P ac T, marcescente luce exundarunt.

124. Cæterum hæc non adeo præcisè observare potui, quin ut fateri cogar, ea posse paulo aliter fortasse constitui. Quemadmodum, si inter XZ & YZ sumantur undecim mediæ proportionales, quarum EZ secunda sit, FZ tertia, GZ quinta, HZ septima, IZ nona, & KZ decima; hæc etiam Imaginis distributio cum Co-

lorum expansionibus sat benè convenire videbitur. Nam differentiae adeo minutae, quales inter hanc & superiorem distributionem intercedunt, acutissimo sensu iudice vix comparaturos errores efficere possunt.

125. Quantum verò distributiones istae differunt, ex adjunctis numeris patebit; quorum superiores ad chordam 720 partium, ratione Musicae divisam, respiciunt; & inferiores, ad eandem chordam quàm proximè divisam ratione Geometrica.

360. 320. 300. 270. 240. 216.  $202\frac{1}{2}$ . 180. { Chorda Musicae  
divisa.

360. 321. 303. 270. 240. 214. 202. 180. { Chorda Geometrica  
divisa.

Superiorem verò distributionem potius adhibui, non tantum quòd cum phaenomenis optimè convenit, sed quòd fortasse aliquid circa Colorum harmonias, qualium pictores non penitus ignari sunt, sed ipse nondum satis perspectas habeo, sonorum concordantiis fortasse analogas, involvat. Quemadmodum verisimilius videtur animadvertenti affinitatem, quae est inter extimam Purpuram ac Rubedinem, Colorum extremitates, qualis inter Octavae terminos, qui pro unisonis quodammodo haberi possunt, reperitur.

126. Ex his demum proportionibus sinuum Refractionis, cuique radiorum generi competentium, ratione mechanica, determinantur; utpote ad Vitrum Aeri contiguum, cum sinus radiorum hinc & inde extimorum sint ut 68 ad 69, divide intermediam unitatem in ratione partium huius imaginis; & orientur 68,  $68\frac{1}{3}$ ,  $68\frac{2}{3}$ ,  $68\frac{1}{2}$ ,  $68\frac{2}{5}$ ,  $68\frac{3}{5}$ , 69, pro sinibus ad confinia terminosque singulorum septem Colorum pertinentibus, respectu communis sinus incidentiae  $44\frac{1}{4}$ , cum refractione fit à Vitro. Cum verò fit in Vitrum, pro sinibus istis adhibe numeros 68,  $68\frac{2}{3}$ ,  $68\frac{1}{3}$ ,  $68\frac{1}{2}$ ,  $68\frac{2}{5}$ ,  $68\frac{3}{5}$ , 69, existente communi sinu incidentiae 106. Et pro sinibus ad radios, ubi Colores sunt in propriis speciebus perfectissimi, pertinentibus, numeri inter hos numeros intermedii adhiberi possunt.

127. Sic ad Aquam Aeri conterminam, ubi extremi sinus refractionis sunt ut 90 ad 91, sinus intermedios, per consimilem unitatis intermediae dissectionem (statuendo scilicet esse 90,  $90\frac{1}{3}$ ,  $90\frac{2}{3}$ , &c. vel 90,  $90\frac{1}{3}$ ,  $90\frac{2}{3}$ , &c.) elicere possis. Ast hic memento determinationes

determinationes hasce non esse præcisè geometricas, sed tam proximè tamen accuratas quàm exigunt huiusmodi res practicae; & quidquam amplius moliri, præter computandi tædium, affectatam & inanem curiositatem argueret.

128. Sunt & aliae circa hos Colores circumstantiae, quas jam determinare potuissim; quemadmodum variae eorum Formae, & Expansiones, pro variis positionibus Prismatis circa axem convolutis; vel pro variâ materia refractivâ, ex qua Prisma fabricatur, quâve circundatur; vel etiam pro variâ magnitudine ejus anguli verticalis. Sed ea omnia ex ostensis in parte priori, conferendo cum jam explicatis, sat manifestantur; ut & effectus, quantum scio, omnes, quos vel unicâ tantum refractione, vel utcumque pluribus, & quâvis terminatione Lucis elicere liceat.

## S E C T I O T E R T I A.

*De phaenomenis Lucis per Prisma in Oculum transmissæ.*

129. Post explicata Colorum à parietibus aliisve Objectis reflexorum phaenomena, ordo postulat, ut ad affines Objectorum trans Prismata, prope oculum interposita, conspicuorum apparentias explicandas jam animum adjiciam. Et, cum doctrinam, in quinque Propositionibus supra traditam, per prioris generis experimenta solummodo probaverim, & hoc experimentorum genus, eo quòd non sit adeo simplex, consultò reticuerim, explicationem ejus jam fuscè tradere non pigebit.

Hic ideo imprimis recordari oportet, quòd Objectorum, mediante refractione visorum, imagines non in propriis locis, sed aliis quibusdam videntur, à quibus viz. refracti radii rectà ad oculum tendunt: atque adeo, si ita refringantur, ut, qui fluunt ab iisdem partibus Objecti, à diversis locis directè ad oculum veniant, Objectum illud in totidem locis apparebit. Sit e. g. x (fig. 40.) Objectum; o, oculus; & bc, lens interposita; quæ pluribus planis superficiebus cd, de, ef, &c. terminetur, sicut ad Objecta multiplicia reddenda fabricari solet. Dein suppose hæc plana radios in sese incidentes ita refringere, ut oculum petant quasi à loco x venientes qui incidunt in planum de; vel à loco y venientes, qui incidunt in planum ef, & sic porro; & manifestum est, tum ra-

DE PHÆNO- tione tum experiētiā suadente, quòd idem Objectum  $x$  in diver-  
MENIS LUCIS sis locis,  $x$  &  $y$ , ad instar plurium videbitur.  
PER

130. Ad eundem modum, stantibus jam positis, nisi quòd vice polygoni  $BC$  Prisma  $ABC$  (fig. 41.) substituatur; cū ē præmonstrātis constat, quòd ē radiis, versus oculum refractis, purpuriformes, propter maximam refrangibilitatem, longissimē à lineā rectā oculum & objectum interjacente divaricant; suppone, quòd purpuriformes (9) oculum petant quasi venientes à  $p$ , & quòd rubriformes oculum petant quasi venientes à  $r$ , cæterique in locis intermediis, pro gradu refrangibilitatis, fluant; & manifestum est, quòd Objecti, si ope purpuriformium radiorum solummodo conspiceretur, imago foret ad  $p$ , idque Cærulei coloris; si radiis solummodo rubriformibus conspiceretur, imago ejus ad  $r$  existeret, idque Rubei coloris; & ad  $r$  Viridis appareret, si modò viridiformibus radiis conspiceretur; & sic præterea. Quòd si Objectum duo tantummodo radiorum genera simul emitteret, duplicem fortiretur imaginem; sic emissis rubriformibus & purpuriformibus radiis, imago altera ad  $r$  Rubea appareret, & altera ad  $p$  Purpurea. Et sic denique, si omne genus radiorum simul emitteret, ut solent corpora naturalia, tunc innumeras colorum, gradatim differentium, obtineret imagines, per totum spatium per ordine continuo dispositas; quæ, cū in locis non penitus discretis formarentur, se mutuò oblitterarent, efficerentque, ut nil nisi confusa colorum series appareret.

131. Hoc pacto quidem colores omnigenos generari oportet, cū Objecti lucidi, nigredine vel tenebris terminati, perexigua est apparens magnitudo; qualis est Solis vel Lunæ aliorumve fiderum, aut foraminis in fenestrā lucem à nubibus in obscurum cubiculum intromittentis. Quòd si expansius Objectum intueamur, quale ad  $x$  designatur, terminum ejus,  $GH$ , vertici Prismatis propriorem imprimis animadvertamus; & manifestum est, quòd imaginum ejus, ex variis radiorum generibus formatarum, purpureā longissime omnium veluti ad  $p$  divaricante, color ille apparebit extimus. Imago autem Viridis, adusque  $r$  translata, cum parte aliquā Purpureæ imaginis, ut & intermediæ Cæruleæ, ibidem coincidet & confundetur; à quā mixturā Cæruleum colorem

(9) Vocem purpuriformes conjecturā inserui.

generari

generari oportet. Et Rubea, in  $r$  terminata, cum partibus cæ-  
terarum omnium imaginum eousque extensis coincidet, & colo-  
rem Objecti ibi restituet; Album puta, si modo Objectum sit albi  
coloris.

132. Et quemadmodum juxta limitem  $GH$  Objectum Purpureo & Cæruleo fimbriatum apparebit; sic in opposito limite  $IK$  per consimile ratiocinium patebit alteros colores, Rubeam Flavumque, produci.

133. Nec secus, cū ejusdem Objecti partes aliquæ sunt aliis utcunque lucidiores, colores varii generari debent.

134. Et quantitas anguli  $POr$ , sub quo Colores apparent, erit maxima, cū Prisma statuitur oculo vicinissimum; eoque minor evadet continuò, quo Prisma propius ad objectum collocatur. Quemadmodum, si Prismatis, ex vitro confecti, angulus verticalis sit  $60$  gr. colores sub angulo  $2^\circ. 2'$  circiter apparebunt, cū proxime oculum disponitur, &  $1^\circ. 1'$  cū in mediā inter oculum & Objectum distantiā statuitur; & quasi  $30\frac{1}{2}$  min. cū triplo plus distat ab oculo quàm ab Objecto, & sic præterea. Hic autem suppono radios ad utramque superficiem ejus æqualiter refringi. Nam, cū positionem ad radios ex alterutrā parte obliquiorem, convertendo circa axem, acquirit, ille angulus augebitur. Suppono etiam Objectum satis lucidum esse, ac tenebris densissimis terminatum, ut colores adusque summas extremitates videri possunt. Nam secus per latitudinem jam assignatā minorem distendi videbuntur; ut ut de quantitate aliisque colorum circumstantiis in quibuscunque Objectis, sub dio conspectis, apparentium, idque pro refractionibus utcunque factis ex his facile est conjicere.

Cæterum in allatæ doctrinæ illustrationem Phænomena aliquot insigniora, & minus obvia, ex abundanti jam breviter describere est animus.

#### EXPER. XXI.

135. Et imprimis, accepto filo aliquo  $PT$  (fig. 42.) ejus alterum dimidium,  $PR$ , Cæruleo colore tinxī; atque alterum,  $RT$ , colore Rubeo. Dein Prismate adhibito hoc filum intuebar; cujus à tergo, nisi locus erat tenebrosus, corpus aliquod nigerrimum staret; vidique præfata dimidia non in directum jacens, sed in  
duas

DE PHÆNO- duas lineas discreta, quas in *pr* & *st* habes designatas. Scilicet  
MENIS  
LUCIS PER cærulei dimidii, propter maiorem eorum radiorum refractionem, imago paulo longius translata fuit. At linea tamen subobscura ipsius *PT* refracta apparuit, cujus partes in directum jacere & à quâ colores aliquantulum proflare visi sunt; id quod ex imperfectione & mixturâ in utrisque fili coloribus latente contigit. Nam quanto illustriores erant & simpliciores, ea linea tanto obscurior evasit, & colores *pr* & *st* clariore & magis interrupti.

136. Cæterum cum lux, quam filum tenue reflectit, perexigua sit, præstat adhibere corpus aliquod expansius, quale per *PN* (fig. 43.) designatur; quod v. g. concipe papyrus esse, ex parte *PRLK* Cæruleam, & ex alterâ parte Rubeam. Tum prisma juxta oculum interposito, nigroque corpore aut loco tenebroso pone hoc Objectum sito, videbis imaginem Cæruleæ partis paulo longius translata esse, terminis *pt* & *kn* in confinio colorum, *rs* & *lm*, ut ante diffractis. Sed hîc summè cavendum est, ut papyrus cum crassis & intensis coloribus illinetur.

## E X P E R. XXII.

137. Huic affine est experimentum, cum statui duo prismata ad foramina duo, quibus lucis patuit aditus in tenebrosum cubiculum; ac in eo situ disposui, ut unius Purpura & Rubor alterius in eundem locum coirent. In quo loco fixi papyri segmentum circulare, & non latius dimidio vel triente latitudinis coloratarum imaginum; eapropter ut duobus illis solummodo coloribus illuminaretur. Quo facto papyrus pallidi cujusdam coloris apparuit. Tum, cæteris utrinque coloribus Objecto nigro terminatis, vel, quod satius erat, longius projectis, ut præfata papyrus nigredine vel tenebris circumcincta appareret, tertium prisma ad oculum applicavi; & ad distantias abinde pro arbitrato varias me submovens, unicæ illius subpallidæ papyri geminam vidi imaginem, Purpuream & Rubeam. Et imago Purpurea longius à papyro translata erat quàm Rubea, prout major eorum radiorum Refrangibilitas exigit. Rem schemate 44 designatam habes, ubi papyri *PT* imagines sunt *x* & *y*.

138. Ad eundem modum si duo Pulverum genera, quorum alterum perfectè rubrum est, & alterum purpureum vel indicum,  
sine

sine mixturâ cyanei, viridis, aut flavi parari possent, Objectum aliquod perexiguum, cum mixturâ pulverum istorum crassè illitum, geminam imaginem exhiberet: spectaculum fortè causas ignorantibus mirandum. Sed vereor, ut Pulveres coloribus adeo simplicibus præditi parari possint.

139. His præterea non multum diffimile est, cum colores duorum prismatum ita in parietem trajiciuntur, ut, unius Rubore contingente Purpureum alterius, in directum jaceant, quemadmodum videre est ad *p, r*; & mediante prisma, parallelis interposito, intuentur. Nam imagines non ampliùs in directum jacebunt, sed ab invicem apparebunt distinctæ, sicut ad *mn* & *mv* designantur, fig. 45.

140. Atque ita, si duo prismata *A* ac *B* (fig. 46.) sic statuantur, ut eorum colores ad locum *pp* adæquatè coincidant in ordine tamen contrario; Purpurâ alterius, *A*, cadente ad *p*, & Rubore ad *p*; alterius autem, *B*, Purpurâ cadente ad *p* & Rubore ad *p*: & per tertium prisma *EF* imagini *pp* parallelum perspexeris; unicæ *pp* duas decussantes imagines intueberis; alteram, *MN*, è coloribus prismatis *B* productam; & alteram *mn*, è coloribus prismatis *A*. Et quo longius ab Objecto *pp* te conteras, eo magis extremitates imaginum, *m* à *n* & *N* à *m*, distabunt.

141. His etiam contraria sunt experimenta, quòd Objecta duo, five sunt circelli chartacei *x* & *y* (fig. 44. diversis coloribus illustrati, five diversorum prismatum paralleli vel decussantes colores, ut *MN* & *mn* (fig. 46.) ita possunt mediante alio prismate conspici, ut in unum coalescere videantur.

## E X P E R. XXIII.

142. Et præter jam recensita perinsigne est hujusmodi experimentum, quo Objecta coloribus per interpositionem prismatis denudantur, quibuscum nudo oculo tincti apparent. Instantiam in Solis imagine coloratâ accipe, quæ in parietem à prismate *ABC* (fig. 47.) projecta, cum cernitur mediante alio parallelo prismate, *abc*, manibus prehenso, cujus vertex ad plagas versus Rubeum colorem convertitur; si spectator se longius ab imagine gradatim amoveat, percipiet colores paulatim contrahi, & ad invicem eoque accedere, donec tandem uniti resciant imaginem albam & circularem.

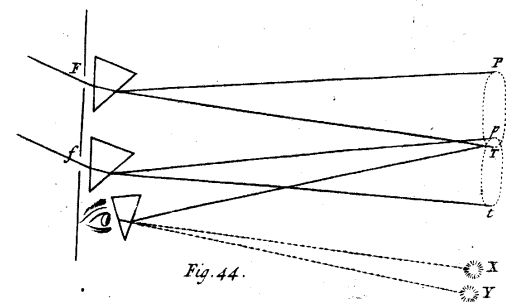
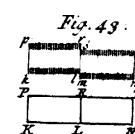
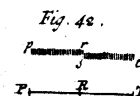
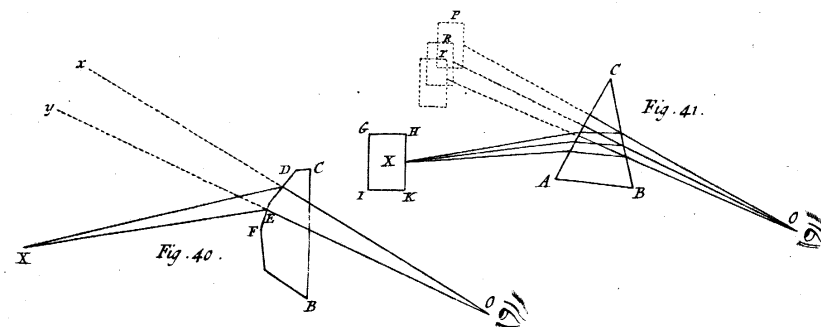
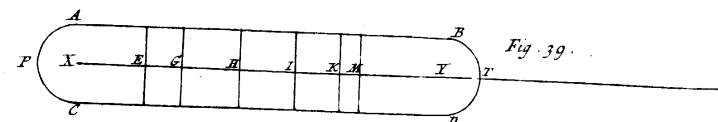
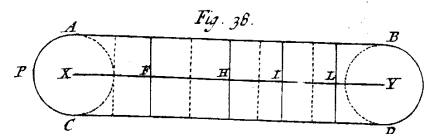
DE PHÆNO- circularē. Id quod accidit, cū spectatoris eadem est à colo-  
MENIS ribus distantia ac prismatis ABC; si modo prismatum anguli verti-  
LUCIS PER cales æquantur. Et ratio ex eo manifesta est, quòd oblongam il-  
lam imaginē, ex circulis, sive circularibus imaginibus, infinitè  
multis, & in longum continuè dispositis efformatam esse docue-  
rim; quare quæ sunt ad Purpuream extremitatem longius per  
refractionem secundi Prismatis transferuntur, ut cæteras affequi  
possint, & sic omnes coincidere.

143. Ad hunc modum cū Objecta quælibet, ut QR, foras  
posita confusas & coloratas eorum imagines, ut x/ ad parietem  
per prismata transmittunt; si mediante alio prismate inspicias, possis  
imagines hæc coloribus denudare & efficere præterea, ut dis-  
tinctiores appareant, quemadmodum ad qr (fig. 47.) videre est.  
Quoniam verò ad sufficientem copiam lucis requiritur, ut fora-  
men F sit amplum; per ejus autem amplitudinem transmissæ ima-  
gines evadunt confusæ; lens aliqua convexa, ut MN, prope fora-  
men istud statuenda est, quæ radios à singulis punctis Objecti, fo-  
ras positi, venientes congreget in totidem aliis punctis ad parie-  
tem; & insuper Prismata debent esse admodum transparentia,  
perpolita, & superficiebus accuratè planis terminata, inque situ  
quàm poteris exactè parallelo disposita. Tanta quidem diligentia  
non requiritur, ut imagines qr, s sine coloribus appareant; sed  
ut inter tot ac tantas refractiones distinctæ appareant, præter ac-  
curatam fabricam vitrorum, requiritur experientis ingenium, quo  
omnia rectè disponantur.

144. Hic in cumulum præterea adjici potest, quòd Objecta,  
quo simpliciori luce illuminantur, eo distinctiora per prismata ap-  
parent; quippe cū eorum per prismata sub dio visorum confu-  
sio ex inæquali refrangibilitate illuminantium radiorum oriatur.  
Et hinc est, quòd solaris imaginis sæpius commemoratæ termini  
rectilinei, in quibus nullam esse heterogeneorum radiorum com-  
misturam indicavi, præ cæteris omnibus Objectis distincti, medi-  
ante Prismate, appareant. Et sic muscæ, & similia animalia, cū  
in Rubeâ vel aliâ quâvis luce simplici, prismatibus elicitâ, statu-  
antur, transvidentur solito distinctiores. Quinetiam oculus En-  
gyscopio armatus, omnia, hæc luce simplici illustrata, distinctiora  
cernit.

Tab. VII.

Pag. 416.



cernit. Id quod insigne in contemplatione Insectorum, vel texture aliarum rerum naturalium præ se usum ferre potest.

PER PRISMA  
TRANS-  
MISSÆ.

145. In tertiâ Propositione suprà de Phænomenis quibusdam differui, ubi è radiis, ad refringentem superficiem æqualiter inclinatis, aliqua genera pervasere, dum alia penitus reflectebantur; & illis affinia quædam jam attingere opportunum duco. Esto s spectatoris oculus, quo lucem à nubibus sub dio ingressam planum FG (fig. 48.) reflexam à plano HI, & plano FH regressam excipit; & cum Prisma commodè statuitur ita, ut radiorum, è medietate basis HI versus oculum reflexorum, angulus reflexionis sit quasi 50 gr. pars proximior basis remotiori aliquantum obscurior videbitur; & in utriusque partis confinio fimbria, qualis DE, subcærulei coloris apparebit. Utpote cum radii, qui à remotiori parte basis ad oculum reflectuntur, obliquius incident, quàm qui eò resiliunt à parte proximiori; talis potest assignari eorum circa medium basis obliquitas, ut è proximioribus, propter minorem obliquitatem, aliqui perrumpere & refringi possint; dum remotiores, propter majorem obliquitatem, omnes ad oculum reflectuntur. Sic ad Vitrum, cujus refractionem per rationem sinuum 42 ad 62 metimur, in plano SABC ad prismatis longitudinem transverso, posito angulo c/s 49°. 22', ang. c/rs 49°. 44', & ang. c/ps 50°. 5'; t erit limes refractionis rubiformium radiorum, ultra quem nulli superficiem HI penetrabunt, qui propter debitam obliquitatem incidentiæ ad oculum reflecti possunt; & à citeriori parte ct complures è radiis sic incidentibus, propter minorem obliquitatem, pervadere possunt & refringi; qui oculum petent, si modò reflecterentur. Et sic r erit limes radiorum viridiformium, & p limes purpuriformium. Adeoque superficiæ IH pars citima cp, propter complures radios omnis generis transmissos, obscurior apparebit quàm pars ultima tB, quâ omnes, qui oculum attingere, eò reflectuntur. Et quia rubriformes à limite t, & viridiformes à limite r incipiunt ex parte pervadere, manifestum est, quòd ex illis pauciores à spatio pt ad oculum resiliunt, quàm è purpuriformibus; qui non prius incipiunt pervadere, quàm ad limitem p: ut & pauciores, quàm è cæruliformibus, qui ad limitem inter p & r tantum pervadere incipiunt. Et proinde

in illo spatio Purpureus & Cæruleus color aliquantulum dominabitur. Deque totâ subcæruleâ lineâ DE consimilis est discursus.

146. Hæc autem linea non recta est, sed in morem arcus incurvata; propterea quod puncta radios à basi Prismatis ad oculum, in angulo reflexionis dato, resiliens reflectentia ejusmodi Curvam constituunt.

147. Quod ad Refractiones in superficiebus Prismatis FG & FH factas spectat, nihil refert in remotiori FG quænam sint; dummodo radii è proximiori FH perpendiculariter emergant, angulo KHG existente quasi  $40\frac{1}{4}$  gr. Quod si angulus ille major existat, colores in lineâ DE, adjuvante refractione, paulo distinctiores evadunt; & minùs distincti, si sit minor. Major etiam oculi à Prismaticæ distantia, vel (quod perinde est) pupillæ coarctatio, colores nonnihil perficit.

148. Ad hæc, cum duo Prismata, parallelis axibus & basibus contiguus, ad invicem applicantur, & in eo situ colligantur, iidem omnino effectus per radios ab aëre intercluso reflexos producantur. Sed radii transmissi contrarios exhibebunt. Esto ACDB (fig. 49.) sectio utriusque Prismatis ad orum longitudines perpendiculariter transversa, & CB contactus basium, aut potius aër interclusus. Quippe Prismata vix queant tam arcuè comprimi, quin ut aër nonnullus, in morem tenuissimæ lamellæ, maneat interclusus. His positis, oculo S, radios à CB, lamellâ aeris interjectâ, reflexos intercipienti omnia apparebunt ut antè: at oculo s trajectos excipienti omnia cernentur contraria; spatio TB opaco & obscuro existente, & CP translucido; ac eorum confinio PT juxta t Ruborem saturem, juxtaque r Citrium Flavumque exhibente; qui color usque ad p gradatim diluitur, ubi in Album PC definit. Et hi colores longe intensiores & illustriores apparent, quàm subcæruleus color ex alterâ parte ad oculum s reflexus. Quorum quidem omnium rationes è supra dictis patent; siquidem è radiis versus oculum s tendendibus, qui incidunt in superficiem partem TB, omnes propter nimiam obliquitatem alio reflectuntur, soli que rubriformes superficiem istam, à c usque ad limitem t, viridiformes ad limitem r, & purpuriformes ad limitem p tantum pervadere possunt.

149. Cæterum

149. Cæterum hîc cavendum est, nequa lux in superficiem CB à parte D incidat, quæ vel ad oculum s reflexa, vel transmissa ad oculum s, colores conturbet. Et insuper ne refractiones, à superficiebus AB & CD factæ, ad effectus jam explicatos quicquam conducere videantur; præstat ut superficies istæ statuantur parallelæ: quo mutuos effectus, ex opinione receptâ, destruere possint.

#### SECTIO QUARTA.

*De phænomenis Lucis per Medium Refractivum parallelis planis terminatum transmissæ.*

150. Transactis Triangularium Prismatum phænomenis, quæ Quadrangulis per parallela plana efficiuntur, jam opportunè subveniunt enarranda. Id quod lubentius aggredior, cum Philosophi hætenus crediderunt colores nullos hoc pacto generari; existimantes posteriorem superficiem effectus omnes, per contrariam refractionem, radiis auferre, quos prior inducit: & hoc pro experto habere rati, quod in Vitris fenestrarum, aut aliis consimilibus, nullos produci videant. At in eo decepti sunt, quod hujusmodi Colorum quantitas & perfectio dependet à distantia parallelarum superficialium. In laminis quidem vitreis, propter parvum superficialium intervallum, Colores sunt adeo tenues & exiles, & in spatio tam angusto comprehensi, ut effugiant sensus: at, cum vitra magis crassa adhibentur, aut potius vitrea vascula parallelepipeda, aquâ limpidissimâ plena, Colores tunc liquidè generari cernuntur.

151. Nam concipe ABCD (fig. 50.) esse Vitreum vel Aqueum parallelepipedum aëre circumcinctum, cujus ex oppositis & parallelis planis duo lineis AC & BD designentur. Et Sol illud per exiguum foramen F obliquè transluceat, ejusque paralleli vel convenientes radii in anteriori superficie ad H ita debent inæqualiter refringi, ut ab invicem deinde divergent, usque dum incendant in posteriorem superficiem ad PT, & ibidem colores omnigenos depingant, perinde ut supra sat fusè explicui. Jam, cum propter parallelismum superficialium refringentium radii tantum à posteriori recurventur, quantum incurvantur à priori, necesse est, ut sibi ipsis ex aere secundum SH incidentibus emergant paralleli:

G g g 2

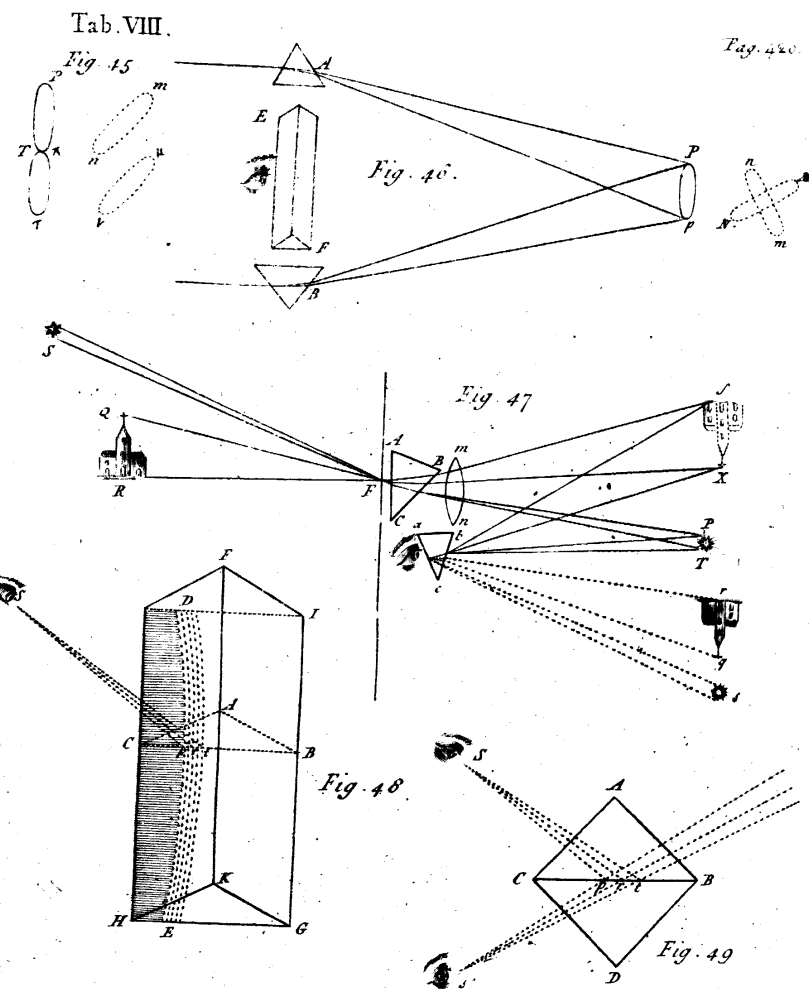
adeoque



GENERATIO adeoque distantias ac positiones acquisitas in infinitum servant, & elicitos colores eo usque sine aliquâ variatione promant. Quemadmodum si  $PH$  è refractis ad  $n$  sit purpuriformis radius, &  $TH$  rubriformis; eorum denuo refracti  $pp$  ac  $tt$  incidentibus  $SH$ , adeoque sibi metipsis paralleli emergent; & proinde Purpuram & Rubedinem, quam ad  $P$  ac  $T$  exhibuere, ad quamlibet distantiam  $pt$  immutatam transferent, & sine quâvis uspiam variatione conservabunt, Purpureo à  $P$  in  $p$  translato, Rubeo à  $T$  in  $t$ , cæterisque à locis intermediis in loca correspondentia.

152. Hoc equidem præcisè debet evenire, si modò radii secundum eundem  $sf$ , vel parallelas lineas, in hoc Prisma incidentent; siquidem tunc emergent paralleli. At, cum inclinantur ad invicem, uti de promanantibus à diversis partibus Solaris disci contingit, tunc etiam emergent inclinati, & eapropter mutationes quasdam in ulteriori translatione patientur. Utpote circuli, à singulis radiorum generibus effecti, ex quibus in longum dispositis colorata Solis imago in superficiem  $BD$  procidens constituitur, propter divergentiam radiorum, in foramine  $F$  decussantium, eo dilatores evadunt, quo radii longius post emergentiam fluunt; dum eorum centra, quæ radiis à centro Solis, secundum eandem quampiam lineam ante refractionem, effluentibus illuminentur, easdem, post refractionem, distantias & positiones inter se perpetuò conservant. Et hinc est, quòd spatium  $prt$  solari luce in tenebrosus cubiculum immissa illuminatum, eo magis dilatetur, & in orbicularem formam contrahatur, quo longius post Prisma terminatur; & Viriditas in medio  $R$ , siqua sit, paulatim transmigret in Albedinem; vel si nulla sit, sed propter angustiam Prismatis hujus, aut amplitudinem foraminis lucem intromittentis, Albedo medietatem colorum occupet, eadem Albedo sensim dilatetur. Sed colores tamen hinc inde non diluuntur, nec in spatium angustius contrahuntur, utut minus luminosi propter dilatationem imaginis evadant.

153. Ad hæc si mediante Parallelopipedo intueamur Visibilia, coloribus non secus tingantur, quàm si prisma triangulare adhiberetur; præsertim si Parallelopipedum ad pertransientes radios fat obliquetur, ut multum refringat, & Objecta sint admodum propinqua. Nam, si Objecta longinqua sint, sive intervallum istud intercedat



intercedat Parallelepipedum & Objecta, five Parallelepipedum A PLANIS PARALLELEPIS. & oculum, utcunque refractio per obliquitatem Parallelepipedi fiat magna, colores tamen non generabuntur. Sit  $x$  (fig. 51.) punctum lucidum, radios per parallelepipedi refringentia plana,  $ac$  &  $bd$ , ad oculum  $s$  emittens; & manifestum est, quod ducta  $s'nx$ , quæ rubriformem radium designet, &  $s'pmx$ , quæ designet purpuriformem, hi radii ad utramque superficiem æqualiter refringentur; adeoque triangula,  $pst$ ,  $mxn$ , similia conficient, purpuriformi radio, propter majorem refrangibilitatem, hinc & inde apud  $p$  &  $m$  plus vergente à directo tramite quàm rubrifor-  
mis: unde necesse est, ut sese alicubi intra Prisma decussent, quemadmodum videre est ad  $o$ , iterum conficientes triangula  $pot$ ,  $mon$  similia, five trapezium  $spot$  simile trapezio  $xmon$ ; adeoque oculum petent, tanquam si primario fluxissent ab eodem  $o$ , & refractionem ab unicâ tantum superficie  $ac$  passi fuissent. Et hinc non tantum sequitur Colores generari, sed & angulum  $pst$ , five colorum apparentem latitudinem, aliasque circumstantias pro quâlibet oculi positione determinari posse. Quemadmodum manifestius erit, si conferas cum experimento, quo Objecta, in aquam altè immersa, oblique insipienti coloribus nonnihil tincta videntur, propter refractionem stagnantis superficiei. Nam  $ac$  superficiem stagnantis aquæ, &  $o$  Objectum aliquod immersum, quod spectator  $s$  intuetur, referre potest. Quod quidem  $o$  faciliè invenies, ducendo rectam  $sx$ , quæ refringentes superficies secet in  $k$  &  $L$ , ac dividendo in  $o$ , ut sit  $sk$  ad  $Lx$  ut  $so$  ad  $ox$ , five ut  $ko$  ad  $ol$ .

154. Quinimo ad hæc experienda pro Parallelepipedo vas optimè adhiberi potest, quod in fundo transfoditur, & vitri laminâ perpolitâ & horizonti parallelâ refarcitur, ut aquam cohibere possit. Nam, cum aqua ad altitudinem pedis, aut amplius, infunditur, Lux, per vitri aut aquæ istius parallelas superficies oblique trajecta, Colores pro more explicato producet, possisque successive collocando Objecta ad  $x$  &  $o$  phænomena conferre. Id quod etiam fieri potest disponendo duo vitrea Prismata triangularia ut  $ACE$ ,  $DBF$  (fig. 52.) ad distantiam pedis aut amplius in eo situ, ut eorum latera correspondentia  $ac$  &  $db$  &  $ce$  ad  $bf$  evadant parallela, & radii per interiores superficies perpendiculariter proximè trajiciantur.

trajiciantur. Tunc enim exteriores AC & BD refringentia plana Parallelepipedum referent. Et propter Vitri majorem quàm Aquæ vim refractivam, Colores eliciantur magis illustres.

155. Et hæc de Colorum à parallelis planis genesi monuisse sufficiat; nisi fortè juvet annotare diversitatem effectuum, qui ab hisce producuntur, & à Triangularibus Prismatibus. Ejusmodi sunt 1° Quòd Colores, cum in papyrum projiciuntur, splendiores evadunt per auctam papyri longinquitatem, si modo Prisma sit triangulare; sin Parallelepipedum, hebescent. 2°. Cum Objecta per Prismata triangularia transpiciuntur, Colores itidem splendiores evadunt ex Objectorum auctâ longinquitate, at secus sit in parallelepipedis. 3°. Cum Sol translucet Prisma triangulare, Colores oriuntur terminando lucem ex utrâvis parte Prismatis: at cum translucet Parallelepipedum, Colores non oriuntur terminando lucem à posteriori ejus parte. Cujus rei ratio est, quòd heterogenei radii à triangulari Prismate divergentes fiunt, adeoque post emergentiam plus plusque segregantur; at in parallelismum restituuntur emergentes è Parallelepipedo, & non amplius ab invicem recedunt. Denique notum est, quòd Colorum, in extremam partem oculi, in Solem vel lucernam per Prisma triangulare respicientis, quilibet astans videbit ordinem ei contrarium, quem videt ipse spectator. At, cum Parallelepipedum adhibetur, idem erit ordo colorum in utroque casu, propter decussationem radiorum in Parallelepipedo, ubi spectator transpicit, quemadmodum inspicienti schemata manifestum.

156. Et ex hac effectuum diversitate phænomenon componitur, quo Colorum ad diversas distantias diversi fiant ordines. Ut pote per vas aqueum ABCD (fig. 53.) in cujus fundo YZ refert laminam vitream, quam in superioribus horizonti parallelam esse supposui, jubare trajecto, si vas ad partes Solem versus elevetur, ut fundum ejus magis obliquetur ad perlabentem lucem, quam superior stagnans superficies; heterogenei radii, propter majorem in egressu refractionem, convergentes evadent, adeoque decussando mutabunt situm. Si lucem chartâ proximè egressam excipias, Purpura cadet infra Ruborem; & chartam longius differendo, in loco decussationis, per commisturam, evanescent converfi in

in Albedinem; ac postea de novo emergent in ordine contrario, ut videre est ad Q, R & V.

157. Ad aliud experimentum jam transeo, his quodammodo affine; quo Colores non à parallelis quidem superficiebus generantur, sed è superficiebus ita inclinatis, ut, interpositâ reflectione, parallelarum rationem habeant. Sit SF (fig. 54.) linea coloribus omnigenis irradiata, quorum Purpurei, dum ad F ingrediuntur Prisma, refringuntur versus H, & Rubei versus G: abinde verò reflectuntur ad K & I, unde egredientes refringuntur denuo ad M & L. Dico jam, si Prismatis anguli ABC & CAB æquantur, emergentes radii, IL & KM, paralleli erunt. Nam in triangulis FGA, IGB, cum anguli A & B ex hypothese æquantur; ut & anguli FGA & IGB, propter æqualitatem incidentiæ & reflectionis; triangula erunt similia, angulique AFG, BIG æquales; atque adeo æqualis erit refractione in F & I, & inde anguli CFS, CIL æquales. Et eadem ratione patebit angulum CKM angulo eidem CFS æqualem esse, adeoque radios IL & KM parallelos. Jam, cum radii IL & KM, secundum eandem lineam SF successivè incidentes, non secus emergant paralleli quàm in præcedentibus, ubi superficies refringentes erant parallelæ, eadem omnia phænomena, quæ ibi ostensa sunt, huic competere certum est. Quemadmodum lucem Solis coloribus tingi, si Prisma satis amplum adhibeatur, ut spatium FGI vel FHK sufficiat ad efficiendam sensibilem divergentiam radiorum, antequam per iteratam refractionem in parallelismum reducantur; sed ejusmodi Colores non perfectiores per longinquitatem obstaculi, quo interciduntur, evadere. Item istos colores, si oculo postposito immediatè excipiantur, eo magis manifestos fore, quo Objectum, quod intuemur, sit oculo propinquius, ut & eo magis, quo anguli CAB & CBA majores existant; & eundem denique ordinem servare cum in obversum oculum directè mittuntur, atque cum cernuntur ad parietem aliudve obstaculum terminati. Hæc inquam evenire debent, si amplum Prisma adhibeatur (quale ex aquâ vitro circumdatâ fabricari possit) & anguli A & B constituentur æquales. At in angustis Prismatibus distantia radiorum IL & KM minor est, quam ut colorum sensibilis possit esse latitudo; & cum anguli A & B sunt inæquales, perinde

GENERATIO  
COLORUM. perinde est, ac si refringentes superficies in præcedentibus non sunt parallelæ, & fimiles sunt effectus.

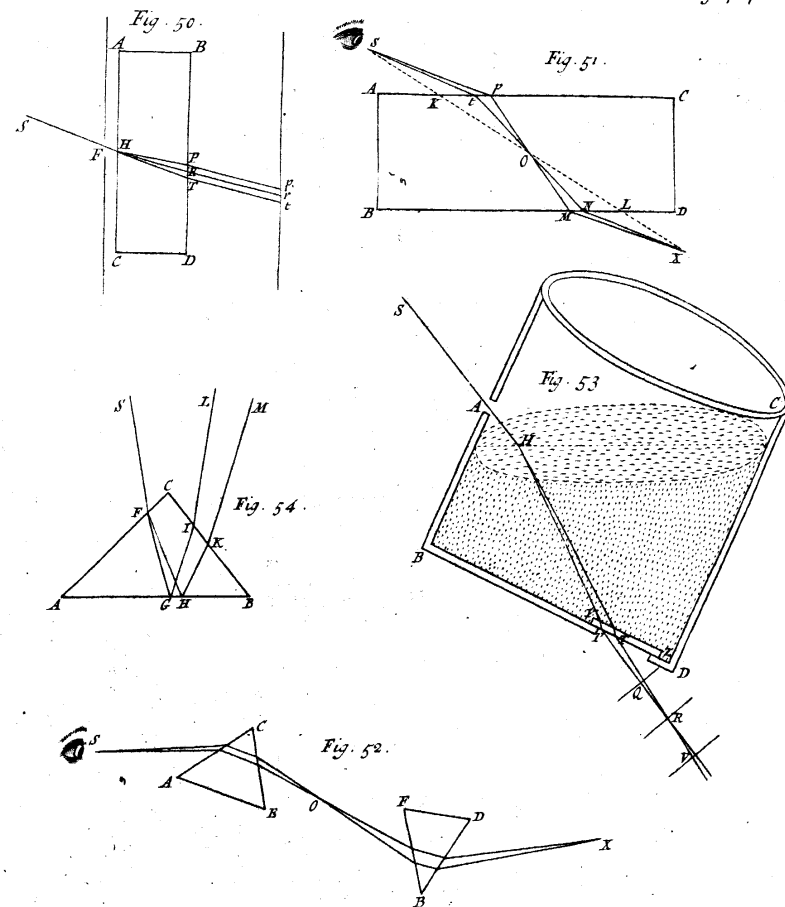
158. Quod de Coloribus dicitur, cum unica tantum reflectio refractionibus intervenit, facile applicatur ad alios casus, ubi plures interveniunt; sed placet aliquod præterea de reflexionibus exponere, quibus generantur effectus, quos solæ refractiones exhibere possunt. Sit  $sf$  (fig. 55.) ut prius linea diversis coloribus successivè irradiata; qui, versus  $p$ ,  $t$  aliaque intermedia loca pro gradibus refrangibilitatis refracti, à Prismatis latere  $BC$  reflectantur ad  $m$ ,  $n$ , ubi iterum impingentes in latus  $AC$  refringantur denuo ad  $pt$ ; & colores ad  $pt$  perinde apparebunt, atque ad  $\pi$  apparent, si modò radii  $fp$ ,  $ft$ , &c. per duplum Prisma  $ABC$ , i. e. per Prisma, cujus angulus verticalis  $ACB$  sit duplo major hujus angulo verticali  $ACB$ , rectâ fluxissent ad  $mn$ , & inde versus  $\pi$  refringerentur. Nam pares sunt omnes utrobique anguli, five à plano  $BC$  per  $AC$  versus  $pt$  refliliant radii, five longius per  $BC$  pergant ad  $\pi$ ; utpote angulus  $ctn (=BtF) = ctn$ ; & inde  $cnt = cnt$ , adeoque  $cnt = cn$ . Atque idem in aliis radiis intellige. Cum autem præcipuæ Colorum ad  $\pi$  circumstantiæ in superioribus tradantur, cramben jam reponerem, si quid amplius de persimilibus phænomenis ad  $pt$  instituerem dicere.

### SECTIO QUINTA.

*De phænomenis Lucis per Media Sphæricè terminata transmissæ, deque Iride.*

159. Hactenus Colores refractionibus planarum superficierum generatos contemplati sumus; jam de Sphæricis superficiebus agendum est; & imprimis de lentibus, seu figuris à duabus diversarum sphærarum portionibus comprehensis. Ejusmodi autem lens esto  $MN$  (fig. 56.) per quam Lux Solaris juxta  $Ff$  nec non undique terminata transmittitur. Sitque  $HK$  focus, ad quam postea convergat. Et, cum radii similiter incidentes non omnes similiter refringantur, concipe, quòd radorum secundum  $of$  incidentium Purpuriformes refringantur ad  $k$ , Rubriformes ad  $H$ , & Viridiformes ad punctum intermedium  $r$ . Et pari ratione de radiis secundum  $of$  incidentibus concipe, quòd Purpuriformes tendunt

Tab. IX.



dunt ad  $H$ , Rubriformes ad  $K$ , ac Viridiformes ad  $r$ . Atque idem de radiis undique terminatis (juxta lentis peripheriam) concipe. Et patebit primò, si radii à papyro  $DL$  prius terminentur, quàm ad focum  $HK$  conveniant, quòd color Rubeus in confinio lucis & umbræ deberet undique conspici. Utpote si lineæ  $FH$ ,  $Fr$  &  $FK$  ipsam  $DL$  in punctis  $T$ ,  $R$  &  $P$  secent;  $FH$  quidem in puncto  $T$ ,  $Fr$  in puncto  $R$ , &  $FK$  in puncto  $P$ : posito similiter quòd  $fH$ ,  $fr$  &  $fk$  eandem  $DL$  in punctis  $\pi$ ,  $\rho$  ac  $\gamma$  respectivè secent; & productis etiam  $FH$  &  $fk$  donec sibi in  $t$  occurrant; ut &  $FK$  &  $fH$  donec occurrant in  $p$ , constabit punctum  $t$  longius distare à lente quàm punctum  $p$ , quandoquidem cadit ultra focum  $HK$ ,  $p$  verò citra. Et proinde puncta  $P$  &  $\pi$  interjacent punctis  $T$  &  $\gamma$ . Constat etiam Purpuriformes radios per totum spatium  $P\pi$  solummodo dispergi, propterea quòd per integrum spatium  $Ff$  in lentem parallelè incidentes versus locum  $p$  refringantur; & sic radii Viridiformes spatium  $R\rho$  occupabunt, ubi & Rubiformes spatium  $T\gamma$ , extra quod nulli omnino ex radiis parallelè incidentibus (nisi contingenter & nulla certâ lege propter bullulas quasdam aliaque vitia in vitro latentia refracti) possint divaricare. Quare spatium,  $P\pi$  à radiis omnium colorum illuminatum, debet albescere. At cum Purpuriformes desint à spatiis  $R$  &  $\rho$ , cæterorum mixtura debet exhibere Flavum. Atque ita, cum soli Rubiformes extendantur ad  $T$  &  $\gamma$ , in locis  $T$  ac  $\gamma$  Rubor apparebit, & spatium illuminatum  $P\pi$  (quod orbiculare concipe) duobus colorum circulis, Rubeo Flavoque, tingetur. Hæc equidem eveniunt, cum charta  $DL$  inter lentem & punctum  $p$  collocatur. Et colores tanto perfectiores evadunt, quo charta sit puncto  $p$  propinquior. Et, cum statuitur ad ipsum  $p$ , Albor è medio penitus evanescere deberet, si modò radii à diversis partibus solaris disci ad lentem manantes incidere parallelè. Quòd si charta paulo longius amoveatur, uti ad  $r$ , ubi Viridiformes radii concurrunt, adversi colores ubique ad illam distantiam miscebuntur, & se invicem ita debent, ut vix aliud quàm albor apparebit. Si charta deinceps adhuc longius transferretur, puta ad  $d$ , invertetur radiorum ordo, & puncta  $\gamma$  ac  $T$  interjacebunt punctis  $P$  &  $\pi$ , adeoque spatium  $T\gamma$  ab omnibus coloribus illuminabitur, & proinde albescet; & in spatiis circa  $R$  &  $\rho$ , ad quæ Rubor non extenditur, Cæruleus componetur; &

Violaceus apparebit in extremitate summâ  $\pi$  &  $\pi$ . Qui quidem Colores non tantum manifestiores sunt, quam Rubor & Flavus per interpositionem chartæ inter lentem & focum ut prius emergentes; sed perpetuo manifestiores evadunt, quo charta adhuc longius amovetur.

160. Latitudo spatii sic tincti coloribus ex præmonstratis petenda est, vel etiam sic facile determinari potest. Cum differentia refractionis radiorum, in refrangibilitate maximè discrepantium & similiter incidentium, sit quasi septuagesima pars totius refractionis, ut ex ostensis patet; et, cum angulus  $HFK$  designet differentiam refractionis, angulusque  $Frf$  summam refractionum utrinque ad  $F$  &  $f$  factarum, hoc est, duplum refractionis juxta alterutrum  $F$  &  $f$ : angulus  $HFK$  erit quasi septuagesima pars semissis anguli  $Frf$ , sive  $\frac{1}{140}$  pars totius  $Frf$ , & proinde subtensa  $HK$  quasi  $\frac{1}{140}$  pars latitudinis  $Ff$ , per quam luci patet aditus, aut eâ fortasse paulo major. Denique, cum sit  $Ff : FR :: HK : TP$  vel  $7\pi$ , dabitur intervallum  $TP$  vel  $7\pi$ , quod quærebatur. Si quis autem cupit, ut hæc exactius determinantur, computatio non est adeo difficilis, quin ut ipse adhibito calamo perficiat. Quod ad lentes utrinque concavas attinet, è jam ostensis facile constabit eas lucem trajectam in ejus extremitate cum Cæruleo tingere. Quæ vero de lentibus utrinque convexis vel concavis dicuntur, de convexo-concavis æquipollentibus sunt etiam intelligenda.

161. Sunt & alia phænomena, quæ de lentibus explicare possem. Sed cum Oculi pars interior (Humor nempe CrySTALLINUS ac Tunica Cornea) speciem lentis radios ad retinam congregantis referat, de ipsâ maluissem nonnulla dicere. Eorum tamen, quæ de lente jam explicui, nolo aliquid enixè repetere, cum ad oculum facile applicentur, utut expertu satis difficilia sint; propterea quod ægrè possumus efficere, ut oculi pars anterior & posterior ad invicem ita accedant, aut ab invicem recedant, sicut de lente & papyro lucem terminante descripsi. Quapropter radii ut plurimum eo modo in Retinam procidunt, quo posui terminatos esse in papyrum  $dl$ ; atque adeo, propter misturam dissimilium, quæ ab oppositis partibus pupillæ adveniunt, Colores mutuò delebuntur, & convertentur in Album; si Objectum quod intueamur sit album, aut

aut in illum quemlibet colorem, quocum Objectum tingitur, si-De Oculo. quidem ille tunc cæteris debet prævalere.

162. Cæterum ex hisce detegitur modus, quo omnia, quæ nudis oculis intueamur, possint ita tingi Coloribus, ac si Prisma interponeretur, licet multo minis manifestò. Idque si radii per alteram partem pupillæ transitori ab interpositione digiti, vel cujuslibet obstaculi, prope oculum intercipientur; dum radii ingressuri alteram partem liberè transire permittantur. Hujusce verò rei duos casus non pigebit explicare: alterum, cum radios intercipimus ad partes versus Objectum lucidius; posito nempe quòd Objecta duo, album & nigrum, juxta posita intueamur; & alterum, cum radios intercipimus ad partes versus nigrius. Sit (fig. 57.) ergo  $LB$  Objectum lucidum, &  $BD$  obscurum, quorum terminus communis sit  $B$ ; à quo radii in oculum,  $dl$ , juxta oppositas partes pupillæ,  $Ff$ , promanantes sint  $Bf$  &  $Bf$ ; radii autem secundum lineam  $BF$  in oculum pergentes, pro gradu refrangibilitatis, refringantur versus  $H$ ,  $r$  &  $K$ . E contra verò, qui pergunt in lineam  $Bf$ , refringentur versus  $K$ ,  $r$  &  $H$ , cæteraque gradatim intermedia loca, prout de lente modò explicui. Ponamus jam, quod  $e$  sit obstaculum, quo omnes radii prope  $f$  lapsuri intercipiuntur, prætermisiss  $Bg$ , & ejusmodi aliis, per  $F$  solummodo tendentibus; & constabit primò, quòd ex radiis à diversis partibus Objecti  $LB$  manantibus, qui veniunt à partibus versus  $L$  in retinam incidunt propius ad  $l$ , quam qui veniunt à partibus versus  $B$ , siquidem in pupillâ decussant. Et sic  $BD$  deberet radios versus  $Hr$  emitte. Sed cum illud  $BD$ , propter nigredinem, nullos pene radios in oculum jaculetur, retina  $ld$  non ultra versus  $d$  illuminabitur, quam ad  $H$ . Quinimo non ad  $H$  usque illuminabitur, nisi à radiis rubriformibus; Viridiformes enim terminabuntur in  $r$ , & Purpuriformes in  $K$ ; spatio  $LK$  à Purpuriformibus,  $lr$  à Viridiformibus, &  $LH$  à Rubriformibus illuminato. Quamobrem spatium  $LK$ , propter omnium radiorum misturam, albescet ad instar objecti  $BL$ ; sed in exiguo spatio  $HK$ , quod termino  $B$  respondet, Colores generabuntur; Rubeus quidem ad  $H$ , propter solos Rubriformes radios illuc tendentes; & Flavus ad  $r$ , propter misturam Viriditatis, Flavedinis ac Rubedinis. Jam, cum omnia videantur pro more imaginum, in oculum receptorum, constat Objectum  $LB$

DE OCULO. juxta extremitatem ejus B non distinctè cerni, sed coloribus Rubeo & Flavò tingi.

163. Ad eundem modum si transferatur obstaculum *eg*, & cæteris stantibus Objecto interponatur & oculo secundum adversas partes pupillæ, prout videre est ad *eg*; eo ut radii juxta *f* incipiantur, radiique *bf* in oculum præter *bg* ingrediantur: constabit è contra, quòd ex radiis à toto *BL* profilientibus Purpuriformes occupabunt spatium *h/*; Viridiformes spatium *r/*; & Rubri-formes spatium *k/*. Quare spatium *k/* ut prius albescens, color Violaceus jam debet apparere in *h*, & Cæruleus in *r*, & eapropter Objecti *LB* extremitas *B* jam aliis tingitur coloribus, Violaceo & Cæruleo.

164. Et ad eundem modum si duo quælibet Objecta, vel ejusdem Objecti diversæ partes juxta positæ, gradu lucis differant: etsi alterum non sit omninò nigrum, tamen Colores apparebunt in eorum communi termino; Rubeus quidem & Flavus cum obstaculum ad partes versus Objectum obscurius; Violaceus autem & Cæruleus, cum ad partes versus Objectum lucidius interponitur. Et ut paucis rationem denuo comprehendam, necesse est, ut radii ex unaquavis parte pupillæ Colores producant, cum radii ex adversa parte sistuntur, à quorum omnium mixtura oritur temperamentum Albedinis. An isthæc verò phænomena vulgò observantur, haud scio. Sane non sunt inventu nec expertu tam difficilia, nec ab iis, quæ Cartesius sub fine capituli undecimi de Meteoris edocuit, tam aliena, quin cuiquam potuissent occurrere; nisi fortè quòd Colores illi propter tenuitatem vix sint sensibiles. Experimentum itaque fiat per Objecta longinqua; quorum alterum sit nigerrimum, & alterum satis candidum ad feriendum sensum, sed non tantà luce resplendens, ut sensum obtundat, vel pupillam constringat. Nam hujusmodi effectus sunt eo magis manifesti, quo pupilla sit latior, & majori aperturâ radiis ingredientibus pateat.

165. Sunt & alii insigniores effectus, Irides nempe vel Coronæ, quales Cartesius circa Candelam quondam observabat, & in Meteoris explicuit. Et, cum illæ solent apparere, quando oculi figura aliquâ vi, extrinsecus illatâ, vitatur; necesse est, ut à curvaturâ aliquâ vel plicâ in tunicis ejus de novo formatâ oriantur.

CrySTALLINO

CrySTALLINO autem vis non imprimitur, nisi mediantibus humoribus, quibus undique cingitur; & cum Fluida facillimè cedent pressuris, humores illi vim quamlibet illatam ita per totam molem diffundent, ut CrySTALLINUM vix possunt inæqualiter premere, neque ideo figuram ejus vitare. Id enim experti sunt, qui aquis altè submerguntur; nam, etsi tota aquarum moles incumbat illis, pressuram haud sentiunt; quæ tamen foret maximè sensibilis, si corporum submerforum partes ita premerentur inæqualiter, ut figuras eorum violare conarentur. Restat ergo, ut ejusmodi Coronarum sive Iridum generatio vitiosis configurationibus Tunicæ Corneæ illatis tribuatur; idque eo magis, quòd radii maximam refractionem in exteriori ejus superficie patiantur, & proinde per leviora ejus vitia à recto tramite detorqueri possint. Utut non pernegem, quin iis, qui laborant oculis, rugæ aliquæ, propter humorum defectum aut excessum, in CrySTALLINI superficiebus, non minùs quàm in Tunica Corneâ, possint efformari. Nec non aliæ etiam colorum causæ possunt evenire; sed, cum earum infinita sit varietas, & illæ sint eminentiores, quæ à vitiosis Tunicæ Corneæ figuris petuntur, non gravabor earum aliquod specimen exhibere; unde cæterarum causæ facillè patebunt.

166. Notissimum est, quòd mollium partes non solum pressioni cedunt, in quas vis immediatè imprimitur, sed & aliæ etiam partes remotæ, prout vim partium immediatè pressarum sustinent. Et ipse nonnunquam observavi in laminis convexo-concavis, & ex materiâ medioeriter rigidâ confectis, quales ex coriis bubulcis in morem segmenti superficiei sphaericæ contundendo formari possunt, quòd, cum in meditullio seu vertice premuntur, non solum ibi cedunt tactui sed & undique; ad instar vallis annularem collem, depressæ vertici circumductum, comprehendentis, intus flectuntur; idque citius & magis manifesto, si sint paulo rigidiores juxta verticem quàm prope peripheriam. V. G. Sit *knu* (fig. 58.) lamina sphaericè convexo-concava, quæ circulari ejus extremitati tanquam basi incumbens, mole aliquâ planâ, & ad basem ejus parallèlâ, *AB*, prematur: & manifestum erit, quòd hæc lamina maximè cedit pressioni in vertice *n*, ubi ab incumbente mole primò contingitur. Sed in aliis etiam locis, ut in *λ* & *l*, possit etiam intus recedere, dum in locis intermediis, ut *m* & *μ*, partes

partes affurgunt. Atque hâc ratione configurationem acquirat haud diffimilem aquæ undulanti, puteolo  $n$  referente centrum undarum, & ripâ  $m$ ,  $\mu$  referente undarum primam valle  $\lambda$ ,  $l$  circumdatam. Et ad eundem modum possibile est, ut tres vel plures valles premendo descendant, quorum culmina internata sint, pluribus undis se invicem subsequenter consimilia. Et hujusmodi configurationes cessante pressione possunt aliquamdiu conservari, gradatim tamen evanescentes. Nam, ut primum pressio cessat, cavitas in  $n$  cessabit fortè, & partes ibi in convexitatem affurgent, & gradatim fient plus plusque convexæ, donec redeat figura, quam ante pressionem habuere; & sic cæterarum partium figuræ ad pristinum statum gradatim redibunt. Jam, cum Tunica Cornea ad modum præfatum convexo-concava sit, & mediocriter rigida, & circa medietatem ejus paulo crassior, & proinde rigidior quàm juxta peripheriam, & si quando figura ejus ab externâ pressione vitietur, probabile sit illam pressionem circa medietullium ejus maximâ ex parte contingere; itaque potest aliquando forsan accidere, quòd, cum premitur, non solum in apice cedat pressioni, sed quòd in pluribus etiam circulis apici concentricis parum ascendat, & alternis vicibus descendat. Et hujusmodi rugæ concentricæ possunt etiam ex defectu humorum, quo tunicæ flaccescunt, nec non ex aliis fortè causis accidere; & quantumvis exiguæ sint, possunt tamen radios ad alias atque alias partes Retinæ refringere, & sic efficere, ut alii atque alii colorum circuli appareant. Sed ut videamus, quo pacto ex hujusmodi rugis colores generari debent; ponamus radios è longinquo manantes, sive parallelos, in superficiem  $kx$  (fig. 59.) ita, ut dictum est, intortam, & in eâ refractos sibi deinde ab aliâ opacâ superficie  $EF$ . Et, cum hujus superficiem partes depressoires radios ad puncta remotiora congregent, quàm partes ascendentes sive magis acclives; ponamus, quòd radii circa medietullium ejus  $m\mu$ , ubi maximè deprimitur, congregantur ad  $g$ ; quòd à partibus  $l$  &  $\lambda$  maximâ acclivitate surgentibus congregantur ad  $i$ ; & sic quòd à partibus  $k$  &  $x$ , ubi rursus deprimitur, congregantur ad  $h$ , & quòd ab intermediis partibus congregantur ad intermedia puncta. Ductis ergo  $mg$  &  $\mu g$ ,  $li$  &  $\lambda i$ ,  $kh$  &  $xh$ , occurrentibus superficiem, seu obstaculo,  $EF$  in punctis  $r$  &  $\rho$ ,  $\pi$  &  $p$ ,  $R$  &  $P$ ; nec

nec non axe  $GHI$  occurrente eidem  $EF$  in puncto  $o$ , ut & refringenti superficiem  $kx$  in puncto  $n$ ; & posito quòd ista  $EF$  interjaceat punctis  $h$  &  $i$ ; manifestum erit perpendenti refractiones hujus  $kx$ , in singulis ejus punctis à centro  $n$  successivè ad extremitates  $k$  vel  $x$ , quòd radii, prout longius ab  $n$  versus  $m$  per refringentem superficiem trajiciuntur, incidunt in obstaculum  $EF$  longius ab  $o$  versus  $r$  adusque certum terminum; puta dum ad radium  $mr$  deventum est: deinde quòd, factò regressu, incidunt propius ad  $o$ , & postea ad alteras ejus partes pergant, donec iterum fiat elongatio maxima; velut in  $p$ , cum deventum est ad radium  $pp$ : tum denuo revertuntur radiorum concursus, idque continuo, prout ab  $l$  versus  $k$  procedit refractione; donec tertio terminentur quemadmodum in  $R$ , occurru radii  $kR$ . Ad eundem modum lux inter  $n$  &  $x$  refracta terminabitur in punctis  $\rho$ ,  $\pi$ , &  $p$ . Atque etiam, si plures essent rugæ, plures forent lucis terminationes. Cæterum de luce per spatium  $r\rho$  diffusâ, cum causa, quòd extra vagatur punctum  $o$  usque ad terminos  $r$  &  $\rho$ , sit ejus parva refractione prope  $m$  &  $\mu$ ; sequitur, quòd radii minùs refrangibiles, hoc est Rubriformes, debent magis extravagari, & proinde terminus lucis  $r$  vel  $\rho$  debet Rubedine tingi. Et sic de luce per spatium  $\pi p$  diffusâ, cum causa, quòd extravagatur punctum  $o$  usque ad terminos  $p$  &  $\pi$ , sit ejus nimia refractione prope  $l$  &  $\lambda$ ; sequitur, quòd radii magis refrangibiles, hoc est Purpureum & Cæruleum pingentes, debent longius deviare, & colores eorum in exteriori parte termini  $p$  &  $\pi$  depingere; unde in interiori ejusdem termini parte Rubriformes radii ad suos etiam colores depingendos debent prævalere. Et simili ratione radii circa  $k$  &  $x$  refracti, si sint Rubriformes, tendent ad exteriorem partem termini  $R$  &  $P$ , & ad interiorem, si sint Cæruleiformes. Et sic tres habebuntur irides;  $RP$  extra Rubea & intra Cærulea;  $p\pi$ , extra Cærulea & intra Rubea;  $r\rho$ , extra Rubea, quæ etiam debet esse intra Cærulea; nisi fortè, quòd color ille à rubeo propter parvitatem refractionis in  $\mu$  &  $m$ , haud satis cernitur, ut fiat sensibilis; & propterea quòd multum obscuratur à copiâ lucis undique per  $ro\rho$ , locum imaginis lucidæ, quam cingunt Irides sparsæ. Harum verò Iridum formæ & relationes inter se possunt variis modis mutari, idque non tantum è variis formis, quas superficies  $kx$  possit induere, sed etiam è variis

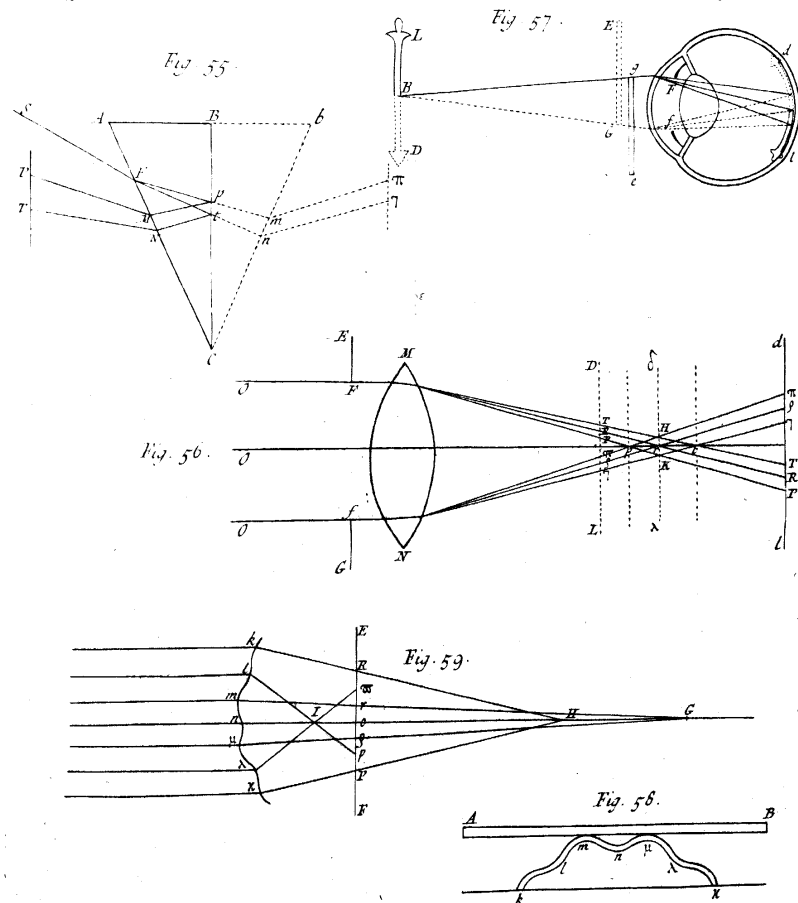


DE IRIDE.

è variis distantis inter hanc  $kx$  & obstaculum  $EF$ . Ut, si statuantur paulo magis distantes, quàm designavi, circuli  $RP$  &  $\pi p$  possunt coincidere, & mutuos colores delere, coeuntes in albicantem circumulum. Sin magis adhuc distent, Iris  $\pi p$  cadet extra iridem  $RP$ . Quòd si  $EF$  statuatur ad locum  $I$ , hæc Iris  $p\pi$  evanescet, & potest etiam coincidere cum Iride  $rp$ , si  $EF$  paulo ultra vel citra locum  $I$  statuatur. Jam verò horum omnium ad oculum facilis est applicatio, posito quòd obstaculum  $EF$  fundum ejus referat, &  $kx$  Tunicam Corneam ab externâ vi, aut interno aliquo vitio, perperam curvatam. Quinetiam ex his non modò generalis causa harum Iridum declaratur, sed pro quibuscumque ejusmodi particularibus apparentiis causæ etiam particulares assignari possent videntur. Quemadmodum, si cui fax appareat unicâ tantum Iride cincta, cujus pars exterior rubet, interior verò vel alba, vel fortè nonnihil cærulea appareat; exinde concludi possent videtur, quòd cornea circa medietatem ejus sit paulo depressior, quàm solet esse sine aliquâ rugâ, qualem ad  $\lambda$  descripsi. Efficit enim illa depressio, ut radii ab eodem puncto Objecti venientes ad puncta longè post retinam conveniunt; & qui proinde in retinâ spatium aliquod, quale est  $rop$ , occupabunt, cujus peripheria (ut modo ostendi) Rubeo colore ad exteriorem ejus partem tingetur, & Albo vel dilutè Cæruleo ad interiorem. Et quo major hujusmodi Iris appareat, eo magis ad interiorem ejus partem debet Cæruleo tingi. Potest etiam hujusmodi Iris propter annularem rugam accidere, modò Tunicæ Corneæ figura in meditullio non simul vitietur.

167. Quod si duæ Irides appareant, illud ex utrâque causâ conjunctâ petendum est; corneâ nempe tum in medio, tum juxta peripheriam pupillæ, depressâ. In cujus rei illustrationem adhibeamus casum, quem Cartesius de se ipso in Meteoris Cap. ix. ad hunc modum describit. “Cum noctu, inquit, navigarem, & totâ illâ vesperâ caput cubito innisus, manu oculum dextrum clausissem, altero interim versus cœlum respiciens, candela ubi eram allata est; & tunc aperto utroque oculo, duos circulos flammam coronantes aspexi, colore tam acri & florido, quàm unquam in arcu cœlesti me vidisse memini. AB (fig. 60.) est maximus, qui ruber erat in A, & cæruleus in B: CD minimus, qui etiam ruber in C, sed albus versus D, ubi ad flammam

Tab. X.



“mam usque extendebatur. Oculo dextro postea iterum clauso, DE IRIDE.  
 “notavi has coronas evanescere; & contrà illo operto & sinistro  
 “clauso permanere. Unde certo cognovi illas non aliunde oriri,  
 “quàm ex novâ conformatione vel qualitate, quam dexter ocu-  
 “lus acquisiverat, dum ipsum ita clausum tenueram; & propter  
 “quam non modò maxima pars radiorum, quos ex flammâ ad-  
 “mittebat, ipsius imaginem in o, ubi congregabantur, pingebant: sed etiam nonnulli ex iis ita detorquebantur, ut per totum spatium  $r_2$  spargerentur, ubi pingebant coronam  $cd$ , & nonnulli alii per totum spatium  $rp$ , ubi coronam  $ab$  etiam pingebant.” Cùm itaque Cartesius hæc viderit, postquam per totam vesperam cubito innixus erat, rugæ, quales explicui, potuerunt imprimi; unde necesse erat ejusmodi coronas apparere: & quòd tres coronæ non apparebant, illâ scilicet non apparente cujus partem anteriorem cæruleam esse descripsi, & partem posteriorem rubeam, id ex eo venire debuit, quod radii in  $\lambda$  &  $\lambda$  refracti, ex quibus hanc coronam generari deberet, haud citius quàm ad retinam convergebant, aut potius non tam cito. Non enim probabile videtur, quòd Tunicae Corneæ pars aliqua ab externâ pressione possit fieri solito convexior; & nisi hoc eveniat, radii illi non possunt citius quàm ad retinam convenire. Illa verò tertia corona non potest apparere, nisi citius (ut ad  $r_1$ ) conveniant. Si longè ultra convergant, coronam tunc quidem deberent efficere, sed cujus pars exterior rubesceret, & tunc tres coronæ in posteriore eorum parte rubeæ conspicerentur. Sed in hisce videar nimius, præsertim cùm tanta causarum varietas non solum à Tunica Corneâ, sed Humore CrySTALLINO, & aliunde etiam peti possunt; ut haud sit difficile plures assignare, quæ eisdem quolibet effectus diversis temporibus producant. Nescio tamen, an operæ pretium sit annotare causam radiorum à lucidis corporibus hinc inde, ad instar trabium in longum prætenfarum, cùm oculis pænè clausis aspiciamus. Nempe humiditas, quæ inter cilia & Tunica Corneam versatur, secundum extremitates ciliorum parum affurgit. Sicut aqua vasi imposita altius affurgit, ubi à vase terminatur, quàm alibi; quo pacto fit, ut aliqui radii ab hac humiditate prius refringantur, quàm attingant Tunica Corneam, & sursum

De Arcu sursum detorqueantur in confinio superioris cillii, ac deorsum in confinio inferioris.

168. Supereſt jam mirum illud Cæleſtis Arcûs ſpectaculum, ad cujus explicationem Cartefius viam ſtravit. Huic enim debetur, quòd in guttis aquæ pluvialis decidentibus efformari cognoviſimus. Quemadmodum ex eo conſtat, quòd nunquam videtur niſi cœlo pluente; quòd Sole pluviam decidentem illuſtrante in vicis nonnunquam apparuit, quaſi non in cœlo collocatus, ſed in Aere vicino, ſuper oppoſitarum domuum parietibus affixus, vel potius interjectus; quòd aqua per artificium aliquod ſparſim ejaculata Iridem oſtendit; & quòd gramen rore matutino, quaſi guttulis minutiffimis, conſperſum colores etiam Iridis exhibet. Huic etiam debetur ingenioſiſſima de Refractionibus guttæ & earum limitibus inventio, ſed cauſam phyſicam minus feliciter aggreſſus eſt. Hanc itaque ut intelligatis, concipite radium AN (fig. 61.) in globum NFG ad N incidere, & inde verſus F refringi, ubi ruruſus vel refringetur verſus v, vel forte refleſcitur ad G. Et ſi poſterius eveniat, tunc iterum in G vel refringitur ad R, vel refleſcitur ad H, & ſic deinceps; ita ut radiis globum ingredientibus aliqui, ut NFV, ſtatim egredientur, nullam reflexionem paſſi; alii, ut FGR, poſt unam reflexionem; & alii, ut GHS, poſt duas; aliique poſt tres vel etiam plures. Jam verò, cùm guttæ pluviales reſpectu diſtantiæ ab oculo ſpectatoris, ſint admodum exiguæ, ut phyſicè pro punctis haberi poſſint, non opus eſt, ut earum magnitudines omnino conſideremus, ſed angulos tantum, quos incidentes cum emergentibus radiis comprehendunt: nam, ubi anguli illi ſunt maximi vel miniimi, emergentes radii ſunt ſolito conſertiores; &, quia diverſis radiorum generibus diverſi competunt anguli maximi vel miniimi, ſingula ad diverſas plagas conſertiffimè tendentia in iſdem prævalebunt ad colores proprios exhibendos. Anguli itaque maximi vel miniimi, quos ſingulorum generum emergentes radii cum incidentibus poſſunt conſtituere, determinandi ſunt, ut horum phænomenon rationes rectè percipiamus.

169. Scilicet in Corol. 1 & 2. Prop. xxxv. oſtenſum eſt emergentem radium GR ad incidentem AN maximè inclinari, cùm ſit  $3RR. II - RR :: CNq. NDq$ ; et  $I. 2R :: ND. NE$ : poſito nempe 1 ad

ad R ut ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis; & ex hinc inven-  
tis ND & NE, dabitur poſitione GR.

170. Sit, exempli gratiâ, pro radiis maximè refrangibilibus ſinus incidentiæ ad ſinum refractionis, ſive 1 ad R, ut 185 ad 138, prout in aquâ pluviali proximè comperi; & erit 57132.  $15181 :: (3RR. II - RR ::) CNq. NDq$ ; adeoque  $DN = \sqrt{\frac{15181}{57132}} \times CN = \frac{5155}{10000} CN$ . Unde per Tabulam Sinuum datur arcus NL 62 grad. 4 min. Præterea, cùm ſit  $I. 2R :: ND. NE :: 185.276 :: \frac{5155}{10000} CN. NE$ ; erit  $NE = \frac{7691}{10000} CN$ . Et inde etiam per Tabulam Sinuum datur arcus NF, 100 grad. 32. min. Subduc jam duplum arcûs NF ex aggregato arcûs NL & 180 grad. ſive ſemicirculi, & reſtabit 41 grad. 0 min. pro inclinatione radii RG ad radium AN, ſive pro angulo AXR; productis nempe AN & NG donec in x convenient. Et hic angulus eſt, ſub quo intimus ſive cæruleus limbus Iridis hujus apparere debet, ſive minima ejus ſemidiameter.

171. Ad eundem modum pro radiis minimè refrangibilibus, poſito ſinu incidentiæ ad ſinum refractionis ut 182 ad 138, uti dimenſus ſum, invenietur  $ND = \frac{5028}{10000} CN$ , &  $NE = \frac{7531}{10000} CN$ ; indeque per Tabulam ſinuum arcus NL erit 60 grad. 22 min. & arcus NF 98 grad. 38 min. Adeoque angulus AXR 43 grad. 6 min. ſub quo extimus ſive Rubeus hujus Iridis limbus apparebit. Itaque maxima ejus ſemidiameter eſt 43 grad. 6 min. A quâ ſi auferatur minima ſemidiameter, 41 grad. 0 min. emergit iridis craſſities 2 grad. 6 min. circiter, vel potius 2 grad. 37 min. additâ diametro ſolis 31 min. Sed cùm colores in extremitatibus ad utrumque limbum debiliores ſint, quàm quo propter nubium conterminarum ſplendorem videri poſſunt, ſenſibilis ejus craſſities duos gradus vix excedet.

172. Haud ſecus determinantur exterioris Iridis diſenſiones. Nam oſtenſum eſt in Corol. 1 & 2. Prop. xxxvi. emergentem radium HS ad incidentem AN minimè inclinari, cùm ſit  $8RR. II - RR :: NCq. NDq$ ; et  $I. 3R :: ND. NE$ . Quamobrem pro radiorum maximè refrangibilium ſinibus, 1 & R, ſubſtitutis numeris 185 & 138 ut ſuprà, obtinebuntur  $ND = \frac{7115}{10000} CN$ , &  $NE = \frac{7064}{10000} CN$ ; & inde per Tabulam Sinuum arcus NL, 36 grad. 48 min. & arcus NF, 89 grad. 53 min. Atque adeo angulus AYS = 52 grad. 51 min. qui erit maxima ſemidiameter Iridis hujus. Et ſimiliter

**De Arcu** pro radiorum minimè refrangibilium sinibus, I & R, substituendo numeros supra positos, 183, 138, emergent  $ND = \frac{3079}{10000} CN$ , &  $NE = \frac{6965}{10000} CN$ . Unde per Tabulam Sinuum eliciuntur arcus NL, 35 grad. 52 min. & arcus NF, 88 grad. 18 min. Adeoque angulus AYS erit 49 grad. 2 min. Iridis nempe minima semidiameter. Quamobrem si à maximâ semidiametro 52 grad. 51 min. auferatur minima 49 grad. 2 min. & residuo addatur diameter solis 31 min. emerget hujus Iridis crassities, 4 grad. 20 min. Sed propter majorem hujus quam interioris Iridis obscuritatem, colores vix ultra crassitiem trium graduum, vel trium & semissis, videri posse conjicio.

173. Jam verò, ut harum Iridum rationes conspectui distinctè exhibeam, sunt E, F & G guttæ per aerem utcunque sparsæ; SE, SF, SG radii solares parallelè incidentes in guttas; EM, EN & EO radii, diversè refrangibiles, è guttâ E post unam reflectionem emergentes; atque FN, FO, FP, & GO, GP, GQ consimiles radii emergentes è guttis F ac G; nempe EO, FP, GQ maximè refrangibiles, & EM, FN, GO minimè refrangibiles, &c. Jam si spectantis oculus ad O consistat, ex hypothese manifestum est, quod è radiis, quos gutta E post unam reflexionem emittit, soli maximè refrangibiles, seu cæruliformes, quales EO, impingant in oculum; reliquis ut in EN & EM, propter minorem refractionem, præterlabentibus. Et proinde Cæruleus color ad E conspicietur. E radiis autem, quos gutta G post unam reflectionem emittit, maximè refrangibiles, quales GQ, præteribunt oculum, propterea quod radio EO paralleli sunt, & alterius generis radii, puta minimè refrangibiles, seu Rubriformes, quales GO, in eum impingent; unde Rubor apparebit in G; & simili discursu gutta F, in medio inter E ac G posita, radios mediocriter refrangibiles, ut FO, in oculum immittet, reliquis ut FN, FP utrinque præterlabentibus: indeque Viriditas cernetur ad F. Eadem est ratio guttarum omnium ad easdem cum his guttis apparentes distantias ab axe OR, qui per Solem & oculum transit, positarum; & proinde ad distantias illas colores undique apparebunt; hoc est, arcus variegatus, cujus interior limbus Cæruleo, exterior Rubro, & mediæ partes mediis coloribus tingantur; existente angulo OGQ, five GOE, hoc est, latitudine arcus, duorum circiter graduum, juxta ea, quæ jam antè ostendi;

ostendi; estque similis discursus de arcu exteriori, nisi quod ordo CÆLESTI. colorum, propter contrariam radiorum inflexionem, contrarius evadat. Guttæ autem, quæ extra hos arcus ex unâ parte sitæ sunt, radios omnino nullos post unam vel duas reflexiones, duasque refractiones, in oculum immittent; ex alterâ autem parte, omnigenos permixtos; eosque ferè insensibiles, & proinde nulla hujusmodi phænomena exhibere possunt, sed cælum in illis locis colore solito apparebit.

174. Præter phænomena Colorum, de quibus egimus, sunt adhuc alia haud pauca (præsertim circa Colores pertenuium lamellarum pellucidarum, quales sunt bullarum aquosi orbes, & aer intra vitra duo compressus, multarumque rerum cuticulæ pertinues) quorum causa & mensura absque ratiociniis mathematicis vix possunt accuratè determinari: sed in hisce videor nimius fuisse, & proinde jam ad partes Matheseos magis abstractas me convertere decrevi.

## FINIS LECTIIONUM OPTICARUM.

## PROBLEMA

## CORRIGENDA IN CONTEXTU.

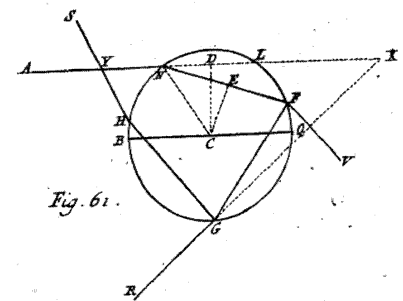
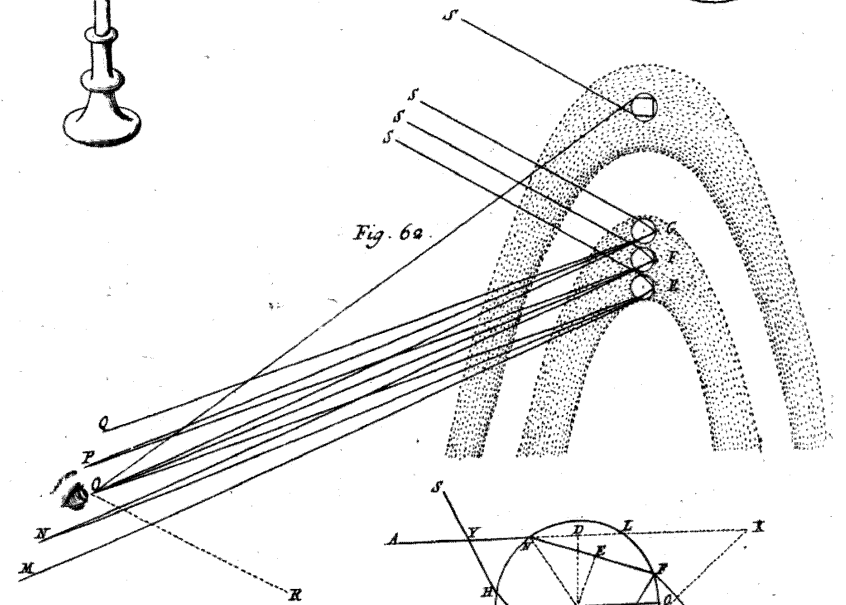
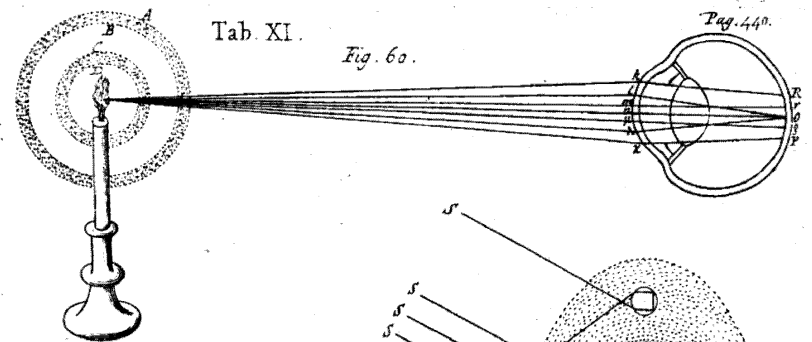
Pag. 85, lin. 23 & 28, pro 9,0827667, lege 9,0827646.  
 P. 109, lin. 15, pro *diameris*, lege *femidiametris*.  
 P. 281, lin. 3, pro *ad fig. 16*, lege § 31.  
 P. 359, lin. ult. pro *et C*, lege *etc.*  
 P. 371, lin. 10, pro *illt*, lege *illi*.

## I N N O T I S.

Pag. 7, lin. 1, pro *Saturni Cassio*, lege *Saturni à Cassio*.  
 P. 88, lin. 4, pro 9,0827667, lege 9,0827646.  
 lin. 5, pro 0,09917970, lege 0,09917950.  
 P. 89, lin. 5, pro 0,101768369, lege 0,101768349.

## IN LIBRO DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

P. 8, lin. 23, pro *Ci<sup>2</sup> et area*, lege *Ci<sup>2</sup>; et area*.  
 P. 12, lin. 7, pro *veniet*, lege *veniat*.  
 lin. 28, pro *quàm*, lege *quam*.  
 P. 16, lin. 23, 25, 37, 39, pro *X*, lege *x*.  
 lin. 39, pro *CV major*, lege *CV (fig. 10) major*.  
 P. 22, ad initium lin. 13, pro *mo*, lege *angulo qta ultimè*.  
 P. 38, lin. 6, pro *quadratum*, lege *quadraturam*.  
 P. 39, lin. 3, pro *rectam CD*, lege *rectam CD (fig. 18.)*  
 lin. 24, dele (*ex construct.*)



SAMUELIS HORSLEII

DE

VIRIBUS CENTRALIBUS

QUÆ

RATIONEM TRIPLICATÆ DISTANTIARUM A CENTRO

CONTRARIAM INTER SE CONSTANter SERVANT

LIBER SINGULARIS.

VOL. II.

\*A

## PROBLEMA GENERALE.

**C**URVAM definire per quam corpus quodpiam deferatur, quod è dato puncto, secundam rectam positione datam, datâ cum velocitate emissum viribus deinceps incitetur, quæ datum aliquod centrum respiciant, et proportionem triplicatæ distantiarum à centro contrariam inter se constanter servant.

Hujus Problematis sunt partes duæ; prout vires centrales ex earum genere sint quæ appetentiam centri, vel ex earum quæ fugam, corporibus inducant. Harum partium prima multifariam distribuenda est, pro vario velocitatis gradu, quâcum corpus è dato loco projectum fuerit, illius utique ratione habitâ, quam corpus quodpiam aliud, iisdem viribus centralibus incitatum, casu recto à distantis infinitis adeptum esset.

### PARS PRIMA.

Primum centripetæ sint vires centrales. E dato loco  $v$  (vid. fig. 1.) secundum rectam  $ve$  positione datam, emissum puta corpus quoddam datâ cum velocitate. Oportet Curvam definire per quam corpus illud deferatur, si viribus urgeatur quæ centrum  $c$  respiciant, et proportionem inter se servant triplicatæ distantiarum à centro contrariam. Factum puta, et sit  $vk$  curva illa quam definiendam suscepimus. Velocitas quâcum corpus è loco  $v$  exierit, vel eadem erit quam corpus quodpiam aliud, urgentibus iisdem viribus centripetis, casu recto à distantis infinitis locum usque  $v$  adeptum fuerit, vel minor illâ majorve erit.

### PARTIS PRIMÆ CASUS PRIMUS.

Primum eadem sit velocitas quâcum corpus per orbitam  $vk$  delatum è loco  $v$  exierit, quam corpus aliud casu recto, à distantis infinitis locum usque



PARS PRIMA.  
CASUS  
PRIMUS.

que v, adeptum fuerit. Jungatur cv, et figura ad analysin construat, qualem ad analysin generalem Problematis xxviii. Libri Primi Principiorum in Notâ (i) lineavimus. In hac figurâ (fig. 1) data recta cv designetur literâ a, indefinita cd literâ y. Rectæ autem cv, five a æqualis sit recta vl. Jam cum ea sit natura Curvæ lf, ut vl sit ad df ut vis centralis in loco v ad vim centalem in loco d (Prop. xxix. Lib. i. Princip.) hoc est ut cubus ex cd ad cubum ex cv, idcirco erit  $df = \frac{cv^3}{cd^3} vl = \frac{a^3}{y^3}$ .

Erit autem  $df \times -y$ , fluxio areæ vlfd, hoc est  $\frac{a^3}{y^3} \times -y = -\frac{a^3}{y^2}$ .

Quare cum spatium  $\frac{a^3}{y^3}$  sit fluens hujus fluxionis  $\frac{a^3}{y^3} \times -y$ , area curvæ lf,

ad ordinatam mobilem df terminata, aut æqualis erit spatio  $\frac{a^3}{2y^2}$ , aut eo major minorve dato. (Geometr. Flux. Th. II.) Crescere intelligatur infinitè recta y. Area quidem curvæ lf ultimò in nihilum abierit. Area enim illa in nihilum tunc abierit, cum punctum d ibi situm fuerit, ubi corporis rectâ cadentis velocitas nulla sit; five ibi loci unde corpus illud rectâ cadere ocepit. Illud verò à distantis infinitis cecidit. Rectâ igitur cd, five y, infinitè crescente, area curvæ lf, ad ordinatam mobilem df terminata, ultimò in nihilum abierit. Sed et spatium  $\frac{a^3}{2y^2}$  (datâ utique a) ultimò in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt area curvæ lf et spatium illud  $\frac{a^3}{2y^2}$ . Differant enim, si fieri possit, dato; quod nota d' designet; ut sit area curvæ lf  $\pm d' = \frac{a^3}{2y^2}$ . Jam rectâ y infinitè crescente, et a-

rectâ curvæ lf ultimò in nihilum abeunte, spatium illud  $\frac{a^3}{2y^2}$  dato d' vel æquale erit ultimò, vel dato d' auctum nihilo ultimo æquale fiet. Si primum, fiet ultimo  $d' : a' = a' : 2y^2$ , et  $d' : \sqrt{\frac{1}{2}a'^2} = a' : y$ . Data igitur a ad rectam y datam ultimò rationem habet. Dabitur igitur rectæ y ultima quædam magnitudo, neque ultimò ea infinita erit, quam tamen infinitè crescere posuimus: quod est absurdum. Non igitur primum illud obtinet, spatium  $\frac{a^3}{2y^2}$  dato esse ultimò æquale. Sin verò alterum, ut sit ultimò  $\frac{a^3}{2y^2} + d' = 0$ ,

erit ultimò  $a' + 2y^2 d' = 0$ , atque rursus  $y^2 + \frac{a'^2}{2a^2} = 0$ . Hoc est, quadratum ex infinitâ y, spatio dato  $\frac{a^3}{2y^2}$  auctum, nihilo æquale erit: quod est absurdum.

Neutrum igitur eorum obtinebit, quorum alterum, ex eo quod area curvæ lf à spatio  $\frac{a^3}{2y^2}$  dato abesset, necessariò effici ostendimus. Non igitur dato differunt area curvæ lf spatiumque  $\frac{a^3}{2y^2}$ . Erunt igitur inter se æqualia.

Hinc efficietur  $uq^2 = \frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}cv^2$ .

Et  $rs' = \frac{a'}{y^2} = \frac{cv^2}{y^2}$ .

Sed

Sed  $st = \frac{q^2}{y}$  (Princip. Lib. I. Sect. viii. (Not. f.) Ergo  $st^2 = \frac{2q^4}{2y^2} = \text{ANALYSIS.}$   
 $\frac{2cv^2 \times qw^2}{2y^2}$ .

Hinc  $rt^2 = rs^2 - st^2 = \frac{cv^4 - 2cv^2 \times qw^2}{2y^2} = cv^2 \times \frac{cv^2 - 2qw^2}{2y^2}$ .

Hoc est, propter  $cv^2 = 2uq^2$  (id enim ostensum)  $rt^2 = cv^2 \times \frac{uq^2 - qw^2}{y^2} = cv^2 \times \frac{uw^2}{y^2}$ . Quare  $rt = \frac{cv \times uw}{y}$ .

Sed  $db = \frac{q^2}{2rt}$ . Et  $dc = \frac{cv^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2rt}$  (per formulas generales Not. f, Sect. viii. Lib. I. Princip.) Quare  $db = \frac{q^2 \times y}{2cv \times uw}$  et  $dc = \frac{cv \times q^2}{2uw \times y}$ . Hoc est, si pro

$q^2$  scribatur  $cv \times qw$ ,  $db = \frac{qw \times y}{2uw}$ .  $dc = \frac{cv \times qw}{2uw \times y}$ . Vel denique si capiatur recta q, cujus quadratum ad quadratum ex cv rationem habeat eam quam qw ad 2uw, efficietur  $dc = \frac{q^2}{cd}$ , five  $cd \times dc = q^2$ . Sed, propter rectas vw, qw, cv magnitudine datas, dabitur illa q magnitudine; ac propterea quadratum ex q magnitudine datum est. Rectangulum igitur cd  $\times$  dc magnitudine datum. Recta autem cd positione data, punctumque c datum. Ea enim posuimus. Curva igitur acx ad quam est punctum c Hyperbola erit æquilatera, cujus centrum erit c, Asymptotæ recta cd, axes verò eâ magnitudine præditi, ut quadrata ex dimidiis duplo quadrati ex q singulatim æqualia sint. Datâ igitur vd, dabitur area vdc, atque huic æqualis sector vcx, per quadraturam hyperbolæ. Datus igitur angulus vcx. Quare recta cx positione data. Datâ autem vd, dabitur magnitudine cd, et illi æqualis ci. Punctum igitur i dabitur in tramite corporis curvo; assumptisque distantis aliis alia lineæ vik definiantur puncta. Q. E. I.

#### COMPOSITIO CASUS I. PARTIS I.

A centro c in rectam vg (fig. 2) demittatur ad perpendicularum recta ch. Capiatur cm, quæ sit ad cv ut ch ad hv. Duarum cv, cm, capiatur cn <sup>COMPOSITIO.</sup> proportionem media. Centro c, semiaxe transverso cn, scribatur Hyperbola æquilatera enf, cujus Asymptotæ sint rectæ co, cp. In harum alterutrâ, puta co, capiatur ca rectæ cv æqualis, & à puncto a educatur ad perpendicularum recta ab, quæ hyperbolæ in b occurrat. In eadem Asymptotâ, Co, capiatur quævis Cd illâ Ca minor, et à d ad perpendicularum educatur dc, quæ hyperbolæ in c occurrat, junganturque Cb, Cc. Jam centro C, radio Cv, scribatur circulus vxa, cujus capiatur sector, vcx, sectori hyperbolico bCc æqualis. Et in rectâ cx capiatur ci æqualis rectæ Cd. Curva, lico bCc æqualis. Et in rectâ ci capitur i, ea erit per quam, urgentibus ad quam positum est perpetuò punctum i, ea erit per quam, urgentibus viribus quales posuimus centripetas, corpus quodpiam deferetur, quod è dato loco v, secundum rectam vg, eâ cum velocitate fuerit emissum, quam corpus

Pars Prima. corpus aliud iisdem viribus centripetis incitatum, rectâ cadendo à distantiiis  
 Casus. infinitis, in loco v adeptum fuerit.  
 Primus.

## DEMONSTRATIO.

In figurâ primâ capiatur recta  $cd$  æqualis rectæ  $cd$  in figurâ secundâ;  $cd$  igitur minor erit quàm  $cv$ , et circulus centro  $c$ , radio  $cd$ , descriptus curvam  $vk$  secabit. Secet in  $i$ , et maneant omnia, in figurâ illâ primâ, quæ jam antè lineavimus. Sector hyperbolicus  $cCb$  (fig. 2) trapezio hyperbolico  $badc$  æqualis erit. (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. xv.) Sectori autem hyperbolico  $cCb$  sector circularis  $vcx$  factus est æqualis. Quamobrem sector circularis  $vcx$  trapezio hyperbolico  $badc$  æqualis erit. Sed et sector circularis  $vcx$  (fig. 1) trapezio hyperbolico  $avdc$  æqualis erat. Trapezia autem hyperbolica  $badc$  (fig. 2),  $avdc$  (fig. 1) sunt inter se æqualia. Id enim sic ostendo. In triangulis  $cvh$ ,  $quw$ , anguli  $cvh$ ,  $quw$  sunt inter se æquales. Anguli etiam  $chv$ ,  $quv$  inter se æquales, quippe qui sunt recti. Triangula igitur inter se similia erunt, et  $vh$  erit ad  $hc$ , ut  $uw$  ad  $wq$ . Est autem  $zuw$  ad  $wq$  ut quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $q$ . Ita enim factum est. Quare  $uw$  erit ad  $wq$  ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadrati ex  $q$ . Rursum (fig. 2)  $cv$  est ad  $cm$  ut  $vh$  ad  $hc$ ; ita enim factum est. Sed cum  $cn$  duarum  $cm$ ,  $cv$  proportionem sit media, erit quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $cn$  ut  $cv$  ad  $cm$ . Quare quadratum ex  $cv$  est ad quadratum ex  $cn$  ut  $vh$  ad  $hc$ . Sed ostensum est quadratum ex  $cv$  esse ad duplum quadrati ex  $q$  ut  $uw$  ad  $wq$ ; necnon  $uw$  esse ad  $wq$  ut  $vh$  ad  $hc$ . Quadratum igitur ex  $cv$  ad quadratum ex  $cn$  eandem quam ad duplum quadratum ex  $q$  proportionem habet. (El. v. 11.) Quadratum igitur ex  $cn$  duplo quadrato ex  $q$  æquale erit. (El. v. 9.) Sed quadratum ex semiaxe hyperbolæ æquilatæ  $adc$  (fig. 1) duplo quadrati ex  $q$  ostensum est æquale. Est autem  $cn$  (fig. 2) semiaxis hyperbolæ æquilatæ  $fnc$ . Hyperbolarum igitur  $fnc$ ,  $adc$ , quarum utraque est æquilatera, harum semiaxes, cum quadrata habeant æqualia, ipsi quidem inter se æquales erunt. Quamobrem, cum in asymptotâ hujus,  $adc$ , acceptæ sunt  $cv$ ,  $cd$  illis  $ca$ ,  $cd$  in asymptotâ alterius,  $fnc$ , singulatim æquales, idcirco trapezia hyperbolica,  $badc$ ,  $avdc$ , sicut modò asseveravimus, erunt inter se æqualia. Sectores igitur circulares  $vcx$ ,  $vcx$ , qui trapeziis illis singulatim sunt æquales, etiam inter se æquales erunt. Anguli igitur  $vcx$ ,  $vcx$  inter se æquales. Rectæ autem  $ci$ ,  $ci$  inter se æquales: nempe cum illa rectæ  $cd$ , hæc verò rectæ  $cd$  æqualis; & illæ  $cd$ ,  $cd$  inter se factæ fuerint æquales. Simili argumentatione Curvarum,  $vi$ ,  $vi$ , radii omnes, qui cum primariis illis,  $cv$ , angulos æquales faciant, ostendentur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes et æquales erunt, et in hoc Casu Primo Partis Primæ compositio nostra rectè se habet. Q. E. D.

De Naturâ Curvæ  $vi$ , perfectâque ejus Figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus spatia corpora absolvant.

Sector hyperbolicus  $bCc$  logarithmus est rationis rectæ  $Ca$  ad rectam  $Cd$ . (Hamilton. Conic. Lib. 4. Prop. xv. Cor.) Quare sector circularis  $vcx$ , cum

cum illi hyperbolico æqualis sit, ejusdem rationis logarithmus erit; five Spiræ Logarithmicæ Figuræ. ejus quam recta  $cv$  habet ad rectam  $ci$ ; nimirum cum rectæ  $cv$ ,  $ci$  illis  $ca$ ,  $cd$  æquales sint. Hinc liquet curvam  $v/c$  Spiram esse quam vocant logarithmicam. Quod si in Hyperbolæ asymptotâ  $co$  capiatur  $cj$  illâ  $ca$  major, eductâque à puncto  $d$  ad perpendicularum rectâ  $dn$ , quæ hyperbolæ in  $n$  occurrat, si  $cn$  jungatur, tum si sectori hyperbolico  $bCn$  æqualis fiat sector circularis  $vcx$ , eâ vero lege, ut sector ille  $vcx$  ad partes rectæ  $vc$  constituatur earum contrarias, ad quas positus est sector  $vcx$  sectori hyperbolico  $bCc$  æqualis, ideo scilicet quia puncta asymptotæ  $d$ ,  $d$  ad contrarias partes sunt puncti  $a$ , punctaque item hyperbolæ  $c$ ,  $x$  ad contrarias partes puncti  $b$ ; denique si in rectâ  $cx$  capiatur  $c$ , rectæ  $cd$  æqualis, punctum erit ad Spiram  $cv$ , ad distantiam utique majorem, quàm est  $cv$ , à centro  $c$  productam. Atque rectam  $cd$  perpetim augendo, Spiram vel infinitè producere licebit; quæ centrum suum  $c$  gyris innumeris cinget, quorum extimi longius ab illo discedunt, arctissimi propius idem accedunt, quàm pro datâ quâlibet distantia.

2. Scriptâ quo diximus modo Spirâ  $civ$ , si in radiis ejus  $ic$ ,  $vc$ ,  $ic$  productis capiantur, ad contrarias centri partes, rectæ  $ch$ ,  $cv$ ,  $ck$ , illis  $ic$ ,  $vc$ ,  $ic$  æquales, atque idem semper fiat; nova efformabitur Spira, priori per omnia similis et æqualis, sed contrariè sinuata; nempe ut in æqualibus à communi centro  $c$  distantis plagas contrarias respiciant. Atque hæc Spiræ oppositæ haud immeritò nominentur; quippe quibus similes prorsus cognationes cum oppositis hyperbolis intercedant. Quo enim modo Spira prior,  $civ$ , ex hyperbolâ  $cnr$ , asymptotâ  $co$ , circuloque  $avx$  efformata est, eodem planè modo hæc alia,  $cbvk$ , ex hyperbolâ oppositâ, eâdem asymptotâ  $co$ , eodemque circulo efformari poterit.

3. Spiræ oppositæ unam tantummodò figuram constituere censendæ sunt, sicut Hyperbolæ oppositæ, à quibus illæ efformatæ sunt, unam.

4. Cum harum Spirarum ea sit natura, ut radii omnes à centro exeuntes æqualibus angulis ad curvam inclinentur, nullam earum apsidem habebunt.

5. Si è puncto  $v$ , in alterâ Spirarum oppositarum dato, corpus aliquod secundum rectam  $vg$ , quæ spiram ibi loci contingat, emissum fuerit, eâ cum velocitate, quam casu recto versus centrum  $c$  à distantiiis infinitis adeptum esset, urgentibus utique viribus centripetis quæ rationem inter se triplicatâ distantiarum à centro contrariam constanter servant; corpus illud per spiram  $v/c$  delatum gyris innumeris circum centrum  $c$  circumagetur, atque intra certum quoddam temporis spatium, quod quantum erit definire mox instituiam, centrum illud propius quidem accesserit quàm pro datâ quâlibet distantia; ipsum verò nunquam attinget; scilicet ne extra orbitam suam evagetur, cujus orbes infimi quidem et arctissimi centrum tamen intus habent. At verò elapso tempore illo, corpus, centrum quod transire ei non licuit, mirè prætergressum, Spiram quidem oppositam  $bvk$  invaserit, cujus ductus sequens, gyrisque innumeris circumactum, infinitè usque à centro abscedet; neque in alteram illam, quâ delatum est, unquam ei reverti concedetur.

6. Si manente velocitate quâcum corpus è loco  $v$  exeat, angulus acutus Velocitatis  $cvg$  sensim augeatur; ultimo, cum in rectum ille increverit, Spiræ oppositæ

**Pars PRIMA.** posita in circulum  $vva$  migraverint; per quem utique deferetur corpus viribus, quales diximus centripetas, sollicitatum, si è loco  $v$  cum velocitate illa, quam casus infinitus generasset, emissum fuerit, secundum rectam  $cg$  super radio  $cv$  ad perpendicularum erectam.

7. Corporis per Spiram logarithmicam lati eadem erit in loco quovis,  $i$ , velocitas, quæ corporis, quod, urgentibus iisdem viribus centripetis, per circulum ferretur centro  $c$ , radio  $ci$ , scriptum.

8. Ad Tempora definienda, quibus corpora viribus, quales posuimus, centripetis sollicitata datarum spirarum oppositarum,  $v/c$ ,  $cbv$ , partes datas absolvant, opus erit, quadrare figuras quas spirarum illarum datæ partes claudant. Id autem hæc ratione perficio.

Quadratura  
Spiræ Logarithmicæ.

Jam antè obtinuimus  $db = \frac{QW \times y}{2UW}$ . Cujus quidem notæ hæc est interpretatio. Recta  $db$  ad rectam  $y$  (fig. 1) datam eam rationem habet quam  $QW$  ad  $2UW$ . Linea igitur  $abx$ , ad quam est punctum  $b$ , recta erit positione data, et per centrum  $c$  transibit; & Spiræ sector  $vcx$  æqualis erit quadrilatero rectilineo  $avdb$ , sive differentie triangulorum similium  $cva$ ,  $cnb$ , quæ angulos ad  $v$  et  $n$  rectos habent. Horum autem illud  $cva$  ad quadratum ex  $cv$  rationem eam habebit quam  $QW$  ad  $4UW$ . Alterum autem ad quadratum ex  $cd$ , vel  $ci$ , similem rationem geret. Duorum igitur differentia, sive spatium  $avdb$ , sive Spiræ sector  $vic$  ad differentiam quadratorum ex  $cv$ ,  $ci$  eandem illam rationem geret quam  $QW$  ad  $4UW$ , sive eam quam  $HC$  ad  $4VH$ ; nempe cum sit  $QW : UW = HC : VH$  (id enim jam antè ostensum).

Hinc (in fig. 2) sector quilibet  $vic = \frac{HC}{4VH} cv^2 - ci^2$  & area tota Spiræ, à loco  $v$  centrum usque,  $= \frac{HC}{4VH} cv^2$ . Et area  $vicb$ , hoc est area tota spiræ  $vic$ , à loco quovis  $v$  centrum usque cum areâ oppositæ à centro locum usque quemvis  $b$ ,  $= \frac{HC}{4VH} cv^2 + cb^2$ . Areæ vero oppositæ, inter loca,  $v$ ,  $v$ , à centro hinc inde æqualiter remota, hæc areæ inquam simul sumptæ  $= \frac{HC}{2VH} cv^2$ .

9. Hinc Tempora, quibus absolvuntur areæ, quæ à punctis  $v$ ,  $i$  initium sumentes circa centrum desinunt, erunt inter se ut quadrata è radiis  $vc$ ,  $ic$ , à quibus areæ illæ initium sumant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cum à communi radio  $vc$  initium sumferint, ad radios ejusdem Spiræ diversos,  $ci$ ,  $cl$ , desinunt, erunt inter se sicut spatia quibus quadratum à radio  $vc$ , à quo areæ illæ communiter initium sumant, superat quadrata à radiis  $ci$ ,  $cl$ , ad quos illæ singulatim desinant.

Tempora quibus conficiuntur areæ, quæ, cum à communi radio  $vc$  initium sumferint, ad radios,  $ci$ ,  $cb$ , spirarum oppositarum desinunt, erunt inter se ut spatia  $vcq - ciq$ ,  $vcq + cbq$ .

Conferuntur  
cum Tempo-  
ribus in Cir-  
culis.

10. E loco  $v$  (fig. 3) exeant corpora duo, quorum alterum per Circulum centro  $c$ , radio  $cv$ , scriptum feratur, alterum per Spiras logarithmicas oppositas  $v/c$ ,  $cbv$ , urgentibus utique viribus quæ centrum  $c$  respiciant, et rationem triplicatæ

triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servant. Spirarum alteram recta  $vg$  in puncto  $v$  contingat. Tempus, quo corpus per spiras latum à puncto  $v$  ad punctum  $v$  spiræ oppositæ, æquali distantia à centro attingitur, quæ alterum  $v$  remotum, pervenerit, hoc inquam tempus ad tempus conversionis integræ corporis in circulo circumacti rationem habebit, quæ componetur è rationibus quas radius circuli ad circuitum ejus, atque ad sinum complementi anguli  $cvg$  habet.

A centro  $c$  in rectam  $vg$  demittatur ad perpendicularum recta  $vii$ . Exponatur recta  $t$  datæ cujusvis longitudinis. Sit alia  $\theta$ , quæ ad illam  $t$  rationem habeat, quam tempus conversionis integræ in Circulo ad tempus translationis de loco  $v$  in locum  $v$  per Spiras. Dico illam  $t$  ad hanc  $\theta$  rationem habere eam, quæ componitur è rationibus rectæ  $cv$  ad circuitum circuli  $xv$ , qui rectam illam radium habet, ejusdemque  $cv$  ad rectam  $vh$ . Vel quod perinde est, posito circuitum circuli  $xv$  rectæ  $p$  æqualem esse, dico  $t$  esse ad  $\theta$  ut quadratum ex  $cv$  ad rectangulum  $vh \times p$ .

Sint enim  $vcb$ ,  $vca$  sectores circuli spiræque motus initio simul confecti; & habeat recta  $t$ , ad rectam  $t$  rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores illi ad tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras. Habebit itaque eadem  $t$  ad  $\theta$  rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores,  $vcb$ ,  $vca$  ad tempus conversionis integræ in circulo. Habeat autem illa  $t$  ad aliam rectam  $v$  proportionem eam quam sector spiræ  $vca$ , ad sectorem circuli  $vcb$ . Designet littera  $A$  spatium illud, quod spiræ oppositæ inter loca,  $v$ ,  $v$ , intus habent. Jam spatium  $A$  ad aream totam circuli  $vvx$  rationem habet, quæ componitur è rationibus spatii illius  $A$  ad sectorem  $vca$ , sectoris  $vca$  ad sectorem  $vcb$ , sectorisque  $vcb$  ad aream circuli. Quæ verò spatii  $A$  ad sectorem  $vca$  ratio, ea est temporis quo conficitur spatium  $A$ , motu corporis per spiras, ad tempus quo conficitur sector  $vca$ ; sive rectæ  $t$  ad rectam  $v$ . Quæque sectoris  $vca$  ad sectorem  $vcb$  est ratio, ea est rectæ  $t$  ad rectam  $v$ . Quæque sectoris  $vcb$  ad aream circuli, ea est temporis quo conficitur sector  $vcb$  ad tempus conversionis integræ in circulo; sive rectæ  $t$  ad rectam  $\theta$ . Spatium igitur  $A$  ad aream totam circuli rationem habet compositam è rationibus rectæ  $t$  ad  $t$ , rectæque  $t$  ad  $v$ , rectæque  $t$  ad  $\theta$ ; sive compositam è rationibus rectæ  $t$  ad  $v$  rectæque  $t$  ad  $\theta$ ; sive eam quæ est rectanguli  $t \times t$  ad rectangulum  $\theta \times v$ . Spatium inquam  $A$  est ad aream circuli  $vvx$  ut rectangulum  $t \times t$  ad rectangulum  $\theta \times v$ .

Jam verò  $t$  ad  $v$  rationem habet quam sector spiræ  $vca$  ad sectorem circuli  $vcb$ ; quæ eadem est, quam  $ch$  ad  $cv$ . Nam velocitates quibus corpora duo, quorum alterum per circulum, alterum per spiras feratur, è loco  $v$  exeant, hæc necessariò inter se æquales erunt; cum ea utraque esse debeat, quam, urgentibus quales posuimus viribus centripetis, corpora casu recto à distantis infinitis, locum usque  $v$ , adeptæ fuerint. Sed propter velocitates illas inter se æquales, arcus nascentes spiræ circuli que  $va$ ,  $vb$ , primò quidem inter se æquales erunt. Sectoribus igitur nascentibus  $vcx$ ,  $vcb$  prima ratio, càm ea sit illa quæ rectangulis etiam nascentibus  $va \times ch$ ,  $vb \times cv$  prima est, ea erit quæ rectis datis  $ch$ ,  $cv$  inter ipsas intercedat. Quæ verò sectoribus  $vca$ ,  $vcb$  nascentibus prima fuerit

Pars Prima.  
Casus  
Primus.

ratio, ea quidem, dummodo simul conficiantur, semper inter eos manet. Nam utcumque alterum illorum augeri velis, tempus, quo confectus fuerit, simili ratione augebitur. Et pro temporis ratione alter etiam augebitur. Manet igitur sectoribus illis quæ nascentium prima fuit ratio, five rectæ  $CH$  ad rectam  $CV$ . Habet igitur, sicut modò asseveravimus, recta  $t$  ad  $v$  rationem illam quam  $CH$  ad  $CV$ . Rectangulum igitur  $t \times t$  ad rectangulum  $\Theta \times v$ , five spatium  $A$  ad circulum  $v \times x$ , rationem habet eam, quam rectangulum  $t \times CH$  ad rectangulum  $\Theta \times CV$  (per El. v. 11.) Atqui spatium  $A$  ad dimidium quadrati ex  $CV$  rationem habet eam, quam  $CH$  ad  $VH$  (secundum ea quæ suprà ostendimus § 8.) Et dimidium quadratum ex  $CV$  ad aream circuli  $v \times x$  rationem habet eam quam  $CV$  ad  $P$ . Nimirum cum area circuli rectangulo  $\frac{1}{2} CV \times P$  æqualis sit, secundum ea quæ demonstravit Archimedes. Spatium igitur  $A$  ad aream circuli  $v \times x$  rationem habet compositam è rationibus rectæ  $CH$  ad  $VH$ , rectæque  $CV$  ad  $P$ ; five eam, quæ est rectanguli  $CH \times CV$  ad rectangulum  $VH \times P$ . Quare rectangulum  $t \times CH$  erit ad rectangulum  $\Theta \times CV$  ut rectangulum  $CH \times CV$  ad rectangulum  $VH \times P$  (El. v. 11.) Permutando  $t$  erit ad  $CV$  ut rectangulum  $\Theta \times CV$  ad rectangulum  $VH \times P$ . Quare et rectangulum  $t \times CV$  ad quadratum ex  $CV$  ut  $\Theta \times CV$  ad  $VH \times P$ . Permutando  $t : \Theta = CV^2 : VH \times P$ . Q. E. D.

Hinc si tempus conversionis integræ in Circulo designetur literâ  $\Theta$ , tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras illud erit, quod Algebra his notis designaverit  $\frac{CV^2}{VH \times P} \Theta$ . Atque hujus temporis dimidium illud erit, intra cuius spatium corpus è loco  $v$  egressum, ut per spiram  $v$  deferatur, centrum propius accesserit quàm pro datâ quâlibet distantia.

11. Cum sit  $t$  ad  $\Theta$  ut  $CV^2$  ad  $VH \times P$ , erit  $t$  ad  $\frac{1}{2} \Theta$  ut  $CV^2$  ad  $VH \times \frac{1}{2} P$ . Hinc si talis sit angulus  $CVH$ , cujus cosinus rationem ad radium habeat quam radius ipse ad dimidium circuli circuitum, nimirum ut rectangulum  $VH \times \frac{1}{2} P$ , quadrato ex  $CV$  æquale sit; tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras, quarum radii eo angulo ad tangentes inclinentur, dimidio temporis conversionis in circulo æquale erit. Hoc est, idem erit de loco  $v$  in  $v$  translationis tempus, five per spiras, quâ diximus specie præditas, five per circulum corpus transferatur. Cæterum in hac spirarum specie, anguli  $CVH$  amplitudinem calculi produunt,  $71^\circ - 26' - 21''$ , quantum ferè numeris eam exigere liceat.

12. Corpus igitur è loco  $v$  egressum, si per hanc spiram delatum fuerit, eo temporis spatio, quo corpus aliud ex eodem loco simul egressum quadrantem circuli absolverit, centrum ipsum  $c$  propius quàm pro datâ distantia accesserit.

Conferuntur  
Tempora in  
Spiris diversâ  
Specie.

13. Intelligentur circum centrum commune  $c$  binæ spiræ logarithmicæ oppositæ, quæ in locis  $v$ ,  $v$  se mutuo interfecent (fig. 4). Harum alteram in puncto  $v$  contingat recta  $vg$ , alteram  $vg$ : et à centro  $c$  in rectas  $vg$ ,  $vg$  deducantur ad perpendicularum  $ch$ ,  $cb$ . Dico tempora translationum de loco  $v$ , in  $v$ , per spiras diversas, atque adeo horum temporum dimidia, five tempora quibus corpora è loco  $v$  simul egressa, si per has spiras deferantur, centrum  $c$  propius accesserint quàm pro datâ quâlibet distantia, dico hæc tempora

tempora inter se rationem habere rectarum  $vH$ ,  $vb$  contrariam; five contrariam ejus, quam angulorum, quibus radii spirarum ad Curvas inclinantur, cosinus inter se habent.

Erit enim tempus translationis per spiras quas recta  $vg$  contingit, ad tempus conversionis integræ in circulo cujus radius  $cv$ , ut quadratum ex  $cv$  ad rectangulum  $vH \times P$  (§ 10. hujus). Tempus item conversionis integræ in illo circulo erit ad tempus translationis per spiras alteras, quas recta  $vg$  contingit, sicut rectangulum  $vb \times P$  ad quadratum ex  $cv$ . Ex æquo perturbatè, tempus translationis per spiras primas ad tempus translationis per alteras ut  $vb \times P$  ad  $vH \times P$ ; hoc est ut  $vb$  ad  $vH$ . Q. E. D.

14. Manente jam angulo  $CVH$ , ille alter  $cvb$  quovis modo fluat. Ut spiræ, quæ per locum  $v$  è lege ductæ fuerint, ut rectam mobilem  $vb$  in loco  $v$  contingentem semper habeant, speciem usque mutant. Jam cum in omni magnitudine anguli  $cvb$  maneat illa temporum ratio, ut sit tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras stabiles, quas recta positione data  $vH$  contingit, ad tempus translationis per spiras mutabiles, quas contingit semper recta mobilis  $vg$ , sicut  $vb$  ad datam  $vH$ , etiam evanescente angulo  $cvb$ , ratio temporis translationis per spiras stabiles ad tempus translationis per spiras mutabiles, figuram ultimam induentes, ea erit, quæ est ultima rectæ mutabilis  $vb$  ad datam  $vH$ . Evanescente autem angulo  $cvb$  spiræ mutabiles, quas recta  $vb$  semper contingit, ultimò quidem in ipsam rectam  $vg$  abeunt. Et tempus translationis per has spiras fit ultimò tempus translationis per illam rectam. Recta autem  $vb$  ipsi  $vg$  fit ultimò æqualis. Tempus igitur quo corpus, casu recto à distantis infinitis centrum petens, à loco  $v$  centrum usque deferretur, indeque rursus motu continuato locum  $v$  ad contrarias centri partes æqualiter remotum attingeret, hoc inquam tempus ad tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras stabiles, quas recta positione data  $vg$  contingit, rationem habebit eam quam  $vH$  ad  $cv$ .

15. Ponatur angulus  $CVH$  talis esse, qualis esse debet, ut tempus translationis de loco  $v$  in  $v$ , per spiras quas recta  $vH$  contingit, idem sit quod tempus dimidiæ conversionis in Circulo, cujus radius  $cv$ . Tempus igitur translationis rectæ de loco  $v$  in  $v$ , corpori utique quod à distantis infinitis casu recto centrum petierit, erit ad tempus dimidiæ conversionis in circulo illo ut cosinus anguli cujus amplitudo est  $71^\circ - 26' - 21''$ , ad radium. Temporis item casus recti de loco  $v$  in centrum, nempe post casum rectum à distantis infinitis locum usque  $v$ , ad tempus, quo corpus in illo circulo quadrantem circuitus absolveret, eadem erit ratio: nimirum cosinus anguli  $71^\circ - 26' - 21''$ , ad radium, five radii ad dimidium circuli ambitum.

16. Tempora quibus corpus à locis ejusdem spiræ diversis,  $v$ ,  $i$ , ad distantiam à centro delatum fuerit omni datâ propiorem, erunt inter se sicut doctrina: nostræ cum Newtonianâ. Tempora autem illa quadrata è radiis  $cv$ ,  $ci$  per loca illa ductis (per. § 9). Tempora rationem inter se circulis inæqualibus, circum centrum commune, Tempora rationem inter se servant radiorum duplicatam; quod cum iis consentaneum est, quæ in Corollario 7. Propositionis iv. Libri Primi Principiorum, de Temporibus conversionum in Circulis, Newtonus generatim tradidit.

\* B 2

17. Tempora

Tempora  
c. fus recti  
in centrum  
duplicatam  
distantiarum  
à centro ra-  
tionem ser-  
vant.

17. Tempora casus recti centrum usque è locis diversis (post casum rectum ab infinitis utique distantis locum usque superiorem) cum ad Tempora conversionis in Circulis, circum centrum commune per loca illa ductis, datam rationem gerant (per § 15.) duplicatam distantiarum rationem inter se servabunt.

ΥΕΤΑΑΠΤΟΝ.

18. Quid autem? Temporis casus recti, è loco puta  $v$  centrum usque  $c$ , si ex eo iusta aestimatio veniet, quòd evanescente contactus angulo  $bvc$  linea recta  $vc$  spirarum, species usque mutantium, ultima sit figura; quidni Tempus etiam conversionis in Circulo simili ratione aestimare liceat? Nimirum ex eo quòd si angulus ille  $bvc$  contrario modo fluat, ut jam crescat qui ante evanescere ponebatur, Spiræ, quas recta mobilis  $vb$  in puncto  $v$  semper contingit, quæque speciem usque mutant, hæ ultimò quidem, cum angulus ille in rectum increverit, figuram circularem induant; ejus nempe circuli, qui centrum  $c$ , radium  $cv$  habet. Num igitur tempus, quo corpus de loco  $v$  in  $v$  per circum illum transferatur, ad tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per spiras positione datas, quas in dato puncto  $v$  recta  $vh$  positione data contingat, rationem habebit, quæ datæ  $vh$  ad rectam  $vb$  mutabilem ultima erit? At verò recta  $vb$ , cum angulus  $cvb$  rectus fuerit factus, in nihilum planè abierit. Tempus igitur translationis de loco  $v$  in  $v$  per circum, si hoc modo verè aestimatum sit, ad Tempus translationis per spiras majus erit quàm ut datam aliquam rationem gerat. Sint igitur spiræ eà specie præditæ, quam in § 11. definivimus. Jam tempus translationis de loco  $v$  in  $v$  per circum tempori translationis per spiras æquale sit, secundum ea quæ in § 11. demonstravimus. Tempus igitur translationis de loco  $v$  in  $v$  per circum ei æquale erit, quod magis quàm pro datâ quavis ratione exsuperare debet. Quo nihil quidem absurdius excogitari potest. Quid igitur? An nos in temporum per circum spirasque circum comparatione falsi sumus, quàm antè in § 10. facere instituimus, an tunc potius in lubrico sumus versati, cum tempus casus recti definire inciperemus, ex figuræ illius consideratione, quam, evanescente angulo contactus, Spiræ, speciem usque mutant, ultimò quasi induerent, quamque rectam esse pronuntiavimus? Neutrum horum quidem. Sed in § 10. comparatio temporum rectè instituta est, rationumque conclusiones verissimè sunt subductæ; et spiras, evanescente contactus angulo, in rectam ultimò abire verissimè pronuntiatum est; et ex eo quòd in rectam eæ ultimò abierint, haud temerè nobis est incepta Temporis casus recti aestimatio. Ille verò temerè & imperitè fecerit, qui ex eo quòd crescente contactus angulo spiræ ultimò, cum rectus ille fiat, in Circuli figuram quodammodo abeant, Tempus conversionis in circulo similiter aestimare velit. Is enim similitudinem sibi sinxerit, ubi reverà nulla est. Licet enim crescente angulo contactus  $cvb$ , ultimò quidem, cum in recti amplitudinem ille increverit, pro omni Spirarum figurâ sola Circuli, radio  $cv$  scripti, figura remanebit, ut nos ipsi supra § 6. monuimus, haud tamen eodem modo Spiræ in Circulum abeunt, atque angulo  $cyb$  evanescente in Rectam. Etenim in Rectam abeuntes in simplicem rectam abeunt, nimirum spiræ  $vc$  in rectam simplicem  $vc$ ; spiræ alteræ  $cv$  in simplicem  $cv$ ; totaque adeo oppositarum spirarum figura in rectam simplicem

plicem  $vcv$ ; cui innumeri spiræ utriusque orbes, qui loca illa  $v$ ,  $v$  interjacent, ultimò æquales sunt. Licet enim utraque spirarum oppositarum, qualiscunque sit anguli  $cvb$  amplitudo, gyris innumeris centrum cingat, atque adeo punctis innumeris radium  $cv$  secet; angulo tamen illo infinitè imminuto, orbes omnes utriusque interiores infinitè quidem angusti fiunt; adeo ut radii interiores  $ci$ ,  $cb$  (fig. 2) omni datâ rectâ minores uterque fiant. Orbes igitur utriusque spiræ interiores in ipsum quasi centrum sese contrahunt, et ex punctis innumeris in quibus spira utraque radiis occurrat, ne unum quidem inveniat, quod non propius quàm pro datâ quavis distantia à centro absit. Sinus igitur curvarum  $vi$ ,  $vb$ , Curvis totis (inter loca  $v$ ,  $v$ ) ultimò fiunt æquales. Angulo autem contactus infinitè decrescente, sinus utriusque latitudo in omni parte infinitè imminuitur. Rectæ scilicet, quæ ab hoc vel illo in rectam  $vv$  ad perpendicularum deducantur, datis quibuscunque minores fiunt. Fieri igitur nequit, quin sinus  $vi$  ad rectam  $vc$ , sinus alter,  $bv$  ad rectam  $cv$  ultimò se applicet, & sinus illi simul sumti, hoc est, spirarum oppositarum orbes innumeri, qui locis  $v$ ,  $v$  interjacent, in rectam  $vcv$  abeant, atque illi æquales fiant.

Jam verò crescente angulo  $cvb$ , spirisque contrario, atque antè fecerunt, modo speciem usque mutantibus, videamus quid ultimò illis accidat, cum angulus ille rectus fiat. Diximus eas in figuram Circulorum abiisse. Abierint verò. Haud verò in Circulum simplicem; sed in innumeros, circum centrum commune  $c$  scribendos, eà quidem orbium spissitudine, ut circuli  $vov$ , qui omnium extimus erit, aream circuitus interiorum planè compleant. Etenim angulo contactus infinitè aucto, spirarum oppositarum, è locis  $v$ ,  $v$  egredientium, orbes omnes interiores ampliores fiunt, adeo ut radius quiscunque interior  $vi$  datâ quâlibet rectâ major evadat, quæ ipsa radio primo  $cv$ , vel  $cr$ , minor sit; & in rectâ  $cv$  nequeat dari punctum infra ipsum  $v$ , quo punctum illud ubi primâ vice, ubi secundâ, ubi tertiâ, ubi quâcunque denique, Curva ex  $v$  egressa radium primum,  $cv$ , redux transferit, non propius tandem à puncto  $v$  remotum sit. Neque innumeris modò gyris Spira utraque centrum cingat, atque adeo punctis innumeris radios  $cv$ ,  $cv$  secabit, sed innumera tandem erunt intersectionum puncta, quæ datam quamlibet radii utriusque,  $cv$  vel  $cr$ , portionem occupabunt; gyri pariter erunt innumeri, qui spatia ampliora, quàm est area cujusvis circuli, qui ipso  $vov$  minor sit, singulatim intus continebunt. Gyri autem illi innumeri ultimò in circulos abibunt innumeros, quorum omnium ambitus integri simul sumti, infinitam quandam efficient longitudinem, cui spiræ oppositæ ultimò æquales fiunt. Crescente igitur angulo  $cvb$  ut rectus fiat, Spiræ, quas in puncto  $v$  recta mobilis  $vb$  contingit, speciem usque mutant, in figuram circularem longè alio modo abeunt, atque illæ in rectam abierunt, quæ species suas contrario modo usque mutavere, dum angulus illa sensim evanesceret. Siquidem illæ in Rectam abire simplicem, longitudine finitâ præditæ. Hæ verò in Circulos abeunt innumeros, immensam planè longitudinem affectantes. Jam verò tempus quod attinet translationis de loco  $v$  in  $v$  per Spiras, cum in omni id spirarum specie ex temporibus conversionum omnium in innumeris spirarum oppositarum orbibus confla-

tum

tum sit, siquidem corpus per spiras de loco  $v$  in locum  $v$  non aliter transferatur, nisi cum orbes innumeros locis  $v$ ,  $v$  interscriptos emensum sit; cum præterea, angulo  $cvb$  in rectum aucto, ex spirarum orbibus innumeri tandem sint, qui circumum quemvis exsuperent ipso  $v$  minorem; cum conversionibus singulis, per orbes circulo  $v$  non minores, tempora etiam tribuenda sint tempore conversionis integræ per circumum  $v$  non minora; cum denique tempora illa innumera, quæ dato singulatim non minora sint, simul sumpta infinitam quandam durationem conficiant: hæc inquam cum ita sint, certè tempus translationis de loco  $v$  in  $v$ , per spiras figuram suam ultimam circularem induentes, quod innumeris illis conversionum in dato circulo temporibus minus esse nequit, id dato quovis tempore necessariò majus erit. Neque magis nos rationes illæ fefellerunt, quæ ex eo quòd, crescente sensim contactus angulo, spirarum figura ultimò, cum rectus ille factus fuerit, in circularem abierit, tempus translationis ultimum infinitum prodiderunt; quàm illæ, quæ translationi per spiras, evanescente contactus angulo & ad nihilum redactò, in rectam abeuntes, tempus ultimum finitum assignarunt. Næ ille verò graviter erraverit, qui ultimum illud translationis tempus, per spiras in circulos transeuntes, temporì dimidiæ conversionis in circulo extimo æquandum judicaverit; cum revera illud innumera conversionum integrarum tempora in se uno contineat. Quod si cui videar, dum hæc fusius disputarem, longius à proposito divertisse, is velim meminerit, me errori arguendo operam dedisse, qui ex eorum genere est, qui incautos faciliè irretitos teneant; simulque in eam opinionem eos inducant, ut omne id genus argumenti, quod rationibus primis ultimisque nititur, suspectum habeant. Simul illud ostendere volui, quod hujus sæculi hominibus satis profecto inculcari nequit, quàm periculosum ei futurum sit iter, quàm tenebris caliginequemersum, cui, Physicam ingredienti, Geometria facem non prætulit: quàm claro contrà collustrentur omnia lumine, quando ducem viæ atque comitem illa se præbuerit. Profecto qui errores, unde ortum ducant, quibus in rebus consistant, optimè expedierit, quâ ratione vitari possint certissimè monstravit, is optimus erit ac certissimus, me iudice, veritatis magister. Ad propositum redeo.

PARTIS PRIMÆ CASUS SECUNDUS. (Vid. fig. 10.)

JAM verò è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  minore cum velocitate corpus intelligatur emitti, quàm casu recto à distantis infinitis locum usque  $v$  adeptum esset. Junctaque  $cv$ , in rectâ  $cv$  productâ detur punctum  $A$ , unde si corpus rectâ cecidisset, velocitatem in loco  $v$  adeptum esset æqualem ei, quæcum è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  exire gestit. Et manentibus quæ ad analysin generalem Problematis xxviii. Libri I. Principiorum in Notâ (\*) lineavimus, intelligatur jam  $AB$  rectæ  $AC$  æqualis. Dataque  $CA$  vel  $AB$  designetur literâ  $a$ ; data  $cv$ , literâ  $c$ ; indefinita  $cd$ , literâ  $y$ . Jam cum è naturâ Curvæ  $BF$ ,  $AB$  sit ad  $DF$  ut vis centralis in loco  $A$  ad vim centramalem in loco  $D$ , hoc est, ut cubus ex  $CD$  ad cubum ex  $CA$  vel  $AB$ , erit  $DF = \frac{AB^3}{CD^3}$ ,  $AB = \frac{a}{y}$ . Ergo  $DF \times -y = -\frac{a^3}{y^3}$ . Harum verò fluxionum

fluxionum fluentes sunt, alterius quidem area Curvæ  $BF$  ad ordinatam  $DF$  terminata, alterius spatium his notis designatum  $\frac{a^4}{2y^2}$ . Spatium igitur Cur-

ANALYSIS  
CASUS SE-  
CUNDI  
PARTIS  
PRIMÆ.

væ  $BF$  spatio  $\frac{a^4}{2y^2}$  aut æquale erit, aut alterum altero majus dato. Cum verò rectæ, quæ possint spatia  $BADF$ , sint semper ut velocitates corporis casu recto centrum  $c$  petentis; quando ordinata  $DF$  eum situm obtineat, ut corporis ad punctum  $D$ , unde illaeducta sit, velocitas ad nullam fuerit redacta, tum profecto recta quæ poterit aream  $BADF$ , atque area adeo ipsa, in nihilum abierit. Fluat igitur recta  $CD$ , usquedum punctum mobile  $D$  in locum  $A$  perveniat, ordinataque  $DF$  cum ipsâ  $AB$  congruat. Tum demum velocitate corporis ad nullam redactâ, quippe cum corpus ex ipso loco  $A$  casum rectum occeperit, area  $BADF$  in nihilum abierit. At verò in eo situ puncti  $D$  spatium  $\frac{a^4}{2y^2}$  dimidio quadrati ex  $a$ , vel  $ac$ , sit æquale; nempe cum  $y$ , vel

$CD$ , ipsi  $CA$  æqualis facta fuerit. Spatium igitur  $\frac{a^4}{2y^2}$  areâ  $BADF$  dato  $\frac{1}{2}a^2$  semper majus erit. Ut sit area  $BADF = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$ . Hinc efficietur  $UQ = \frac{a^4}{2CV^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{CA^2}{2CV^2} CA^2 - \frac{1}{2}CA^2$ . Et  $RS = \frac{a^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$ .

Sed  $ST = \frac{q^2}{y}$  (Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. f). Ergo  $ST^2 = \frac{2q^4}{2y^2} = \frac{2CV^2 \times QW^2}{2y^2}$ . Hinc  $RT^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$ .

Designet  $b$  rectam, quæ datarum illarum  $cv$ ,  $\sqrt{2UW^2 + CA^2}$  proportionem media sit. Erit igitur quadratum ex  $b$  rectangulo  $cv \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$  æquale. Sive algebraicè  $b^2 = cv \times \sqrt{2UW^2 + CA^2}$ ; et  $b^4 = cv^2 \times 2UW^2 + CA^2 = cv^2 \times 2UQ^2 - 2QW^2 + CA^2$ . At verò ex eo quòd inventum est  $UQ^2 = \frac{CA^2}{2CV^2} CA^2 - \frac{1}{2}CA^2$ , efficietur  $2cv^2 \times UQ^2 = CA^4 - cv^2 \times CA^2$ . Atque hinc rursum  $b^4 = CA^4 - 2cv^2 \times QW^2 = a^4 - 2q^4$ . Cum igitur inventum est  $RT^2 = \frac{a^4 - 2q^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2$ , erit idem  $RT^2 = \frac{b^4}{2y^2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{b^4 - a^4 y^2}{2y^2}$ . Quare  $2RT = \frac{\sqrt{2b^4 - 2a^4 y^2}}{y}$ .

Sed  $db = \frac{q^2}{2RT}$ . Et  $dc = \frac{CV^2}{y^2} \times \frac{q^2}{2RT}$  (per formulas generales Princip. Lib. I. Sect. VIII. Not. f, traditas.)

Quare  $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 - 2a^4 y^2}}$ . Et  $dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y \sqrt{2b^4 - 2a^4 y^2}}$ . Hæc ultimâ formulâ definitur Curva  $acx$ ; atque hæc est illa, ejus facilem quadraturam in Corollario tertio Propositionis quadragesimæ primæ Libri Primi Principiorum Newtonus prædicavit. Reverà ex earum genere est, quas in formam primam Classis quartæ Tabulæ secundæ Libri sui de Quadraturâ Curvarum Newtonus conclusit. Datâ igitur  $vd$ , ope illius Tabulæ dabitur area  $avdc$ , ex relatione quæ illi cum datâ quâdam areâ conicâ intercedat. Datâ autem areâ  $avdc$ , punctum  $i$  ad curvum corporis tramitem, ut in casu superiori,

Pars PRIMA. riori, dabitur; assumptisque distantis aliis, alia definiuntur Curvæ vix CASUS puncta. Q. E. I.

## COMPOSITIO CASUS II. PARTIS I.

In rectâ cv, infinitè producendâ (fig. 5), capiatur ca ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam AB, seu CA, proportionem eam, quam quadratum è rectâ cv ad quadratum è rectâ b. Jungatur cb, & à puncto c ad perpendicularum cum rectâ CA educatur ce, quæ junctæ cb fiat æqualis. Centro c semiaxe transverso ca, secundo ce, scribatur hyperbola asr. Punctum v non erit extra hanc hyperbolam. Cum enim ea sit recta b, cujus quadratum rectangulo  $cv \times \sqrt{2uv^2 + ca^2}$  æquale sit, certè non minus erit quadratum ex illâ b quàm rectangulum  $cv \times ca$ . Haud minus igitur erit quadratum ex b, quàm ut habeat ad quadratum ex cv rationem eam, quam rectangulum  $cv \times ca$  ad quadratum ex cv; sive eam, quam recta ca ad rectam cv. Sed talis sumpta est recta ca, ad quam illa ca habet proportionem eam, quam quadratum ex b ad quadratum ex cv. Habet igitur ca ad ca rationem quam b ad cv. Non minor igitur erit illa ca quàm ut habeat ad ca proportionem eam quam ca ad cv. Invertendo, ca non erit major quàm quæ habeat ad ca proportionem quam cv ad eandem ca. Quare ca non major erit quàm cv. Sed major esse deberet, si punctum v extra hyperbolam esset. Non est igitur extra hyperbolam punctum v. Recta igitur ab illo v ordinatim ad axem transversum ducta hyperbolæ occurrit. Educatur, & hyperbolæ in s occurrat.

Sumatur in axe ca aliud quodvis punctum x intra sectionem, quod à vertice sectionis conicæ a longius sit remotum, quàm est punctum v. Educatur xr ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in r occurrat. Jungantur cs, cr. Centro c, radio cv, scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector vca, qui habeat ad sectorem hyperbolicum acr rationem eam quam  $q^2$ , sive rectangulum  $cv \times qw$ , ad quadratum ex ca. Ducatur recta rt, quæ hyperbolam in r contingens, axi ca in t occurrat. In rectâ cp capiatur cr quæ ad c/ eam rationem habeat, quam quadratum ex cv ad quadratum ex ca. Si è loco v (fig. 10) secundum rectam vg corpus quodpiam emissum fuerit, eâ cum velocitate quam in loco v adeptum esset, si à loco A, nullâ vi insitâ præditum, casum rectum, centrum versus, occipisset, hoc corpus feretur per Curvam, ejus quam punctum p (in fig. 5) perpetuò tangit per omnia similem & æqualem.

## DEMONSTRATIO.

In figura 10<sup>a</sup> capiatur cd, duarum cx, cv in figurâ 5<sup>a</sup> proportionem tertiam, existentibus illis cv, necnon illis ca, illisque ab, utriusque figuræ inter se æqualibus. Et cum cx (fig. 5) major sit quàm cv, erit cv major quàm cd. Quare circulus centro c radio cd scriptus in figurâ 10<sup>a</sup> curvum corporis tramitem secabit. Secet in i, reliqua verò omnia maneant quæ ad Problematis in hoc casu resolutionem lineavimus. Jam cum sit ca ad ca ut

ut quadratum ex cv ad quadratum ex b (ita enim factum est) capiatur  $\beta$  (fig. 10) duarum cv, b proportionem tertiam. Erit igitur ca ad ca ut cv ad  $\beta$ . Quare quadratum ex ca erit ad quadratum ex ca ut quadratum ex cv ad quadratum ex  $\beta$ . Et permutando  $ca^2 : cv^2 = ca^2 : \beta^2$ . Quare  $ca^2 : cv^2 = 2ca^2 : 2\beta^2$ . Atque rursum permutando  $ca^2 : 2ca^2 = cv^2 : 2\beta^2$ . Sed propter æquales CA, AB & angulum ad A rectum, quadratum ex cb, sive ejus æquali ce (fig. 5), quadrati ex ca duplum erit. Quapropter, cum sit  $ca^2 : 2ca^2 = cv^2 : 2\beta^2$ , erit quadratum ex ca ad quadratum ex ce ut quadratum ex cv ad duplum quadratum ex  $\beta$ . Quapropter in hyperbolâ asr, spatium quo quadratum ex cx exsuperat quadratum ex dimidio axe ca erit ad quadratum ex ordinatâ x, ut quadratum ex cv ad duplum quadratum ex  $\beta$ .

In figura 10<sup>a</sup>, junctæ cb occurrat rectæ db in m. Et capiatur  $\gamma$ , duarum cm, b proportionem tertiam. Rectangulum igitur  $cm \times \gamma$  æquale erit quadrato ex b, cui etiam rectangulum  $cv \times \beta$  æquale erit. Rectangula igitur  $cm \times \gamma$ ,  $cv \times \beta$  inter se æqualia erunt. Quare  $\gamma$  erit ad  $\beta$  ut cv ad cm, & quadratum ex  $\gamma$  ad quadratum ex  $\beta$  ut quadratum ex cv ad quadratum ex cm. Est autem quadratum ex cd quadrati ex cm dimidium; nimirum propter æquales cd, dm, angulumque ad d rectum. Quare duplum quadratum ex  $\gamma$  erit ad quadratum ex  $\beta$  ut quadratum ex cv ad quadratum ex cd; hoc est, cum tribus illis cx (fig. 5), cv, cd (fig. 10), ac proinde earum quadratis, perpetua sit proportionis convenientia, ut quadratum ex cx ad quadratum ex cv. Quadratum igitur ex cx erit ad quadratum ex cv, ut duplum quadratum ex  $\gamma$  ad quadratum ex  $\beta$ , sive ut quadruplum quadrati ex  $\gamma$  ad duplum quadratum ex  $\beta$ . Permutando quadratum ex cx erit ad quadruplum quadrati ex  $\gamma$ , ut quadratum ex cv ad duplum quadrati ex  $\beta$ . Sed ostensum est quadratum ex ca esse ad quadratum ex ce, ut quadratum ex cv ad duplum quadrati ex  $\beta$ . Quare illud quo quadratum ex cx (fig. 5) exsuperat quadratum ex ca, erit ad illud quo quadruplum quadrati ex  $\gamma$  exsuperat quadratum ex ce ut quadratum ex cv ad duplum quadratum ex  $\beta$ . Idem autem illud quo quadratum ex cx exsuperat quadratum ex ca est ad quadratum ex xr, ut quadratum ex cv ad duplum quadratum ex  $\beta$ . Id enim jam ostensum est. Illud igitur quo quadratum ex cx exsuperat quadratum ex ca ad illud quo quadruplum quadrati ex  $\gamma$  exsuperat quadratum ex ce eandem, quam ad quadratum ex xr, proportionem habet. Quadratum igitur ex xr æquale est ei quo quadruplum quadrati ex  $\gamma$  exsuperat quadratum ex ce. Illud autem quo quadruplum quadrati ex  $\gamma$  exsuperat quadratum ex ce quadruplum est quadrati ex rt in fig 10. Nam cum tribus illis, cm, b,  $\gamma$  (fig. 10) perpetua sit proportionis convenientia, idcirco quadratum ex  $\gamma$  erit ad quadratum ex b ut quadratum ex b ad quadratum ex cm, hoc est ad duplum quadrati ex cd. Verum ut quadratum ex b ad duplum quadrati ex cd, sic est quadratum ex rt, dimidio quadrati ex ca auctum, ad quadratum ex b. Namque hoc ipsum declarant notæ illæ, quas analysi nobis expromebat,  $rt^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2}a^2$ . Quadratum igitur ex  $\gamma$  ad quadratum ex b eandem quam quadratum ex rt, dimidio quadrati ex ca auctum, proportionem habet. Quare quadrato ex  $\gamma$  æquale erit quadratum ex rt dimidio quadrati ex ca auctum. Et quadruplo quadrati



PARS PRIMA.  
CASUS SE-  
CUNDUS.

quadrati ex  $y$  æquale erit quadruplum quadrati ex  $RT$  duplo quadrati ex  $CA$ , hoc est quadrato ex  $ce$ , auctum. Illud igitur quo quadruplum quadrati ex  $y$  exsuperat quadratum ex  $ce$ , quadruplum est quadrati ex  $RT$ . Idem verò quadrato ex  $xr$  jam antè ostensum est æquale. Quadratum igitur ex  $xr$  quadruplum est quadrati ex  $RT$ , ac proinde recta  $xr$  dupla erit recta  $RT$ .

Jam verò propter perpetuam tribus illis  $CX$  (fig. 5)  $CV$ ,  $CD$  (fig. 10) proportionis convenientiam, rectangulum  $CX \times CD$ , quadrato ex  $CV$ , hoc est dato spatio, æquale erit. Quare fluxio hujus rectanguli,  $CX \times CD$ , nihilo æqualis erit; cujus tamen latera  $CX$ ,  $CD$ , modis contrariis fluunt. Rectangula igitur  $\dot{C}X \times \dot{C}D$ ,  $\dot{C}X \times \dot{C}D$  erunt inter se æqualia, ut differentiam nullam habeant. Eorum enim differentia, si ulla esset, spatii  $CX \times CD$  fluxio esset: hoc est, spatium datum fluere. Quod est absurdum. Sunt igitur  $\dot{C}X \times \dot{C}D$ ,  $\dot{C}X \times \dot{C}D$  inter se æqualia. Rectarum autem  $ax$ ,  $CX$  fluxiones, propter datam  $ca$ , sunt inter se æquales. Hoc est  $\dot{ax}$ ,  $\dot{C}X$  sunt inter se æquales. Rectangulum igitur  $\dot{ax} \times \dot{C}D$  æquale erit illi  $\dot{C}X \times \dot{C}D$ , cui etiam illud  $\dot{C}X \times \dot{C}D$ . Quare rectangula  $\dot{ax} \times \dot{C}D$ ,  $\dot{C}X \times \dot{C}D$  erunt inter se æqualia. Quare  $\dot{ax}$  erit ad  $\dot{C}D$  ut  $CX$  ad  $CD$ . Quare rectangulum  $\dot{ax} \times xr$ , sive fluxio spatii hyperbolici  $axr$ , erit ad rectangulum  $\dot{C}D \times xr$  ut  $CX$  ad  $CD$ .

Præterea cum sit  $xr$  (fig. 5) dupla recta  $RT$  (fig. 10), dimidium rectanguli  $CX \times xr$ , sive triangulum  $Cxr$ , æquale erit rectangulo  $CX \times RT$ . Verum rectæ  $CX$ ,  $RT$  eodem modo fluunt. Nam  $RT$  necessario fluere eodem modo, quo  $xr$ , cujus illa  $RT$  est semis. Et  $xr$ , quæ ordinatim applicata est ad axem transversum hyperbolæ, eodem modo, quo abscissa  $CX$  fluere. Fluunt igitur, sicut dixi, illæ  $CX$ ,  $RT$  eodem modo. Illis autem eodem modo fluentibus, fluxio rectanguli  $CX \times RT$ , cujus eæ sunt latera, summæ rectangulorum  $\dot{C}X \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}X \times \dot{RT}$  æqualis erit. Erit autem  $\dot{C}X \times \dot{RT}$  ad  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ , ut  $\dot{C}X$  ad  $\dot{C}D$ . Sed ostensa est  $\dot{ax}$ , vel  $\dot{C}X$ , esse ad  $\dot{C}D$  ut  $CX$  ad  $CD$ . Rectangulum igitur  $\dot{C}X \times \dot{RT}$  ad rectangulum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  rationem habet eam quam  $CX$  ad  $CD$ . Sed rectangulum etiam  $\dot{C}X \times \dot{RT}$  ad rectangulum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  rationem habet quam  $CX$  ad  $CD$ . Summa igitur rectangulorum  $\dot{C}X \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}X \times \dot{RT}$ , sive fluxio trianguli  $Cxr$  (fig. 5), ad summam rectangulorum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  rationem habebit eam quam  $CX$  ad  $CD$ . Sed ostensum est fluxionem spatii hyperbolici  $axr$  ad rectangulum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ , sive ad duplum rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ , rationem habere eam quam  $CX$  ad  $CD$ . Quare & illud quo fluxio spatii hyperbolici  $axr$  abest à fluxione trianguli  $Cxr$ , hoc est fluxio sectoris hyperbolici  $car$ , ad illud quo duplum rectangulum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  à summâ rectangulorum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  abest, hoc est, ad differentiam rectangulorum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ , eandem etiam rationem geret, quam  $CX$  ad  $CD$ . Fluxio inquam sectoris hyperbolici  $car$  ad rectangulorum  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  differentiam.

rentiam rationem habebit quam  $CX$  ad  $CD$ . Rectangulorum autem  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  differentia fluxio est rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ . Nempe cum illæ  $CD$ ,  $RT$  modis contrariis fluant. Fluit enim  $CD$  (fig. 10) contrario modo atque  $CX$  (fig. 5), cum illæ  $CD$ ,  $CX$  datum spatium contineant. Sed ostensa est illa  $CX$  eodem modo fluere quo  $RT$ . Quare  $CD$ ,  $RT$  modis contrariis fluunt, rectangulorumque  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ ,  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  differentia fluxio erit rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$ . Erit igitur fluxio sectoris hyperbolici  $car$  (fig. 5) ad fluxionem rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  (fig. 10) ut  $CX$  (fig. 5) ad  $CD$  (fig. 10).

Jam verò ex æquatione illâ, quam analysis nobis expromebat,  $RT^2 = \frac{b^2 - a^2 y^2}{y^2}$ , designante utique literâ  $y$  rectam  $CD$ , veniet  $RT = \frac{\sqrt{b^2 - a^2 y^2}}{\sqrt{2} \times y}$ ; et  $RT \times CD = \sqrt{\frac{b^2 - a^2 y^2}{2}}$ . Unde rursus  $\dot{RT} \times \dot{CD} = \frac{-a^2 y \dot{y}}{\sqrt{2b^2 - 2a^2 y^2}}$ . Quare  $\dot{C}D \times \dot{RT} \times \frac{q^2 CV^2}{a^2 y^2} = \frac{q^2 CV^2}{y \sqrt{2b^2 - 2a^2 y^2}} \times -y = DC \times -y$ . Notis autem  $DC \times -y$  designatur fluxio areæ  $avdc$ , in figurâ 10<sup>a</sup>. Quare  $\dot{C}D \times \dot{RT} \times \frac{q^2 CV^2}{a^2 y^2} = \dot{avdc}$ .

Hoc est, fluxio areæ  $avdc$  ad fluxionem rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  rationem habet compositam è rationibus spatii  $q^2$ , sive rectanguli  $CV \times QW$ , ad  $a^2$ , sive quadratum ex  $CA$ ; quadraticque ex  $CV$  ad quadratum ex  $y$ , vel  $CD$ ; compositam igitur è rationibus rectanguli  $CV \times QW$  ad quadratum ex  $CA$ , rectæque  $CX$  (fig. 5) ad rectam  $CD$ ; eam igitur quæ est Solidi  $CV \times QW \times CX$  ad Solidum  $CA^2 \times CD$ . Sed ex suprâ ostensis, fluxio rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  (fig. 10) erit ad fluxionem sectoris hyperbolici  $car$  (fig. 5) ut  $CD$  (fig. 10) ad  $CX$  (fig. 5); sive ut Solidum  $CA^2 \times CD$  ad Solidum  $CA^2 \times CX$ . Cum igitur fluxio areæ  $avdc$  sit ad fluxionem rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  ut Solidum  $CV \times QW \times CX$  ad Solidum  $CA^2 \times CD$ , fluxio autem rectanguli  $\dot{C}D \times \dot{RT}$  ad fluxionem sectoris hyperbolici  $car$  ut Solidum  $CA^2 \times CD$  ad Solidum  $CA^2 \times CX$ ; ex æquo, fluxio areæ  $avdc$  erit ad fluxionem sectoris hyperbolici  $car$ , ut rectangulum  $CV \times QW$  ad quadratum ex  $CA$ . Et cum hæc data sit fluxionum inter ipsas ratio, fluentibus etiam aut eadem interveniet, aut altera earum dato quodam spatio major erit quàm pro hac ratione. (Geometr. Flux. Th. IV.)

Fluat igitur  $CD$  (fig. 10) donec ipsi  $CV$  æqualis evadat. Jam in fig. 5<sup>a</sup> sector hyperbolicus sit  $car$ , area autem  $avdc$  (fig. 10) in nihilum abierit. Quare sector hyperbolicus  $car$  dato cas semper major erit, quàm ut habeat ad aream  $avdc$  rationem eam, quam quadratum ex  $CA$  ad rectangulum  $CV \times QW$ . Sector igitur  $car$  ad aream  $avdc$ , sive illi æqualem sectorem  $acx$  datam illam rationem habebit. Capiatur in fig. 5. sector circularis  $vcf$  qui ad sectorem hyperbolicum  $acs$  rationem eam habeat, quam rectangulum  $CV \times QW$  ad quadratum ex  $CA$ . Punctum ipsum  $f$  erit ad Curvam, quam punctum  $p$  perpetuo tangit. Nam si recta, quæ hyperbolam in  $s$  contingat, axi  $ca$  in  $\sigma$  occurrat, erit  $CV$  ad  $CS$  ut quadratum ex  $CV$  ad quadratum ex  $ca$ . (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLIX.) Quare  $cf$ , cum æqualis ea sit rectæ



PRÆPRIMA.  
CASUS SE-  
CUNDUS.

rectæ  $cv$ , erit ad  $co$  ut quadratum  $ex\ cv$  ad quadratum  $ex\ ca$ . Punctum igitur  $f$  ad Curvam est, quam punctum  $p$  perpetuo tangit. Præterea cum sector hyperbolæ  $acs$  ad sectorem circuli  $vcf$ , sector item hyperbolæ  $acr$  ad sectorem circuli  $vcp$  rationem habeat eam, quam quadratum  $ex\ ca$  ad rectangulum  $cv \times qv$ ; idcirco sector etiam hyperbolæ  $scr$  ad sectorem circuli  $scp$  eandem illam rationem habebit. Hoc est, eandem quam sector ille hyperbolæ  $scr$  ad sectorem circulem  $vcx$  (fig. 10) ostensus est habere. Sectors igitur circulares  $vcx$  (fig. 10)  $scp$  (fig. 5) inter se æquales. Æquales autem radii  $vc$ ,  $sc$ . Quare anguli quoque  $vcx$ ,  $scp$  inter se æquales erunt. Rursum cum rectangulum  $cd \times cx$  (fig. 10) æquale sit quadrato  $ex\ cv$  (fig. 5) ita enim factum est, rectangulum autem  $ci \times cx$  (fig. 5) æquale quadrato  $ex\ ca$  (Hamilton. Conic. Lib. 1. Prop. XLIX.) idcirco erit  $cd \times cx$  ad  $ci \times cx$  ut  $cv^2$  ad  $ca^2$ . Quare  $cd : ci = cv^2 : ca^2$ . Est autem  $cp : ci = cv^2 : ca^2$ . (Ita enim factum est.) Erunt igitur  $cp$  (fig. 5),  $cd$  seu  $ci$  (fig. 10) inter se æquales. Et simili argumentatione Curvarum  $vk$ ,  $fp$ , radii omnes qui cum primariis illis  $cv$ ,  $cf$  angulos æquales faciant, ostendentur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes erunt & æquales. Q. E. D.

*De naturâ Curvæ  $fp$ ; de Apfidibus ejus inveniendis, perficiendâque ejus figurâ; de Temporibus etiam definiendis, quibus data ejus spatia corpora absolvant. De Tempore conversiōnis integræ per Curvam perfectam, ejusque ad tempus conversiōnis in Circulo, necnon ad tempus casûs recti, ratione.*

#### § I. DEFINITIO.

*Puncta  $r$  &  $p$  (fig. 5), cognata dico Hyperbolæ Curvæque.*

2. Curva  $fp$  centrum suum  $c$  gyris innumeris cinget, quorum arctissimi propius idem accedent quam pro datâ quâlibet distantia.

3. Capiatur  $cm$  (fig. 5) duarum  $ca$ ,  $cv$  proportionē tertia. Erit  $m$  punctum ubi Curva  $fp$  axi hyperbolæ  $ca$  producto occurret. Etenim fluente arcu hyperbolæ  $ar$ , Curvæque  $fp$ , arcu  $ar$  tandem ad nihilum redacto, radius  $cp$  congruet cum axe  $ca$  producto, punctaque  $r$ ,  $x$  cum puncto  $a$  congruent; &  $ca$  ultima erit rectæ  $cx$  magnitudo. Jam verò cum  $cd$  (fig. 10), sive illi æqualis  $cp$  (fig. 5) duarum  $cx$ ,  $cv$  semper sit proportionē tertia, cum  $cx$  æqualis facta fuerit datæ  $ca$ , fiet  $cp$ , quam positione cum  $ca$  congruere ostendimus, fiet ea duarum  $ca$ ,  $cv$  proportionē tertia. Rectæ igitur  $cm$  æqualis ea fiet, et punctum  $m$  cum puncto  $m$  congruet.

4. Scriptâ modo quo diximus Spirâ  $cpm$ , si a quolibet ejus puncto  $n$  in axem hyperbolæ  $ca$  ad perpendicularum demittatur  $pn$ , & in  $pn$  productâ, ad alteram partem axis capiatur  $no$  ipsi  $pn$  æqualis, atque hoc semper fiat; nova efformabitur Spira  $moc$ , prioris per omnia similis & æqualis, sed ab alterâ parte axis posita, sinubusque adversis. Hanc autem ex semihyperbolâ  $aw$  eodem modo efformare licet, quo alteram ex semihyperbolâ  $ar$  efformare docuimus. Jam si junctæ  $nc$ ,  $oc$  ultra centrum producantur,

tur, & in productis capiantur  $ch$ ,  $cl$  ipsis  $cn$ ,  $co$  æquales, atque hoc semper fiat; novæ rursum existent Spiræ, priorum per omnia similes & æquales, quæ priorum Oppositæ haud immerito nominentur; quippe quibus eadem planè cum Hyperbolâ oppositâ, quæ prioribus cum hyperbolâ  $ar$ , cognationes intercedunt. Quo enim modo priores ex hyperbolâ  $ar$  efformatæ sunt, eodem hæc ex oppositâ efformari poterunt.

5. Hæ Spiræ Oppositæ unam tantummodo figuram constituere censendæ sunt, sicut Hyperbolæ Oppositæ, ex quibus illæ sunt efformatæ, unam.

6. Radius quisque  $cr$ , à centro  $c$  Spiras usque eductus, angulum cum Curvâ faciet, qui hoc modo definitur (vid. fig. 6).

A puncto hyperbolæ cognato  $r$  ad axem transversum deducatur  $rx$  ordinatum, quæ in puncto  $d$  media dividatur. In abscissâ  $cx$  capiatur  $xg$ , quæ habeat ad  $cx$  rationem eam, quam (in fig. 10)  $qv$  ad  $cv$ . Junctâ  $dg$ , angulus  $xdg$  æqualis erit ei, quo radius  $cr$  inclinatur ad Curvam.

Nam, in fig. 10, rectangulum  $st \times cd$  rectangulo  $cv \times qv$  æquale est. Id enim in demonstratione nostrâ Propositionis XLI. Libri primi Principiorum ostensum est. Et in fig. 6, rectangulum  $cx \times cp$  quadrato  $ex\ cv$  æquale est. Quare rectangulum  $st \times cd$  (fig. 10) erit ad rectangulum  $cx \times cp$  (fig. 6) ut rectangulum  $cv \times qv$  ad quadratum  $ex\ cv$ . Quare  $st$  (fig. 10) ad  $cx$  (fig. 6) ut  $qv$  ad  $cv$ . Est autem  $xg$  ad  $cx$  ut  $qv$  ad  $cv$ . Quare  $st$  eandem quam  $xg$  ad illam  $cx$  rationem habet. Erunt igitur  $st$ ,  $xg$  inter se æquales. Sed &  $xd$ ,  $rt$  inter se sunt æquales. Nimirum cum illa  $xd$  facta est, & illa  $rt$  ostensa est, semissis rectæ  $xr$ . Anguli quoque  $gxd$ ,  $str$  inter se æquales, rectus enim uterque. Quare & angulus  $xdg$  (fig. 6), angulo  $trs$  (fig. 10) æqualis erit. Sed angulus  $trs$  æqualis est ei, quo radius  $ci$  ad Curvam  $vik$  inclinatur, ita enim factus est; & propter Curvarum  $vik$  (fig. 10)  $fp$  (fig. 6) æqualitatem & similitudinem, radii  $ci$ ,  $cp$  qui æquales angulos cum primariis uterque suis,  $cv$ ,  $cf$ , constituunt, ad Curvas item uterque suas æqualiter erunt inclinati. Angulus igitur  $xdg$  æqualis erit ei quo radius  $cr$  ad Curvam inclinatur. Q. E. D.

7. Per  $a$  verticem hyperbolæ ducatur recta  $ak$  quæ hyperbolam in vertice  $a$  contingat, et asymptotarum alteri in  $k$  occurrat. Media dividatur  $ak$  in puncto  $l$ . Capiatur  $aq$ , quæ ad semiaxem transversum eam rationem habeat, quam  $qv$  ad  $cv$ ; et jungatur  $ql$ . Angulus quo radius quilibet Spirarum  $cr$  ad Curvam inclinatur angulo  $qla$  major erit: sed radio mobili  $cr$  circum centrum  $c$  circumacto, et infinite imminuto, angulus inclinationis ille usque minuetur, ut ad æqualitatem cum dato  $qla$  propius tandem redactus erit, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Occurrat enim  $xr$  asymptotæ  $ek$  in  $v$ . Media dividatur  $xv$  in  $b$  & jungatur  $gb$ . Propter parallelas  $ak$ ,  $xv$ , erit  $cx$  ad  $xv$  ut  $ca$  ad  $ak$ . Et  $cx$  ad semissem illius  $xv$ , ut  $ca$  ad semissem ipsius  $ak$ , hoc est ad  $al$ . Est autem  $xg$  ad  $xc$ , ut  $qv$  ad  $cv$ , sive ut  $aq$  ad  $ca$ . Cum igitur sit  $xg : xc = aq : ac$   
et  $xc : xb = ac : al$   
ex æquo erit  $xg$  ad  $xb$  ut  $aq$  ad  $al$ . Anguli autem  $gxb$ ,  $gal$  inter se æquales, nempe cum uterque rectus sit. Triangula igitur  $gxb$ ,  $gal$  inter se

SPIRÆ HY-  
PERBOLICÆ  
OPPOSITÆ.

Anguli radio-  
rum cum  
Curvâ.

Angulus mi-  
nimus.

Pars PRIMA. se similia, angulique  $gbx$ ,  $q/a$  inter se æquales erunt. Sed recta  $xr$  minor est quàm  $xv$ . Quare semissis rectæ  $xr$  minor est quàm semissis rectæ  $xv$ , hoc est  $xd$  minor est quàm  $xb$ . Quare angulus  $gdx$  angulo  $gbx$ , atque ejus æquali  $q/a$  major (El. I. 21.) Quare et angulus quo radius  $cp$  ad Curvam inclinatur, cum ostensus sit æqualis angulo  $gdx$ , idem angulo  $q/a$  major erit.

Jam verò radio  $cp$  infinitè imminuto,  $cx$  infinitè augebitur; propter perpetuam trium  $cp$ ,  $cv$ ,  $cx$  proportionis convenientiam. Infinitè autem aucta  $cx$ , illæ  $xr$ ,  $xv$ , atque earum proinde semissēs, æqualitatem infinitè accedent, et triangula  $x dg$ ,  $q/a$  similitudinem. Angulus igitur  $gdx$  minuetur usque, et illi  $q/a$  ultimò æqualis fiet. Quare et angulus inclinationis radii  $cp$  ad Curvam, qui eâ lege fluit ut fluenti  $gdx$  semper sit æqualis, ille mō æqualis erit. Constat igitur propositum.

Spirarum  
Apsides.

8. Puncta  $a$ ,  $m$  Hyperbolæ Spiræque sunt cognata (per § 3. & Def.) Angulus igitur, quo radius  $cm$  ad Spiram inclinatur, æqualis erit angulo  $gdx$ , qualis tunc ille factus fuerit, cum, radio  $cp$  in  $cm$  aucto, puncta  $r$ ,  $x$  locum  $a$ , ipsum utique verticem hyperbolæ, devenerint. At verò decrescēte arcu hyperbolico  $ar$ , angulus  $gdx$  augetur usque; et tunc cum, arcu illo ad nihilum redactō, puncta  $r$ ,  $x$  locum  $a$  devenerint, rectus ille factus erit. Radius igitur  $cm$  Curvam ad perpendicularum insitit. Hoc est punctum  $m$  Spirarum Apsis erit. Et si capiatur  $cm$  æqualis rectæ  $cm$  erit  $m$  Oppositarum Apsis.

Velocitas  
motus in  
Spiris Hy-  
perbolicis.

9. Velocitas corporis per has Spiras lati in loco quovis  $p$  erit ut recta  $gd$ . Et velocitas in Apside erit ad velocitatem in alio quovis loco  $p$  ut  $qa$  ad  $gd$ . Namque ex iis quæ § 7. ostendimus, liquet illam  $gd$  rectæ  $rs$  in figurâ 10 æqualem esse. Est autem  $rs$  ut velocitas in loco  $r$  illius figuræ, vel  $p$  hujus. Præterea puncto  $p$  in  $m$  translato, puncta  $x$ ,  $r$  transferentur in  $a$ , &  $gd$  æqualis fiet illi  $qa$ .

10. Si è loco  $f$ , in alterâ Spirarum Oppositarum dato, corpus aliquod secundum rectam, quæ spiram ibi loci contingat, justâ cum velocitate emissum fuerit, urgentibus utique viribus centripetis, quæ rationem inter se triplicatâ distantiarum contrariam constanter servant; corpus illud per Spiram  $pc$  delatum gyris innumeris circum centrum  $c$  circumagetur; atque intra certum quoddam temporis spatium, cujus definiendi rationem mox sumus tradituri, centrum illud propiùs quidem accefferit, quàm pro datâ quavis distantia; ipsum verò nunquam attinget: at elapso tempore illo, centrum quod transire ei non licuit, prætergressum Spiram Oppositam invaserit, cujus ductum sequens, Apfidem usque  $m$  ascendet. Ubi paulatim converso rursum, centrum versus, inire per Spiram  $m lc$  deferetur, centrumque ut antè prætergressum per spiram  $com$  Apfidem usque alteram,  $m$ , ascendet. Inde rursum per spiram  $amc$  deferetur, eandemque in perpetuum ibit redibitque vias.

11. Quadraturam spatiorum, quæ Spirarum de quibus agimus datæ partes claudant, hæc ratione perficio.

Jam

Jam antè per analyfin obtinuimus  $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^2 - 2a^2 y^2}}$ . Hinc  $db \times -y =$  Spirarum  
Hyperbolicarum  
Quadratura.

$\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^2 - 2a^2 y^2}} \times -y$ . Atque hæc erit fluxio areæ  $avdb$ , five illi æqualis  $vci$ , in figurâ 10, vel areæ  $fcp$  in figurâ illâ 6, quam modò lineavimus. Area igitur  $vci$ , vel  $fcp$  ( $= [db \times -y]$ ) spatium  $\frac{q^2}{2a^2} \sqrt{2b^2 - 2a^2 y^2}$ , five  $\frac{q}{\sqrt{2} \times a} \sqrt{b^2 - y^2}$ , vel æqualis erit, vel eo major minorve dato (Newton. Tab. Curv. I. Class. iv. Form. 1.) idque quæcunque assumpta fuerit distantia  $cv$ , vel  $cf$ , modo datâ  $cm$  non sit major, quâ utique majori esse non licet. Ponatur igitur  $cf$ , ipsi  $cm$  æqualis, ut area  $fcp$  in aream  $mcp$  transeat, et angulus  $cvg$  (in fig. 10, & illi æqualis  $qvw$ ) rectus fiat. Et in figurâ 10, capiatur  $cm$  rectæ  $cm$  in figurâ sextâ æqualis. Tum  $q^2$  fiet  $cm \times vq$  (fig. 10), five  $cm \times qa$  (fig. 6), et  $b^2$  fiet  $cm \times ca$  (fig. 10, five  $cm \times ca$  (fig. 6), rectâ utique  $uw$  ad nihilum redactâ. Notæ autem  $\sqrt{2} \times a$  rectam  $ce$  semper significant. Area igitur  $mcp$  (fig. 6) spatium  $\frac{cm \times qa}{ce} \sqrt{cm^2 - cp^2}$  vel æqualis vel eo major minorve dato erit. Fluat  $y$ , vel  $cp$ , donec ipsi  $cm$  evaserit æqualis. Tum puncto  $p$  in ipsum  $m$  translato, area  $mcp$  in nihilum abierit. In nihilum etiam spatium illud  $\frac{cm \times qa}{ce} \sqrt{cm^2 - cp^2}$ . Area igitur  $mcp$  spatium isto, quod simul cum eâ in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur  $c$ , radio  $cm$ , scribatur circulus (fig. 7) qui rectæ  $ce$ , radium  $cm$  ad perpendicularum insistenti, in punctis  $o$ ,  $o$  occurrat. Ad rectam  $ce$  ( $= cb$  fig. 5) applicetur rectangulum  $cz$  rectangulo  $cm \times qa$  æquale. In  $cm$  capiatur  $cn$  spirarum radio  $cp$  æqualis. Educatur ad perpendicularum  $no$ , quæ circulo in  $o$  occurrat, et in  $o$  deducatur ad perpendicularum  $mp$ . Si punctum  $p$  in eadem spirâ sit, in quâ est apsis  $m$ , sector spiræ  $mcp$ , axe  $cm$  radioque  $cp$  interceptus, rectangulo  $cz \times cp$  æqualis erit: area verò quæ inter brachium spirarum totum  $mpe$  axemque  $mc$  est conclusa, rectangulo  $cz \times co$ : pars illius areæ, à loco  $p$  centrum usque, rectangulo  $cz \times po$ . Area verò  $mpe$ , ab apside  $m$  per brachium spiræ  $mpe$  centrum usque atque à centro rursum usque punctum  $\pi$  brachii oppositi, quod à centro parâ distantia cum ipso  $p$  remotum sit, hæc inquam area rectangulo  $cz \times co + op$  æqualis erit: atque spatium illud omne, quod Spiræ Oppositæ intus habent, duplum erit rectanguli  $cz \times oo$ .

12. Hinc parte quartâ temporis conversionis integræ, per Spiras quo supra § 11. exposuimus modo perficiendæ, corpus ab Apside  $m$ , per spiram  $mpe$  delatum, propiùs centrum  $c$  accefferit quàm pro datâ quavis distantia. Tempus autem quo conficitur area, quæ, à dato spirarum puncto  $p$  initium fumens, circa centrum desinat, erit ad tempus, quo conficitur area, quæ, ab apside  $m$  initium fumens, circa centrum item desinat, hoc est ad partem quartam temporis conversionis integræ, ut sinus versus arcus ejus cujus sinus est  $cp$  pro radio  $cm$  ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apside  $m$  initium fumens, ad radium  $cp$  ejusdem spiræ in quâ est  $m$  terminetur, erit ad partem quartam temporis conversionis integræ, ut co-  
sinus

Tempora  
moveni in  
Spiris Hy-  
perbolicis  
desiniantur.

PARS PRIMA.  
CASUS SE-  
CUNDUS.

finus arcus ejus, cujus finus est  $cp$  pro radio  $cm$ , ad radium. Tempus autem, quo conficitur area, quæ, ab apside  $M$  initium sumens, ad punctum  $\pi$  spiræ oppositæ terminetur, erit ad partem quartam temporis conversionis integræ, ut summa radii et finus versus ejus arcus, cujus finus est  $cp$  pro radio  $cm$ , ad radium. Atque horum ope facilis erit Temporum æstimatio, quibus conficiantur area, quæ datis quibuscunque spirarum radiis interceptæ sint.

13. Velocitas corporis per Spiras lati in loco quovis  $v$  (fig. 10), est ad velocitatem corporis quod, urgentibus eisdem viribus centripetis, circumagitur in Circulo, cujus radius  $cv$ , ut recta quæ possit spatium illud, quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cv$  ad rectam ipsam  $ca$ . Occurrat enim  $va$  rectæ  $cb$  in  $\mu$ . Recta  $vq$  est ad rectam, quæ potest spatium illud quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cv$ , ut  $ca$  ad  $c\mu$ . Nimirum hoc ipsum vult æquatio illa, quam analysis nobis expromebat,  $vq = \frac{ca}{\sqrt{2} \times cv} \sqrt{ca^2 - cv^2}$ . At verò si corpus à distantiis infinitis cecidisset, ut adeptum esset in  $v$  velocitatem illam quæ est corporis in Circulo ad distantiam  $cv$  circumacti,  $vq$  habuisset ad ipsam  $ca$  rationem eam quam  $ca$  ad  $c\mu$ . Id quod quivis intelliget, qui Propositionis XXXIX. Newtonianæ Doctrinam perceptam habeat, quique nostram simul casum tum superioris tum hujusce analysis in memoriâ teneat. Quare illa  $vq$ , quæ velocitatem corporis per spiras lati in loco  $v$  repræsentat, ad rectam, quæ potest spatium quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cv$ , eandem rationem habet quam altera  $vq$ , quæ corporis in Circulo velocitatem refert, ad ipsam  $ca$ . (El. v. 11.) Permutando illa prior  $vq$  erit ad hanc alteram ac proinde velocitas illa prior in puncto spirarum  $v$ , erit ad hanc alteram in Circulo velocitatem, ut recta, quæ potest spatium quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cv$ , ad ipsam  $ca$ .

Tempora  
conversionum  
integrarum  
in Spiras  
conferantur  
cum Tempo-  
ribus conver-  
sionum in  
Circulis.

14. Scriptis Spiras quarum centrum  $c$ , apsidæ  $M, m$  (fig. 8), si centro  $c$ , radio  $cm$  scribatur Circulus, et à puncto  $A$  agatur recta  $AF$  quæ circum illum contingat, et si sit  $F$  punctum contactus; velocitas corporis per Spiram lati in Apside ipsâ  $M$ , ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius  $cm$ , circumacti, rationem habebit eam quam recta  $AF$  ad  $ca$ . Namque quadratum ex  $AF$  æquale est rectangulo  $MA \times AM$  (El. III. 36.) Et hoc rectangulum est illud quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cm$  (El. II. 6.) Recta igitur  $AF$  ea est, quæ potest spatium quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cm$ . Constat igitur propositum ex superiore.

15. E loco  $M$  exire intelligantur corpora duo, quorum alterum per Circulum, centro  $c$ , radio  $cm$  scriptum, feratur, alterum per Spiras Hyperbolicas Oppositas, quarum centrum  $c$ , Apfides  $M, m$ ; urgentibus utique viribus quæ centrum  $c$  respiciant, et rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter fervent. Tempus conversionis integræ per Spiras ad Tempus conversionis integræ in Circulo rationem habebit, quæ componetur è rationibus rectæ  $ca$  ad  $cm$ , radiique circuli ad partem quartam circuitus. Hoc est, si circuitus circuli qui radium habet  $cm$ , rectæ  $p$  æqualis sit, erit Tempus conversionis per Spiras ad tempus conversionis in Circulo ut  $ca$  ad  $\frac{1}{4}p$ .  
Exponatur

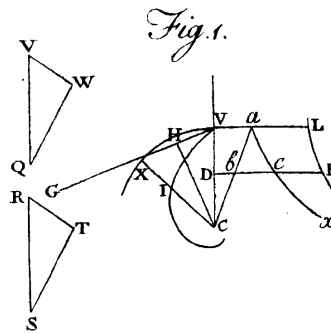


Fig. 1.

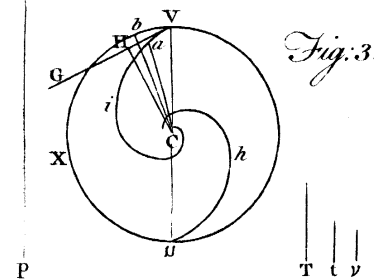


Fig. 3.

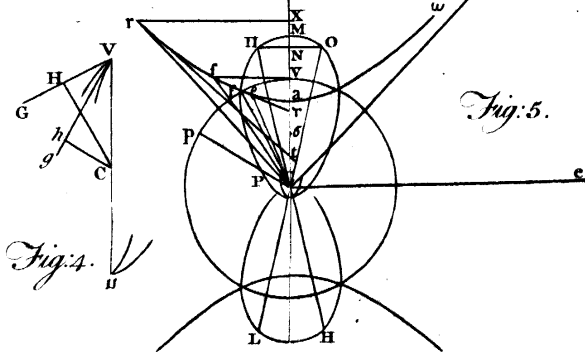


Fig. 5.

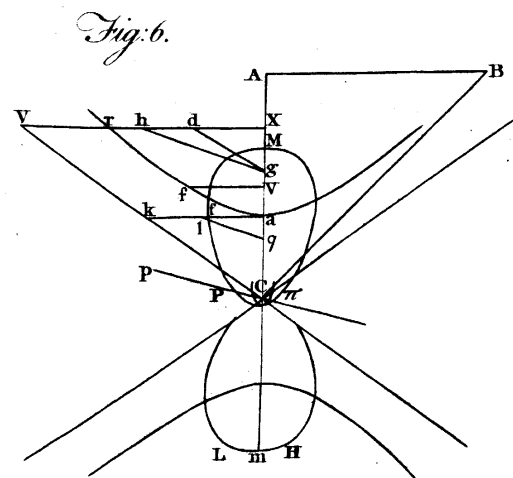


Fig. 6.

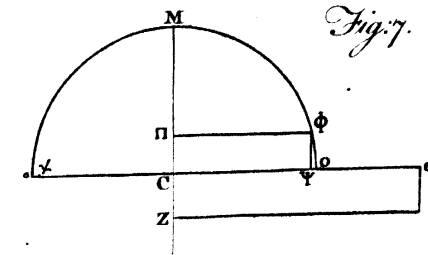


Fig. 7.

Exponatur recta  $\tau$  datae cujusvis longitudinis. Sit alia  $\Theta$ , quæ ad illam  $\tau$  rationem habeat, quam tempus conversionis per Circulum ad tempus conversionis per Spiras. Dico illam  $\tau$  ad hanc  $\Theta$  rationem habere eam quam  $ca$  ad  $\frac{1}{2}p$ . Sint  $mce$ ,  $mcd$  sectores Circuli Spiræque motûs initio simul confecti, et habeat recta  $t$  ad rectam  $\tau$  rationem illam, quam tempus quo conficiuntur sectores illi ad tempus conversionis integræ per Spiras. Habeat autem  $t$  ad aliam rectam  $\nu$ , rationem eam quam sector Spiræ  $mce$  ad sectorem Circuli  $mcd$ . Designet denique litera  $A$  spatium illud omne, quod Spiræ Oppositæ intus habent.

Jam spatium  $A$  ad aream circuli  $mmf$  rationem habet, quæ est rectanguli  $\tau \times t$  ad rectangulum  $\Theta \times \nu$ . Id enim eisdem planè argumentis ostendi potest, quibus in § 10 casûs superioris ostendimus  $A$  esse ad aream circuli  $vux$  ut  $\tau \times t$  ad  $\Theta \times \nu$ . Jam verò  $t$  ad  $\nu$  rationem habet, quam sector spiræ  $mce$  ad sectorem circuli  $mcd$ , hoc est, eam quam  $af$  ad  $ca$ . Nam velocitates quibuscum corpora duo, quorum alterum per Spiras, alterum per Circulum feratur, è loco  $m$  exeant, sunt inter se sicut rectæ  $fa$ ,  $ca$  (per § 14). Et arcus nascentes spiræ circuli que,  $me$ ,  $md$ , erunt primò quidem inter se sicut velocitates illæ. Sectoribus igitur  $mce$ ,  $mcd$  nascentibus prima ratio, cum ea sit illa quæ rectangulis etiam nascentibus  $cm \times me$ ,  $cm \times md$  est prima, ea erit, quæ rectis datis  $fa$ ,  $ca$  intercedat. Quæ verò sectoribus  $mce$ ,  $mcd$  prima fuerit ratio, ea quidem, dummodo simul conficiantur, semper inter eos manet. Habet igitur, sicut modò asseveravimus, recta  $t$  ad  $\nu$  rationem illam quam  $fa$  ad  $ac$ . Rectangulum igitur  $\tau \times t$  ad rectangulum  $\Theta \times \nu$  rationem habet, eam quam rectangulum  $\tau \times fa$  ad rectangulum  $\Theta \times ca$ . Sed ostensum est spatium  $A$  ad aream circuli  $mqf$  rationem habere eam, quam  $\tau \times t$  ad  $\Theta \times \nu$ . Habebit igitur spatium  $A$  ad aream circuli  $mqf$  rationem eam, quam rectangulum  $\tau \times fa$  ad rectangulum  $\Theta \times ca$ . Atqui spatium  $A$  duplo rectangulo  $cz \times o$  æquale est (secundum ea quæ nos, § 12, ostendimus). Et area circuli  $mqf$  rectangulo  $\frac{1}{2}p \times cm$  æquale est (secundum ea quæ demonstravit Archimedes). Rectangulum igitur  $2cz \times o$  erit ad rectangulum  $\frac{1}{2}p \times cm$ , ut rectangulum  $\tau \times fa$  ad rectangulum  $\Theta \times ca$ . Hoc est, cum recta  $o$  dupla sit rectæ  $cm$ , rectangulum  $4cz \times cm$  erit ad rectangulum  $\frac{1}{2}p \times cm$ , sive  $8cz \times cm$  ad  $p \times cm$ , sive denique  $8cz$  ad  $p$ , ut  $\tau \times fa$  ad  $\Theta \times ca$ . Quare rectangulum  $8cz \times ce$  ad rectangulum  $p \times ce$ , sive  $cz \times ce$ , ad  $\frac{1}{8}p \times ce$ , ut  $\tau \times fa$  ad  $\Theta \times ca$ . Permutando  $cz \times ce$  ad  $\tau \times fa$  ut  $\frac{1}{8}p \times ce$  ad  $\Theta \times ca$ . Rectangulum autem  $cz \times ce$  rectangulo  $cm \times qa$  æquale est (§ 9 & 11). Erit igitur  $cm \times qa$  ad  $\tau \times fa$  ut  $\frac{1}{8}p \times ce$  ad  $\Theta \times ca$ . Invertendo  $\tau \times fa$  ad  $cm \times qa$ , ut  $\Theta \times ca$  ad  $\frac{1}{8}p \times ce$ . Erit autem  $cm \times qa$  ad  $cm \times fa$  ut  $qa$  ad  $fa$ , hoc est ut  $ca$  ad  $mo$ . (Secundum ea quæ ex formulâ generali,  $vo = \sqrt{\frac{a^2 - a^2 c^2}{2c^2}}$ , suprà disputavimus, posito jam  $c = cm$ .) Jungatur  $mo$ . Triangula  $cab$ ,  $mom$ , cum angulos ad  $a$  et  $o$  rectos habent, lateraque circa angulos rectos utrumque æqualia, idcirco inter se similia erunt. Et  $ca$  erit ad  $cb$  ut  $mo$  ad  $mm$ . Permutando  $ca$  ad  $mo$  ut  $cb$ , vel  $ce$ , ad  $mm$ . Rectangulum igitur  $cm \times qa$  erit ad rectangulum  $cm \times fa$  ut  $ce$  ad  $mm$  (El. v. 11.) sive ut  $\frac{1}{8}p \times ce$  ad  $\frac{1}{8}p \times mm$ .

Pars PRIMA.

Cum igitur sit  $T \times FA : CM \times ga = \Theta \times CA : \frac{1}{2}p \times CE$ ,

Atque rursum  $CM \times ga : CM \times FA = \frac{1}{2}p \times CE : \frac{1}{2}p \times MM$ ,  
ex æquo, erit  $T$  ad  $CM$  ut  $\Theta \times CA$  ad  $\frac{1}{2}p \times MM$ . Sive cum  $MM$  dupla sit rec-  
tæ  $CM$ , erit  $T$  ad  $CM$  ut  $\Theta \times CA$  ad  $\frac{1}{4}p \times CM$ . Quare  $T \times CA$  erit ad  $CM \times CA$   
ut  $\Theta \times CA$  ad  $\frac{1}{4}p \times CM$ . Permutando  $T : \Theta = CA : \frac{1}{4}p$ . Q. E. D.

16. Hinc si capiatur recta  $CA$  æqualis arcui  $MFO$ , sive parti quartæ cir-  
cuitus circuli cujus radius est  $CM$ , corpus è loco  $M$  secundum rectam quæ  
sit ad perpendicularum cum radio  $CM$  emissum, eâ cum velocitate quam casu  
recto è loco  $A$  locum usque  $M$  adeptum esset, conversionem integram eodem  
temporis spatio per Spiras suas absolverit, quo corpus aliud in Circulo  $MOF$ .

17. Pars quarta conversionis integræ per Spiras, hoc est tempus, quo  
corpus per Spiras ab apside  $M$  centrum propius fuerit delatum quam pro  
datâ quâvis distantia, ad tempus conversionis in Circulo rationem habebit  
eam quam  $CA$  ad totum circuli  $MMF$  circuitum. Nimirum cum sit  $T : \Theta =$   
 $CA : \frac{1}{4}p$ , erit  $\frac{1}{4}T : \Theta = CA : p$ .

18. Cum verò, qualiscunque fuerit rectæ  $CA$  longitudo, ea temporibus pro-  
portio intercedat, ut sit tempus per Spiras ab apside  $M$ , propiorem usque datâ  
quâlibet à centro  $C$  distantiam, ad tempus conversionis integræ in Circulo  
 $MMF$ , ut recta  $CA$  ad circuitum circuli  $MMF$ ; si recta  $CA$  paulatim decrescat,  
usquedum rectæ  $CM$  æqualis fiat, quo factò velocitas etiam corporis, è loco  
 $M$  secundum rectam quæ radius  $CM$  ad perpendicularum insistat emissi, pau-  
latim decrescet, punctoque  $A$  in ipsum  $M$  translato ad nullam planè redige-  
tur; tempus ultimum translationis de apside  $M$  centrum usque, per spiras  
in ipsam rectam  $MM$  ultimò abeuntes, hoc est tempus casus recti corporis,  
quod è loco  $M$ , nullâ vi insitâ præditum, casum occeperit, tempus inquam  
casus recti hujus corporis, è loco  $M$  centrum usque, erit ad tempus conver-  
sionis in circulo  $MMF$  ut  $CM$  ad circuitum circuli  $MMO$ , hoc est ut radius  
circuli ad circuitum.

19. Tempora denique quibus casu recto rectæ  $MC$  partas datæ absolveren-  
tur, si corpus è loco  $M$  nullâ vi insitâ præditum casum occeperit, hæc ratione  
desinias. A puncto quovis  $G$  in rectâ  $CM$  educatur ad perpendicularum recta  
 $GH$ , quæ circulo, centro  $C$ , radio  $CM$  scripto, in  $H$  occurrat (fig. 9). Et à puncto  
 $H$  in radius  $CO$ , qui illum  $CM$  ad perpendicularum insistat, deducatur ad per-  
pendicularum recta  $HK$ . Tempus casus recti è loco  $M$  centrum usque  $C$  erit  
ad tempus casus recti locum usque  $G$  ut  $CO$  ad  $CK$ ; ad tempus autem casus  
reliqui à loco  $G$  centrum usque, ut  $CO$  ad  $OK$ . Hæc autem ex eo patent, quòd  
si recta  $HG$  spiris quibuslibet hyperbolicis, quarum centrum  $C$ , apsidæ  $M$ ,  $O$ ,  
in puncto  $P$  occurrat; tum si ponatur  $CP$  junctæ  $CP$  æqualis, educatæque ad  
perpendicularum  $PH$ , quæ circulo  $MOQ$  in  $\Phi$  occurrat, si à puncto  $\Phi$  in ra-  
dium  $CO$  ad perpendicularum deducatur  $\Phi\Psi$ : tempus, quo conficietur Spira-  
rum area quæ ab apside  $M$  initium sumens circa centrum  $C$  desinat, erit ad  
tempus quo conficietur area, quæ ab apside  $M$  initium sumens ad radius  $CP$   
desinat, ut  $CO$  ad  $C\Psi$ ; ad tempus autem, quo conficitur area ejusdem spiræ  
à loco  $P$  centrum usque, ut  $CO$  ad  $O\Psi$  (per ea quæ jam ante ostendimus  
§ 12). Et cum hæc sint temporum rationes, qualicunque Spiræ sint specie  
præditæ, hoc est, qualiscunque fuerit velocitas corporis per spiras lati in  
apside

apside  $M$ ; puta velocitatem illam infinitè minui, ut Spiræ, latitudine ipsa-  
rum infinitè imminutâ, in rectam  $MO$  tandem abeant. Jam spiris in rec-  
tam illam abeuntibus, brachium totum  $MPC$  in radius totum  $MC$  abit; pars  
brachii  $MP$  in radii partem  $MG$ ; pars reliqua, à puncto  $P$  centrum usque, in  
partem radii reliquam,  $GC$ . Tempus translationis per brachium  $MPC$  abit in  
tempus casus recti è loco  $M$  centrum usque, corporis utique quod, nullâ vi  
insitâ præditum, casum è loco  $M$  occeperit; tempus translationis per  $MP$   
in tempus casus recti locum usque  $G$ ; tempus translationis per spiram reli-  
quam, à loco  $P$  centrum usque, in tempus ulterioris casus recti è loco  $G$   
centrum usque. Præterea, puncto  $\Pi$  cum puncto  $G$  conjuncto, punctum  
 $\Psi$  cum puncto  $K$  coibit. Ex quibus facillè consequuntur ea, quæ de tem-  
poribus casus recti modò asseveravimus.

20. Tempus casus recti è loco  $M$  centrum usque, corporis utique quod  
nullâ vi insitâ præditum casum è loco  $M$  occeperit, duplum erit temporis,  
quo corpus, quod à distantis infinitis cecidit, ex eodem loco  $M$  centrum us-  
que devenit. Designetur enim tempus primum literâ  $T$ , tempus alte-  
rum hæc notâ  $\tau$ . Tempus autem conversionis integræ in circulo, cujus ra-  
dius  $CM$ , designetur literâ  $\Theta$ ; unde tempus translationis per quadrantem ejus  
circuli designabitur his notis,  $\frac{1}{4}\Theta$ . Erit autem  $T : \Theta = CM : p$  (§ 18 hu-  
jus) est autem  $\Theta : \frac{1}{4}\Theta = p : \frac{1}{4}p$ , et  $\frac{1}{4}\Theta : \tau = \frac{1}{4}p : CM$  (§ 15 casus superioris)  
ex æquo igitur  $T : \tau = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 4 : 2 = 2 : 1$ . Q. E. D.

## PARTIS PRIMÆ CASUS TERTIUS.

JAM verò è loco  $V$ , secundum rectam  $VG$ , (fig. 10) majore cum velocitate  
corpus intelligatur emitti, quam ea esset, quâcum corpus, viribus centralibus  
eisdem sollicitatum, in Circulo ferretur, cujus radius esset  $CV$ . Corporis igitur,  
è loco  $V$ , secundum rectam  $VG$  exeuntis velocitas major erit, quam  
casu recto à distantis infinitis locum usque  $V$  adeptum esset. Unde non-  
nulli, magni quidem viri, sed quibus durè loqui minùs certè quam nobis  
odiosum erat, velocitatem eam vocârunt, quam in loco  $V$  corpus adeptum  
esset, quod à distantis, si Diis placeat, plus quàm infinitis cecidisset. Ex-  
ponatur autem recta  $ed$  [vid. fig. 11] datæ cujusvis longitudinis, cujus ca-  
piatur pars  $d\zeta$ , quæ habeat ad datam  $d\epsilon$  rationem eam, quam velocitas cor-  
poris, circum centrum  $C$  per circulum cui radius  $CV$  lati, ad velocitatem quâ-  
cum corpus è loco  $V$  secundum rectam  $VG$  projectum est. Centro  $\epsilon$ , radio  $e\zeta$ ,  
scribatur circulus, cui in puncto  $\eta$  occurrat recta  $\zeta\eta$ , à puncto  $\zeta$  ad perpendicu-  
lum educa. Tum junctâ  $CV$  (fig. 10) capiatur  $CA$  ejus longitudinis, quæ ha-  
beat ad  $CV$  rationem eam, quam  $\zeta\eta$  ad  $e\zeta$ . Et manentibus quæ ad Analytin  
casus superioris lineavimus, intelligatur  $AB$  rectæ  $CA$  æqualis. Dataque  $CA$   
vel  $AB$  designetur literâ  $a$ , data  $CV$  literâ  $c$ , indefinita  $CD$  literâ  $y$ . Jam è na-  
turâ Curvæ  $BF$  invenietur  $DF$ , ut antè,  $= \frac{a^2}{y^2}$ . Unde  $DF \times -y = \frac{a^2}{y} \times -y$ .  
Quarum fluxionum fluentes sunt, alterius quidem area Curvæ  $BF$  ad ordi-  
natam  $DF$  terminata, alterius verò spatium his notis designandum,  $\frac{a^2}{y}$ . Hæc  
igitur

PARS PRIMA. igitur spatia vel semper erunt inter se æqualia, vel alterum altero majus erit dato. Intelligatur recta CD fluxu continuo infinite augeri. Jam spatium illud  $\frac{a^4}{2y^3}$ , rectâ CD, five  $y$ , infinite auctâ, in nihilum ultimò abibit.

Haud item area Curvæ DF ad ordinatam mobilem DF terminata; siquidem rectæ, quæ possint areas Curvæ BF, sint ut velocitates corporis casu recto centrum c petentis; quapropter area in nihilum abire nescit, nisi velocitate illâ ad nullam planè redactâ. Velocitas autem, quæ in dato loco v major fuit eâ, quam corpus casu recto à distantis infinitis locum usque v adeptum esset, ascensu quidem corporis minuetur usque; ita tamen ut ad nullam nunquam planè redigatur, ne rectâ quidem CD vel infinite auctâ. Vires enim centrales quicquid velocitatis in corpore cadente excitaverint, illud omne in ascendente restingunt. Quod vero corpus, è loco v projectum, plus habuit quàm casus infinitus genuisset, id ascensus ne infinitus quidem abolere poterit. Rectâ igitur CD infinite auctâ, manebit corpori ascendenti velocitas, quæ ad illam, quam in loco v habuit, rationem habebit eam, quam  $\epsilon\zeta$  ad  $\epsilon\delta$ . Ac propterea area DF, puncto D in infinitum abeunte, ejus permanebit magnitudinis, quæ ad Curvæ aream datæ ordinatæ VL conterminam, rationem habeat eam, quam quadratum ex  $\epsilon\zeta$  ad quadratum ex  $\epsilon\delta$ . Hoc igitur spatio, quod, spatio  $\frac{a^4}{2y^3}$  in nihilum abeunte, areæ Curvæ remanebit; hoc, in-

quam, area illa spatium  $\frac{a^4}{2y^3}$  semper exsuperabit. Literâ M significetur spatium, spatio illi ultimò superstiti æquale. Area igitur, ad ordinatam mobilem CD terminata, his notis designanda erit,  $M + \frac{a^4}{2y^3}$ : id est, partibus duabus constabit:

quarum altera dato M, altera spatio his notis designato,  $\frac{a^4}{2y^3}$ , æqualis erit. Quare area, quæ ad datam ordinatam VL terminata est, his notis designanda erit,  $M + \frac{a^4}{2y^3}$ . Hoc est si capiatur CN, duarum CV, CA proportionem tertia, area Curvæ, ad ordinatam VL terminata, æqualis erit spatio M dimidiâ parte quadrati ex CN aucto. Habet autem spatium M ad aream illam, ordinatæ VL conterminam, rationem eam, quam quadratum ex  $\epsilon\zeta$  ad quadratum ex  $\epsilon\delta$ . Invertendo et dividendo, dimidium quadrati ex CN ad spatium M rationem habebit eam, quam illud quo quadratum ex  $\epsilon\delta$  exsuperat quadratum ex  $\epsilon\zeta$  ad quadratum ex  $\epsilon\zeta$ . Hoc est, dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex  $\zeta\eta$  ad quadratum ex  $\epsilon\zeta$ . Verùm ut  $\zeta\eta$  ad  $\epsilon\zeta$  ita facta est CA ad CV. Quare ut quadratum ex  $\zeta\eta$  ad quadratum ex  $\epsilon\zeta$  ita erit quadratum ex CA ad quadratum ex CV. Quare dimidium quadrati ex CN erit ad M ut quadratum ex CA ad quadratum ex CV. (El. v. 11.) Sive propter continuam tribus illis CN, CA, CV proportionis convenientiam, ut quadratum ex CN ad quadratum ex CA. Cùm igitur sit  $\frac{1}{2}CN^2 : M = CN^2 : CA^2$ , erit spatium M dimidium quadrati ex CA (El. v. 15.) five  $M = \frac{1}{2}CA^2$ . Unde tandem area Curvæ BF, ad ordinatam mobilem DF terminata, his notis generaliter efferenda erit,  $\frac{1}{2}a^2 + \frac{a^4}{2y^3}$ .

Hinc

$$\text{Hinc veniet } UQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}}; \text{ et } RS = \sqrt{\frac{a^4 + a^2y^2}{2y^2}}.$$

$$\text{Sed } sr \text{ ut antè } = \frac{q^2}{y}. \text{ Unde } sr^2 = \frac{2q^4}{2y^2}. \text{ Unde } rt = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}.$$

Rectæ CA vel majori esse liceat quàm ea, cujus quadratum duplum sit quadrati ex uw, vel minori, vel ei denique æquale esse. Major erit, si talis sit angulus cvg, vel quw, ut quadratum è radio majus sit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem habeat rectæ CN + CV ad CV: Minor, si talis sit angulus cvg, ut quadratum è radio minus sit, quàm quod ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem, quam modo dixi, habeat: Æqualis, si talis sit angulus, ut quadratum è radio ad quadratum ex cosinu ejus rationem illam ipsam, quam CN + CV ad CV, habeat.

Sit enim  $R^2 : \cosin. quw^2 = CN + CV : CV = CA^2 + CV^2 : CV^2$ . Ex eo quòd sit  $UQ^2 = \frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}$ , erit  $2UQ^2 : CA^2 = CA^2 + CV^2 : CV^2$ . Quare  $R^2 : \cosin. quw^2 = 2UQ^2 : CA^2$ .

Sed  $R^2 : \cosin. quw^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$ , propter angulum ad w rectum.

Quare  $2UQ^2 : CA^2 = 2UQ^2 : 2UW^2$ . Unde  $CA^2 = 2UW^2$ .

At verò si  $R^2$  majus sit, quàm ut sit  $R^2 : \cosin. quw^2 = CN + CV : CV$ , erit idem  $R^2$  majus quàm ut sit  $R^2 : \cosin. quw^2 = 2UQ^2 : CA^2$ . Quare et  $2UQ^2$  majus, quàm ut esse possit  $2UQ^2 : 2UW^2 = 2UQ^2 : CA^2$ . Quare  $2UW^2$  minus erit quàm  $CA^2$ , five  $CA^2$  majus quàm  $2UW^2$ . Et simili modo si sit  $R^2$  minus, quàm ut sit  $R^2 : \cosin. quw^2 = CN + CV : CV$ , ostendetur  $CA^2$  minus quàm  $2UW^2$ .

Primum igitur talis sit angulus cvg, ut quadratum è radio majus sit, quàm quod habeat ad quadratum ex ejus anguli cosinu rationem eam, quam CN + CV ad CV. Ita major erit CA quàm ea, cujus quadratum duplum sit quadrati ex uw, et quadratum ex CA duplo quadrati ex uw majus. Sit b recta duarum CV,  $\sqrt{CA^2 - 2UW^2}$  proportionem media.

Itaque  $b^2 = CV \times \sqrt{CA^2 - 2UW^2}$ , et  $b^4 = CV^2 \times CA^2 - 2UW^2 = CV^2 \times CA^2 - 2UQ^2 + 2QW^2$ .

At verò inventa est  $UQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}}$ . Unde veniet  $2UQ^2 \times CV^2 = CA^4 + CA^2 \times CV^2$ . Atque hinc rursus  $b^4 = 2CV^2 \times QW^2 - CA^4 = 2q^4 - a^4$ .

Ergo  $a^4y^2 - b^4 = a^4 - 2q^4 + a^2y^2$ .

Cùm igitur inventa est  $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ , erit eadem  $RT = \sqrt{\frac{a^4y^2 - b^4}{2y^2}}$ .

Hinc calculis sicut in superiore casu subductis,

veniet  $Db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^4y^2 - 2b^4}}$ . Et  $Dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y \sqrt{2a^4y^2 - 2b^4}}$ .

Harum formularum posteriore definitur Curva acx, quæ proinde in eodem genere est ac prior illa, per cujus quadraturam casum superiorem confecimus. Datâ igitur yd, dabitur area avdc ope Tab. II. Class. 4. Form. 1. è relatione nimirum quæ areæ illi cum areâ Sectionis cujusdam Conicæ, positione.

Pars PRIMA. CASUS TERTIUS. sitione datae, intercedat. Data autem area  $avdc$ , punctum  $i$  ad curvum corporis tramitem, ut ante, dabitur. Assumptisque distantis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvae viii puncta. Q. E. D.

## COMPOSITIO CASUS III. PARTIS I.

[Fig. 12.]

In recta  $cv$  infinite producenda capiatur  $ca$  ejus longitudinis, quae habeat ad rectam  $ca$  (fig. 10, lineatione eam quam in analysi præcepimus definiendam) proportionem eam, quam quadratum  $\beta$  rectae  $cv$  ad quadratum  $\beta$  rectae  $b$ . Jungatur  $cb$  in fig. 10, et in fig. 12, à puncto  $c$  in recta  $ca$  ad perpendicularum educatur  $ce$ , quae junctae  $cb$  fiat aequalis. Centro  $c$  semiaxibus  $ca$ ,  $ce$  scribatur Ellipsis.

Punctum  $v$  non erit extra hanc Ellipsin. Nempe cum  $ca$  sit recta  $b$ , cuius quadratum rectangulo  $cv \times \sqrt{ca^2 - 2uv^2}$  aequale sit, certe non majus erit quadratum ex illa  $b$ , quam rectangulum  $cv \times ca$ . Non majus igitur quam ut habeat ad quadratum ex  $cv$  proportionem eam, quam rectangulum  $cv \times ca$  ad quadratum ex  $cv$  habet; sive eam quam recta  $ca$  ad rectam  $cv$ . Sed talis sumpta est recta  $ca$  (fig. 12) ut ad eam illa  $ca$  (fig. 10) proportionem habeat eam, quam quadratum ex  $b$  ad quadratum ex  $cv$ . Habet igitur  $ca$  ad  $ca$  rationem eam, quam quadratum ex  $b$  ad quadratum ex  $cv$ . Non major igitur erit illa  $ca$ , quam quae habeat ad  $ca$  rationem illam quam  $ca$  ad  $cv$ . Invertendo, non minor erit  $ca$ , quam ut habeat illa ad  $ca$  rationem eam, quam  $cv$  ad eandem  $ca$ . Illa  $ca$  igitur non minor erit quam  $cv$ . Punctum igitur  $v$  non erit extra Ellipsin. Recta igitur, à puncto  $v$  ordinatim ad axem  $ca$ educta, Ellipsi occurret. Educatur  $vs$ , & Ellipsi in  $s$  occurrat. Sumatur in axe  $ca$  aliud quodvis punctum  $x$ , intra Ellipsin. Educatur  $xr$  ad axem  $ca$  ordinatim, quae Ellipsi in  $r$  occurrat. Jungantur  $cs$ ,  $cr$ . Centro  $c$ , radio  $cv$ , scribatur circulus. Ejus circuli capiatur sector  $vcp$ , qui ad sectorem ellipticum  $acr$  rationem habeat eam, quam  $q^2$ , sive rectangulum  $cv \times qv$ , ad quadratum ex  $ca$ . Ducatur recta  $rt$ , quae Ellipsin in  $r$  contingens axi  $ca$  in  $t$  occurrat. In recta  $cp$  capiatur  $cp$ , quae ad  $ct$  eam rationem habeat, quam quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $ca$ . Si è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  (fig. 10) corpus quodpiam emissum fuerit, cum velocitate quadam, quae velocitatem corporis, motu suo circum centrum  $c$  in distantia  $cv$  circum scribentis, superaret eam ratione, qua recta data  $ed$  (fig. 11) superet datam  $ex$ : si hac inquam velocitate corpus è loco  $v$ , secundum rectam  $vg$  emissum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam, in fig. 12, punctum  $p$  perpetuo tangit, per omnia similem et aequalem.

## DEMONSTRATIO.

In figurâ quam ad analysin ornavimus, capiatur  $cd$  duarum  $cx$ ,  $cv$  in figurâ modò scriptâ proportionè tertia; existentibus illis  $cv$  utriusque figuræ

gurae inter se aequalibus. Circulus, centro  $c$ , radio  $cd$  scriptus, in fig. 10, curvo corporis tramiti in puncto  $i$  occurrat; reliqua verò maneant quae ad analysin Problematis in hoc casu lineavimus. Capiatur  $\beta$  duarum  $cv$ ,  $b$ , proportionè tertia. Erit igitur quadratum ex  $ca$  ad quadratum ex  $ce$  (fig. 12) ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadratum ex  $\beta$ . Id enim eodem modo, atque in casu superiore usi sumus, ostendi possit. Quare in Ellipsi, illud quo quadratum ex dimidio axe,  $ca$ , exsuperat quadratum ex  $cx$  erit ad quadratum ex ordinatâ  $xr$ , ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadratum ex  $\beta$ .

Rursum in figurâ 10, junctâ  $cb$  occurrat rectae  $db$  in  $m$ . Sumatur  $\gamma$  duarum  $cm$ ,  $b$ , proportionè tertia. Erit quadratum ex  $cx$  (fig. 12) ad quadruplum quadrati ex  $\gamma$ , ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadrati ex  $\beta$ . Id enim iisdem planè rationibus atque in casu superiore obtinebimus. Atqui ostensum est quadratum ex  $ca$  esse ad quadratum ex  $ce$  ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadrati ex  $\beta$ . Illud igitur, quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cx$ , erit ad illud, quo quadratum ex  $ce$  exsuperat quadruplum quadrati ex  $\gamma$  ut quadratum ex  $cv$  ad duplum quadrati ex  $\beta$ ; hoc est, ut idem illud quo quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $cx$  ad quadratum ex  $xr$ . Quadratum igitur ex  $xr$  illud ipsum erit, quo quadratum ex  $ce$  exsuperat quadruplum quadrati ex  $\gamma$ .

At verò illud, quo quadratum ex  $ce$  exsuperat quadruplum quadrati ex  $\gamma$ , hoc quadrati ex  $rt$  (fig. 10) quadruplum est. Namque, propter continuam tribus illis  $cm$ ,  $b$ ,  $\gamma$ , proportionis convenientiam, quadratum ex  $\gamma$  erit ad quadratum ex  $b$ , ut quadratum ex  $b$  ad quadratum ex  $cm$ , sive ad duplum quadrati ex  $cd$ . Ut verò quadratum ex  $b$  ad duplum quadrati ex  $cd$  ita est illud, quo dimidium quadrati ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $rt$ , ad quadratum ex  $b$ . Id enim declarant notae illae quas analysis nobis expromebat,  $rt^2 = \frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}$ ; ex quibus utique efficitur  $b^4 = \frac{1}{2}(a^2 - rt^2) \times 2y^2$ . Quadratum igitur ex  $\gamma$  ad quadratum ex  $b$  eandem quam illud, quo dimidium quadrati ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $rt$ , rationem habet; quadratum igitur ex  $\gamma$  aequale est ei, quo dimidium quadratum ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $rt$ . Et quadrato ex  $rt$  communiter addito; quadrata ex  $\gamma$  & ex  $rt$  simul sumpta dimidio quadrati ex  $ca$  aequalia erunt. Et quadrato ex  $\gamma$  communiter dempto, quadratum ex  $rt$  aequale erit ei, quo dimidium quadrati ex  $ca$  exsuperat quadratum ex  $\gamma$ . Ac proinde quadruplum quadrati ex  $rt$  aequale erit ei, quo duplum quadratum ex  $ca$ , hoc est, quo quadratum ex  $ce$  (fig. 12) exsuperat quadruplum quadrati ex  $\gamma$ . Eidem verò quadratum ex  $xr$  jam ante ostensum est aequale. Quadratum igitur ex  $xr$  quadruplum erit quadrati ex  $rt$ . Ex quo efficitur recta  $xr$ , ut in casu superiore, rectae  $rt$  dupla.

Jam verò esse  $cx$ , vel  $ax$ , ad  $cd$  ut  $cx$  ad  $cd$ , ac propterea rectangulum  $ax \times rx$  ad  $cd \times rx$  ut  $cx$  ad  $cd$ , ea iisdem prorsus argumentis obtinemus atque in casu superiore.

Porro ex eo quod  $xr$  dupla sit rectae  $rt$ , sequetur, ut antè, dimidium rectanguli

Pars PRIMA. rectanguli  $cx \times xr$ , hoc est triangulum  $cxr$ , rectangulo  $cx \times rt$  æquale esse, et fluxionem trianguli fluxioni rectanguli esse æqualem. Rectanguli autem  $cx \times rt$  latera  $cx$ ,  $rt$ , contrā atque in casu illo superiore obtinuit, contrariè fluunt. Nempe cum  $rt$  eodem modo fluat quo  $xr$ , cujus est semit-  
 TERTIUS. tis; rectæ autem  $xr$ ,  $cx$  in Ellipsi contrariè fluant. Illis autem  $cx$ ,  $rt$  contrariè fluentibus, fluxio rectanguli  $cx \times rt$ , rectangulorum  $\dot{cx} \times rt$ ,  $cx \times \dot{rt}$  differentie æqualis erit. Erit autem rectangulum  $\dot{cx} \times rt$  ad rectangulum  $\dot{cd} \times rt$  ut  $cx$  ad  $cd$ ; id enim eodem modo ostendemus quo antè. Sed et rectangulum  $cx \times \dot{rt}$  erit ad rectangulum  $cd \times \dot{rt}$  ut  $cx$  ad  $cd$ . Quare  $cx \times \dot{rt} - \dot{cx} \times rt$ , five fluxio rectanguli  $cx \times rt$ , hoc est, trianguli  $cxr$ , erit ad  $cd \times \dot{rt} - \dot{cd} \times rt$  ut  $cx$  ad  $cd$ . Sed ostensum est rectangulum  $\dot{ax} \times xr$ , five fluxionem spatii Elliptici  $axr$ , esse ad rectangulum  $\dot{cd} \times xr$ , five ad duplum rectanguli  $\dot{cd} \times rt$ , ut  $cx$  ad  $cd$ . Fluxiones igitur trianguli  $cxr$  spatiique elliptici  $axr$  simul sumptæ, five fluxio sectoris elliptici  $car$  ad spatia illa  $\dot{cd} \times \dot{rt} - \dot{cd} \times rt$ ,  $2\dot{cd} \times rt$  simul sumpta, hoc est ad rectangula  $\dot{cd} \times \dot{rt}$ ,  $\dot{cd} \times rt$  simul sumpta, erit ut  $cx$  ad  $cd$ . Fluxio inquam sectoris elliptici  $car$  ad summam rectangulorum  $\dot{cd} \times \dot{rt}$ ,  $\dot{cd} \times rt$  rationem habet quam  $cx$  ad  $cd$ . Rectangulorum autem  $\dot{cd} \times \dot{rt}$ ,  $\dot{cd} \times rt$  summa rectanguli  $\dot{cd} \times rt$  fluxio est; nempe illis  $cd$ ,  $rt$  eodem modo fluentibus. Nam  $cd$  contrario modo fluere atque  $cx$  ostensum est. Ostensum est etiam illam  $rt$  contrario modo fluere atque  $cx$ . Fluunt igitur  $cd$ ,  $rt$  eodem modo, rectangulique  $\dot{cd} \times rt$  fluxio summa erit rectangulorum  $\dot{cd} \times \dot{rt}$ ,  $\dot{cd} \times rt$ . Fluxio igitur sectoris elliptici  $car$  erit ad fluxionem rectanguli  $\dot{cd} \times rt$ , ut  $cx$  (fig. 12) ad (fig. 10)  $cd$ .

Cæterum ex æquatione illā quam analysi nobis expromebat,  $rt = \sqrt{\frac{a^2y^2 - b^4}{2y^2}}$ , calculis ut in casu superiore subductis, veniet  $\dot{cd} \times \dot{rt} \times \frac{q^2 CV^2}{a^2y^2} =$

$dc \times \dot{y} = -\dot{avdc}$ . (Notis enim  $dc \times y$  designatur  $-\dot{avdc}$ , five areæ  $avdc$  fig. 10 decrescantis fluxio.) Hoc est areæ  $avdc$  fluxio ad contrariam rectanguli  $\dot{cd} \times rt$  fluxionem rationem habebit compositam è rationibus, spatii  $q^2$ , five rectanguli  $cv \times qw$  ad  $a^2$ , five quadratum ex  $ca$ , quadratique ex  $cv$  ad quadratum ex  $cd$ . (Contrarias autem esse areæ  $avdc$  rectangulique  $\dot{cd} \times rt$  fluxiones ex eo patet, quòd crescente  $cd$  rectangulum quoque crescat, area decrescat, et vicissim).

Jam verò ex eo quòd fluxio areæ  $avdc$  ad contrariam rectanguli  $\dot{cd} \times rt$  fluxionem rationem habeat è quibus modò diximus compositam, atque ex eo quòd fluxio rectanguli  $\dot{cd} \times rt$  ad similem sectoris elliptici  $acr$  fluxionem rationem habeat quam  $cd$  ad  $cx$ , sequetur fluxionem areæ  $avdc$  ad contrariam sectoris elliptici  $acr$  fluxionem rationem habere quam  $cv \times qw$  ad quadratum

quadratum ex  $ca$ . Consequetur inquam esse  $-\dot{avdc}$  ad  $\dot{acr}$ , five  $\dot{avdc}$  CASUS TERTIUS. ad  $-\dot{acr}$ , ut  $cv \times qw$  ad quadratum ex  $ca$ . Id enim iisdem planè argumentis probabitur, quibus in casu superiore ostendimus fluxionibus similibus areæ  $avdc$  et sectoris hyperbolici  $car$  rationem eam intercedere. Jam verò sectorum  $acr$ ,  $ecr$  fluxiones sunt semper æquales, sed contrariæ. Hoc

est  $-\dot{acr} = \dot{ecr}$ , et vicissim. Quare fluxio areæ  $avdc$  erit ad similem sectoris elliptici  $ecr$  fluxionem ut  $cv \times qw$  ad quadratum ex  $ca$ . Et cum hæc data sit fluxionum ratio, fluentibus etiam aut eadem intercedet, aut altera dato major erit quàm pro hac ratione. (Geom. Flux. Prop. iv.)

Fluat igitur  $cd$ , (fig. 10) donec ipsi  $cv$  evadat æqualis. Jam sector ellipticus (fig. 12) sit  $ecS$ , area autem  $avdc$  (fig. 10) in nihilum abierit. Quare sector ellipticus  $ecr$  dato  $ecS$  semper major erit, quàm ut habeat ad aream  $avdc$  rationem eam, quam quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ . Sector igitur  $Scr$  (fig. 12) ad aream  $avdc$  (fig. 10) five illi æqualem sectorem circulare  $vcx$  rationem illam habet. Capiatur in fig. 12, sector circularis  $vcf$ , qui ad sectorem ellipticum  $acS$  rationem habeat eam, quam rectangulum  $cv \times qw$  ad quadratum ex  $ca$ . Punctum ipsum  $f$  erit ad Curvam, quam punctum  $p$  perpetuò tangit: id enim eodem modo probabitur quo in casu superiore. Jam verò cum sector ellipticus  $acr$  ad sectorem circuli  $vcf$ , rationem habeat quam item sector ellipticus  $acS$  ad sectorem circuli  $vcf$ , rationem habeat quam quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ ; idcirco et sector ellipticus  $Scr$  ad sectorem circuli  $scf$  eandem illam rationem habebit. Atque hinc efficitur, ut in casu superiore, sectores circulares  $vcx$  figuræ decimæ et  $vcf$  hujus esse inter se æquales. Quare et anguli  $vcx$ ,  $scf$  inter se æquales erunt.

Porro ostenduntur  $cp$ ,  $ci$  inter se æquales eodem planè modo atque in casu superiore. Et simili argumentatione Curvarum  $vx$ ,  $fp$  radii omnes, qui cum primariis illis,  $cv$ ,  $et$ , angulos æquales faciant, ostenduntur inter se æquales. Quare Curvæ illæ per omnia inter se similes et æquales. Q. E. D.

De naturâ Curvæ  $fp$ , de Asymptotis ejus et Apfidibus inveniendis; de temporibus etiam, quibus corpora data ejus spatia absolvoant, definiendis, et cum temporibus conversionum in circulis conferendis.

## § I. DEFINITIO.

Puncta  $r$  et  $p$  Ellipseos Curvæque cognata dico.

2. Capiatur sector circularis  $vcN$ , qui ad Ellipseos quadrantem  $acc$  ratio-Asymptotæ. nem illam habeat, quam rectangulum  $cv \times qw$  ad quadratum ex  $ca$ . Punctum Curvæ quod ellipseos verticis secundi  $e$  sit cognatum, in rectâ  $cx$  querendum erit; siquidem puncto  $r$  in  $e$  translato, punctum  $p$  in  $N$  translato erit, et radius  $cp$  cum illo  $cx$  congruet. At verò puncto  $r$  in  $e$  translato, recta  
 \* E  
 VOL. IH.



**CONCHOIDES** recta et infinite augetur. Quapropter infinite augebitur etiam  $cp$ , quæ ad illam et datam rationem habet. Punctum igitur Curvæ, puncti  $e$  cognatum, in infinitum abiit; hoc est, Curva  $pf$  infinite quidem protensa rectæ  $cn$  nullibi occurrit, quam tamen propius accedet quam pro datâ quilibet distantia.

3. Si capiatur  $cm$ , duarum  $ca$ ,  $cv$  proportionem tertia, erit  $m$  punctum ubi Curva  $pf$  axi Ellipseos  $ca$  occurret. Demonstrabitur eodem modo quo § 3 casus superioris.

Anguli Radiorum cum Curvâ.

4. Radius quisque  $cp$ , à centro  $c$  Curvam usqueeductus, angulum cum curvâ faciet, qui simili lineatione, ac in casu superiore usi sumus, definiatur. Nimirum à puncto Ellipseos cognato  $r$  ad axem  $ca$  deducatur  $rx$  ordinatum, quæ in puncto  $d$  media dividatur. In abscissâ  $cx$  capiatur  $xg$ , quæ habeat ad  $cx$  rationem eam, quam (in fig. 10)  $qv$  ad  $cv$ . Junctâ  $dg$ , angulus  $xdg$  æqualis erit ei, quo radius  $cp$  inclinatur ad Curvam. Demonstratur eodem modo atque in casu superiore (vid. § 6 superioris.)

Apsides.

5. Punctum  $m$  curvæ Apsidis erit: demonstratur ad modum § 8 casus superioris.

6. Radio mobili  $cp$  circum centrum circumactò, et infinite aucto, angulus inclinationis radii ad Curvam infinite imminuitur; siquidem puncto  $p$  in  $n$  translato, punctum  $r$  in ipsum verticem secundum  $e$ , punctum  $x$  in centrum Ellipseos translatum erit. Unde  $xd$  dimidio axi secundo æqualis facta fuerit; cum illa  $cx$ , et quæ ad  $cx$  datam rationem habeat  $gx$ , in nihilum abierit.

Conchoidum Ellipticarum Species Variæ.

7. Fiat angulus  $ncm$  angulo  $ncv$  æqualis, et capiatur  $cm$  æqualis rectæ  $cm$ . Rursum fiat angulus  $ncp$  angulo  $ncp$  æqualis, et capiatur  $cp = cp$ . Punctum  $p$  erit ad novum quoddam Curvæ  $pf$  brachium, quod Asymptotam habebit rectam  $cn$ , Apsidem verò punctum  $m$ . Et si fiat angulus  $vcn$  æqualis angulo  $vcn$ , et angulus  $vcp$  æqualis angulo  $vcp$ , et capiatur  $cp = cp$ , erit punctum  $p$  ad tertium Curvæ brachium, quod Apsidem habebit punctum  $m$ , Asymptotam rectam  $cn$ . Curva igitur  $mpf$ , pro variâ quæ Ellipsin inter & Circulum  $vpm$  proportio intercesserit, varias ipsâ species induet; quarum hæ sunt ferè simplicissimæ.

Primum quidem, si Ellipseos ad Circulum, adeoque quadrantis Ellipseos ad quadrantem Circuli, ea sit proportio, quæ quadrati ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qv$ , Curvæ figura erit qualem in 13<sup>a</sup> scriptam vides. Quæ brachiis quatuor constat secundum communem Asymptotam  $nn$  infinite utrinque protensis, Apsides autem duas habet ad rectam illam constitutas, quæ brachiorum asymptotam communem ad perpendicularum decussat.

Si quadrans Ellipseos ad semicirculum proportionem habeat quam  $ca^2$  ad  $cv \times qv$ , Curva figuram 14 induet; brachiis utique duobus constans, quæ tam Apside quàm Asymptotâ gaudent communi, et Apsidem in ipsâ Asymptotâ constitutam habent.

Si quadrans Ellipseos ad Circulum integrum rationem habet quam  $ca^2$  ad

ad  $cv \times qv$ , Curva brachiis rursus quidem duobus constabit, quæ Apside **ELLIPTICA**. et Asymptotâ gaudebunt communibus, atque apsidem habebunt in Asymptotâ constitutam. [Vide fig. 15.] Longè tamen diversa erit hujus figura ab illâ superiore; quippe cujus brachia nisi in Apside communi nusquam conveniant, cum hujus brachia tribus omnino punctis. Nodorum autem unus ad ipsam Asymptotam erit, duo reliqui æqualibus ab Asymptotâ distantis hinc inde remoti.

Generaliter autem si sector Circuli,  $vcn$ , qui ad quadrantem Ellipseos rationem habet quam  $cv \times qv$  ad  $ca^2$ , si ille ad aream circuli totius rationem habeat quam numerus ad numerum; Curva brachiis constabit numero definitis, quarum duæ quælibet proximæ vel Asymptotam vel Apsidem communem habent; eâ quidem lege ut Apsidis et Asymptotæ communio alternis fiat. Nimirum si brachium primum et secundum Asymptotam communem habuerint, secundo et tertio Apsidis communis erit; tertio & quarto communis rursus Asymptotos, quarto & quinto Apsidis; atque sic deinceps. Brachia verò Curvæ, Apsides item et Asymptotæ quot sint, hæc ratione cognoscatur. Habeat sector circularis  $vcn$  ad aream totius circuli rationem eam, quam numerus  $n$  ad numerum  $m$ . Numeri verò  $n$ ,  $m$ , minimi sint omnium, qui proportionem cum ipsis conveniant. Si numerus  $m$  sit impar, Curva tot quidem Apsides habebit, Asymptotas tot, bis tot brachia, quot sint in numero  $2m$  unitates, et in singulis Asymptotis Apsides singulas habebit constitutas. Si par sit numerus  $m$ , vel pariter vel impariter pari esse ei liceat. Si impariter par sit numerus  $m$ , jam Curva totidem habebit brachia quot in numero  $m$ , Apsides autem totidem, totidem item asymptotas, quot in dimidio  $m$  unitates; et Apsides singulas in singulis Asymptotis constitutas. Si pariter par sit numerus  $m$ , Curva brachia quidem, sicut antè, totidem habebit quot sunt in numero  $m$ ; Apsides totidem quot in dimidio  $m$ ; Asymptotas autem haud plures quàm sunt in quadrante numeri  $m$  unitates. Apsides autem in rectis constitutæ erunt, à centro ad perpendicularum cum Asymptotis eductis. Quod si sector circularis  $vcn$ , qui ad quadrantem Ellipseos rationem habeat quam  $cv \times qv$  ad  $ca^2$ , nullum areæ totius circuli commensuram accipiat, sive ad eam nullius numeri ad numerum rationem habeat, innumera erunt Curvæ brachia, innumera etiam Apsides et Asymptotæ. Apsidum autem et Asymptotarum communionem brachia Curvæ alternis semper accipient.

8. Ad quadraturam partium Curvæ  $fp$ , quæ radii positione datis interceptæ sint, analysis hanc æquationem expromebat;  $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}}$ . Hinc **Quadratura Conchoidum Ellipticarum.**

$$db \times y = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}} y. \text{ Area igitur } icv \text{ (fig. 10), vel } pcf \text{ (fig. 12) } (= db \times y)$$

$$\text{spatio } \frac{q^2}{2a^2} \sqrt{2a^2y^2 - 2b^4}, \text{ five } \frac{q^2}{\sqrt{2} \times a} \sqrt{y^2 - \frac{b^4}{a^2}}, \text{ vel æqualis erit, vel eo ma-}$$

ior minorve dato (Newton. TAB. CURV. I. Class. IV. Form. 1.) idque qualiscunque assumpta fuerit distantia  $cv$  (fig. 10) vel  $cf$  (fig. 12), modo datâ  $cm$  non sit minor. Ponatur igitur  $cf$  (fig. 12) ipsi  $cm$  æqualis, ut  $scp$  in aream  $mcp$  transeat, et angulus  $cvg$  in fig. 10 rectus fiat. Tum  $q^2$  fiet  $cm \times vq$ , et  $b^4$  fiet  $cm \times ca$ . Notæ autem  $\sqrt{2} \times a$  rectam  $ce$  semper significat.

CONCHOIDES nificant. Area igitur MCP spatio  $\frac{CM \times UQ}{C_e} \sqrt{CP^2 - CM^2}$  vel æqualis, vel eo major minorve dato erit. Fluat y vel cp, donec ipsi CM evadat æqualis. Tum puncto P in ipsum M translato, area MCP in nihilum abierit. In nihilum etiam spatium illud  $\frac{CM \times UQ}{C_e} \sqrt{CP^2 - CM^2}$ . Area igitur MCP spatio isto, quod simul cum cā in nihilum abierit, non erit major minorve dato. Æqualis igitur. Centro igitur c radio CM (vid. fig. 16), scribatur circulus, qui rectæ ce in punctis o, o occurrat. Ad rectam ce applicetur rectangulum cz rectangulo CM x UQ æquale. Circulum modò scriptum in puncto M recta MP contingat. In illam MP, à circuli centro c, deducatur CP radio Curvæ CP æqualis. Et à puncto P in rectam oꝝ ad perpendicularum deducatur PY. Sector curvæ MCP rectangulo cz x cY æqualis erit. Quæ autem brachio Curvæ MP et Asymptotâ ejus CN, infinite protensis, axequæ CM interclusa est area, ea quidem infinita erit.

Tempora movendi in Conchoïdibus Ellipticis.

9. Tempora, quibus concipiuntur sectores quilibet Curvæ, MCP, MCF, qui ab axe CM communiter incipientes ad radios CP, CF terminantur, erunt inter se ut tangentes arcuum, quorum CP, CF sunt secantes pro radio CM. Corpus autem ab apside M, vel alio quovis puncto f emissum, per brachium infinitum in ipsam asymptotam ne infinito quidem tempore devenierit.

10. Corpus igitur, quod per harum Curvarum aliquam feratur, ad punctum unde primum emissum fuerit, vel quod semel præterierit, nunquam redibit. Neque ex alio Curvæ brachio in aliud transibit, nisi forte à dato brachii alicujus puncto ita emissum fuerit, ut versus apsidem cursum faciat. Ita enim apsidem illam prætergressum per brachium alterum deferetur, cui cum primo apsis illa communis est.

Velocitas motû in Conchoïdibus Ellipticis.

11. Velocitas corporis per Curvam lati, in loco quovis v (fig. 10) est ad velocitatem corporis, quod, urgentibus eisdem viribus centripetis, circumagitur in circulo cujus radius cv, ut recta quæ possit quadrata ex CA, CV simul sumpta ad rectam ipsam CA. Demonstrabitur eodem modo quo § 13 casus superioris.

12. Si centro c, radio CM, scribatur circulus (fig. 17) qui rectæ ce, quæ radium CM ad perpendicularum infistat, in o occurrat; velocitas corporis per Curvam lati, in apside M, erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius CM, circumacti, ut AO ad CA.

Tempora translationum per Conchoïdes Ellipticas conferuntur cum Temporibus conversionum in Circulis.

13. Tempus translationis ab Apside M ad locum quemvis Curvæ P ad tempus conversionis integræ in Circulo, cujus radius CM, rationem habebit compositam è rationibus tangentis arcus ejus circularis, cujus secans est CP pro radio CM, ad integrum circuli circuitum, rectæque CA ad rectam CM.

A centro c in rectam MP, quæ circulum in P contingat, deducatur CP illi CP æqualis. Et à P in diametrum oꝝ demittatur ad perpendicularum recta PY. Exponatur recta r datæ cujusvis longitudinis. Sumatur alia θ, quæ ad illam r rationem habeat, quam tempus conversionis integræ per circulum, cujus radius CM, ad tempus translationis ab apside M in locum P per Curvam. Circuitus autem circuli, cujus radius CM, æqualis sit rectæ p. Dico r ad θ rationem habere eam, quæ composita est è rationibus rectæ

æ cY ad p, rectæque CA ad CM: five eam, quam rectangulum cY x CA ad rectangulum p x CM.

Nam primum quidem sector curvæ MCP ad aream circuli, cujus radius est CM, rationem habebit eam, quam rectangulum T x AO ad rectangulum θ x AC. Id enim eisdem planè rationibus efficiatur, quibus in casu superiore ostendimus, aream illam omnem quam Spiræ intus habuere, esse ad aream circuli cujus radius CM, ut rectangulum T x AF ad rectangulum θ x CA. Jam verò sector Curvæ MCP æqualis est rectangulo cz x cY (per § 8 hujus). Et area circuli, cujus radius CM, dimidium est rectanguli p x CM (per ea quæ demonstravit Archimedes). Rectangulum igitur cz x cY erit ad dimidium rectanguli p x CM, five ad rectangulum ½ p x CM, ut rectangulum T x AO ad rectangulum θ x CA. Sed propter rectangulum cz x ce rectangulo CM x UQ æquale (ita enim factum est) erit cz ad UQ ut CM ad ce. Quare rectangulum cz x cY erit ad rectangulum UQ x cY ut rectangulum ½ p x CM ad rectangulum ½ p x ce. Permutando rectangulum cz x cY erit ad rectangulum ½ p x CM ut rectangulum UQ x cY ad rectangulum ½ p x ce. At verò rectangulum cz x cY ad rectangulum ½ p x CM, ut rectangulum T x AO ad rectangulum θ x CA. Quare rectangulum UQ x cY ad rectangulum ½ p x ce ut rectangulum T x AO ad rectangulum θ x CA. Permutando, rectangulum UQ x cY erit ad rectangulum T x AO ut rectangulum ½ p x ce ad rectangulum θ x CA. Invertendo, rectangulum T x AO ad rectangulum UQ x cY ut rectangulum θ x CA ad rectangulum ½ p x ce.

Præterea junctis OM, ON, recta UQ ad AO rationem habet quam CA ad MO; secundum ea quæ è formulâ generali,  $UQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2 c^2}{2c}}$ , supra disputavimus, posito utique c = CM. At verò CA ad MO rationem habet quam ce ad Mm. Id enim eodem modo probare liceat, quo in casu superiore probavimus CA esse ad MF ut ce ad Mm. Quare UQ ad AO rationem habet quam ce ad Mm. (El. v. 11.) Quare et rectangulum UQ x cY ad rectangulum AO x cY rationem habet quam ½ p x ce ad ½ p x Mm, five ad p x CM. Cum igitur sit T x AO : UQ x cY = θ x CA : ½ p x ce, atque rursus UQ x cY : cY x AO = ½ p x ce : p x CM; ex æquo erit T ad cY ut θ x CA ad p x CM. Quare et rectangulum T x CA erit ad rectangulum cY x CA, ut rectangulum θ x CA ad rectangulum p x CM. Permutando, erit T ad θ ut cY x CA ad p x CM. Q. E. D.

#### PARTIS PRIMÆ CASUS QUARTUS.

JAM verò in fig. 10, reliquis ut in casu superiore permanentibus, angulus cvg talis sit, ut quadratum è radio ad quadratum ex cosinu ejus anguli illam ipsam rationem habeat quam CN + CV ad cv. Itaque recta CA æqualis erit ei, cujus quadratum duplum sit quadrati ex uv. Quadratum igitur ex CA duplum erit quadrati ex uv, five duplum ejus quo quadratum ex UQ exsuperat quadratum ex QW. Quadratum igitur ex CA, duplo quadrati ex QW auctum, duplo quadrati ex UQ æquale fiet. Hoc est  $a^2 + 2QW^2 = \frac{a^4 + a^2 c^2}{c^2}$ . Unde  $a^2 c^2 + 2c^2 QW^2$

Pars PRIMA.  $2c^2 = q^2$ , sive  $a^2c^2 + 2q^2 = a^4 + a^2c^2$ . Unde rursum  $2q^2 = a^4$ , et  $a^4 =$   
CASUS  
QUARTUS.  $2q^2 = 0$ .

Cum igitur inventa est  $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^2 + a^2y^2}{2y^2}}$ , erit eadem  $RT = \sqrt{\frac{a^4}{2}}$ . Unde

$2RT = CB$ . Quare  $db = \frac{q^2}{CB}$ ; hoc est, cum sit  $q^2 = \frac{a^4}{2}$ , et  $CB = \sqrt{2} \times a$ ,

$db = \frac{1}{2}a$ . Et  $dc = \frac{CV^2 \times q^2}{y^2 \times CB} = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$ .

Datâ igitur  $cd$ , dabitur sector circularis  $vcx$  per quadratum Curvæ, cujus ordinata his notis designatur,  $\frac{CV^2}{2y^2} \times a$ , existente abscissâ  $vd$ . Dato autem sectore  $vcx$ , punctum  $i$  ad curvum corporis tramitem, ut antè, dabitur. Assumptisque distantis aliis, alia, quot quis voluerit, definientur Curvæ  $vik$  puncta.

#### COMPOSITIO CASUS QUARTI PARTIS PRIMÆ.

In rectâ  $cv$  fig. 18, capiatur distantia quævis  $cd$ . Capiatur  $cm$ , duarum  $cd$ ,  $cv$  proportionem tertia. Circuli, centro  $c$  radio  $cv$  scripti, capiatur sector  $vc\beta$ , dimidio rectanguli  $mv \times ca$  æqualis. Quod ita fiat, si capiatur arcus  $v\beta$ , qui habeat ad rectam  $mv$  rationem eam quam data  $ca$  ad radium  $cv$ , et jungatur  $c\beta$ . Denique capiatur  $c\beta$  rectæ  $cd$  æqualis. Si corpus è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  eâ cum velocitate, quam suprà posuimus, emissum fuerit, per Curvam feretur ejus quam punctum  $p$  perpetuo tangit per omnia similem et æqualem.

#### DEMONSTRATIO.

Fluxio sectoris  $vc\beta$  rectangulo  $\frac{mv}{2} \times \frac{1}{2}ca$  æqualis est. Cum verò  $cd$  sit ad  $cv$  ut  $cv$  ad  $cm$ , rectangulum  $cm \times cd$  quadrato ex  $cv$  æquale erit. Sed datum est quadratum ex  $cv$ , propter latus  $cv$  datum. Rectangulum igitur  $cm \times cd$  datum; cujus tamen latera,  $cm$ ,  $cd$ , fluunt. Omnino igitur contrariè illa fluunt; atque eâ quidem lege, ut rectangula  $cm \times cd$ ,  $cm \times \frac{1}{2}cd$ , sive  $cm \times \frac{1}{2}vd$ , semper sint inter se æqualia. Erit igitur  $cm : vd$  ut  $cm : cd$ . Rectangulum igitur  $cm \times \frac{1}{2}ca$  erit ad rectangulum  $vd \times \frac{1}{2}ca$  ut  $cm$  ad  $cd$ . Sed propter datam  $cv$ , fluxiones  $cm$ ,  $mv$  erunt inter se æquales. Rectangulum igitur  $mv \times \frac{1}{2}ca$  rectangulo  $cm \times \frac{1}{2}ca$  æquale erit. Quare  $mv \times \frac{1}{2}ca$ , hoc est, fluxio sectoris  $vc\beta$ , erit ad  $vd \times \frac{1}{2}ca$  ut  $cm$  ad  $cd$ . Jam in figurâ quam ad analysin ornavimus, ponatur  $cd$  æqualis ipsi  $cb$  hujus, existentibus etiam illis  $cv$  figuræ utriusque inter se æqualibus; et manente reliquâ omni istius figuræ lineatione, recta  $dc$  habet ad  $\frac{1}{2}ca$  rationem eam quam quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $cd$ . Id enim significat notæ illæ, quas analysi nobis expromebat  $dc = \frac{CV^2 \times a}{2y^2}$ , hoc est

$dc = \frac{VC^2}{2CD^2} CA$ . Quare et rectangulum  $dc \times \frac{1}{2}vd$ , hoc est fluxio areæ  $avdc$ , COMPOSITIO.

erit ad rectangulum  $\frac{1}{2}ca \times \frac{1}{2}vd$  ut quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $cd$ , sive ut recta  $cm$  ad rectam  $cd$ . Atqui ostensa est fluxio sectoris  $vc\beta$  esse ad idem rectangulum  $\frac{1}{2}ca \times \frac{1}{2}vd$  ut  $cm$  ad  $cd$ . Fluxiones igitur areæ  $avdc$  fig. 10 sectorisque  $vc\beta$  fig. 18 inter se æquales erunt. Quare et fluentes vel æquales erunt inter se, vel altera alterâ dato major. Fluat  $cd$  ut ipsi  $cv$  æqualis fiat. Jam area  $avdc$  in nihilum abierit. Et in nihilum etiam sector  $vc\beta$ . Puncto enim  $d$  in  $v$  translato, ut æquales sint  $cd$ ,  $cv$ , æquales fient etiam  $cm$ ,  $cv$ ; punctum igitur  $m$  cum ipso  $v$  coierit, et recta  $mv$  in nihilum abierit. Quare et arcus  $v\beta$ , qui ad illam  $mv$  datam rationem habet, in nihilum etiam abierit; et cum illo sector  $vc\beta$ . Area igitur  $avdc$  sectorque  $vc\beta$ , cum simul in nihilum abierint, dato utique haud different. Erunt igitur inter se æquales. Quare et sector  $vcx$  fig. 10 sectori  $vc\beta$  fig. 18 æqualis. Radii autem  $cv$  inter se æquales. Anguli igitur  $vc\beta$ ,  $vcx$  inter se æquales. Sed et  $c\beta$ ,  $ci$  inter se æquales (ex constructione). Et simili argumentatione Curvarum  $v\beta$ ,  $vk$  radii omnes, qui inter se sint æquales, angulos cum primariis  $cv$  æquales facient. Curvæ igitur illæ per omnia inter se similes & æquales sunt. Q. E. D.

De natura Curvæ  $vp$ , perficiendâque ejus figurâ; de temporibus, quibus data ejus spatia absolvantur, definiendis, et cum temporibus conversionum per circulis conferendis.

1. Si capiatur arcus  $vi$  rectæ  $ca$  æqualis, et jungatur  $ci$ , recta  $ci$  Curvæ Asymptotos. Asymptotos erit. Cum enim, propter æquales  $vi$ ,  $ca$ , sit arcus  $vi$  ad rectam  $cv$ , ut recta  $ca$  ad  $cv$  (ex construct.) et è naturâ Curvæ, arcus etiam  $v\beta$  ad  $mv$  ut  $ca$  ad  $cv$ , erit arcus  $vi$  ad rectam  $cv$  ut arcus  $v\beta$  ad rectam  $mc$ . Puncto igitur  $p$  in  $i$  translato, punctum  $m$  cum ipso  $e$  ultimo coierit, rectaque  $cm$  in nihilum abierit. Et cum in omni situ puncti  $p$  rectangulo  $em \times cd$  sua constet magnitudo, nempe ut quadrato ex  $cv$  æquale sit, puncto  $p$  in  $i$  translato, rectâque  $cm$  in nihilum abeunte, recta  $cd$ , atque huic æqualis  $c\beta$ , infinita fiet. Q. E. D.

2. Radii curvæ angulorum, quos cum asymptotâ ipsi faciunt, rationem inter se contrariam gerunt. Cum enim sit arcus  $iv$  ad  $cv$  ut arcus  $v\beta$  ad  $mv$ , erit arcus  $ip$  ad rectam  $cm$  ut arcus  $iv$  ad  $cv$  (El. v. 11.) hoc est ut  $ca$  ad  $cv$ . Est autem  $cm$  ad  $cv$  ut  $cv$  ad  $cd$  vel  $c\beta$ . Quare ex æquo erit  $ip : cv = ca : c\beta$ . Rectangulum igitur sub radio  $c\beta$  arcuque  $ip$  æquale est dato rectangulo  $cv \times ca$ . Ac proinde radii  $c\beta$ , arcuum  $ip$ , sive angulorum  $ic\beta$ , contrariam inter se rationem gerunt. Q. E. D.

3. Curva  $v\beta$  gyris innumeris centrum cingit; quorum arctissimi, licet Spira Archimedeæ Reciproca per centrum non transeant, propius tamen illud accedunt quam pro datâ quâvis distantia. Nimirum hæc est Spira illa, quam, propter contrarias illas radiorum angulorumque rationes, nonnulli jure optimo Archimedæ reciprocâ vocarunt.

PARS PRIMA.  
CASUS  
TERTIUS.

Applis Spirarum in Centro.

4. Decrescente radio mobili  $cp$ , angulus, quo radius ad Curvam inclinatur sensim augetur. Radioque illo infinitè immutato, angulus ille ultimò recto æqualis erit: quasi scilicet Curva apsidem in ipso centro haberet constitutam. Nam radius est ad sinum anguli illius, quo  $cp$  ad Curvam incli-

natur, ut  $rs$  ad  $st$ ; hoc est, ut  $\sqrt{a+y^2}$  ad  $\frac{\sqrt{2} \times q^2}{a}$ , five ut  $\sqrt{ca^2+cp^2}$  ad  $\frac{\sqrt{2} \times q^2}{ca}$ : hoc est, cum  $\sqrt{2} \times q^2$  quadrato ex  $ca$  æquale sit, id enim suprà os-

tendimus, ut  $\sqrt{ca^2+cp^2}$  ad  $ca$ . Decrescente igitur  $cp$ , minor fit ratio radii ad sinum illum, ac proinde angulus ipse major; donec illa  $cp$  in nihilum abeunte, ratio radii ad sinum in ipsam æqualitatem abierit, et angulus in recti amplitudinem creverit.

Spiræ reciproce oppositæ.

5. Si in  $pc$  producta capiatur punctum  $\pi$ , pari distantia atque ipsum  $\pi$  à centro remotum, sed in partes contrarias, erit punctum  $\pi$  ad Curvam, Curvæ  $vpc$  per omnia similem et æqualem sed situ contrario, quæ rectam  $pc$  productam asymptotam habet. Hæ Curvæ unius quidem figuræ brachia sunt opposita; et Spiræ Reciproce Oppositæ haud ineptè dicendæ sunt.

Motus per Spiras reciprocas.

6. Si corpus è loco  $v$ , secundum rectam  $vg$ , eâ cum velocitate emissum sit, ut per Spiram  $vp$  deferatur; dato quodam tempore, cujus spatium quâ ratione definiatur mox docebo, propiùs quidem centrum accesserit quàm pro datâ quâvis distantia. Elapso autem tempore illo, Spiram Oppositam invaserit, cujus ductum sequens neque infinito tempore in Asymptotam  $ci$  deveniet; quam tamen propiùs accedet quàm pro datâ quâvis distantia; neque in Spiram  $vpc$ , per quam primùm delata est, unquam redibit.

Quadratura Spirarum reciprocarum.

7. Quadraturam partium Spirarum, quæ radiis positione datis interceptæ sint, ope hujus æquationis absolvimus, quam analysis expromebat;  $nb = \frac{q^2}{cb} =$

$\frac{a^2}{\sqrt{2} \times \sqrt{2.a}} = \frac{1}{2}a$ . Hinc enim fluxio areæ  $avnb$  fig. 10, five sectoris spirarum

$vcp = nb \times \overline{vd} = \frac{1}{2}a \times \overline{vd}$ . Quamobrem fluentes  $vcp$ ,  $\frac{1}{2}ca \times \overline{vd}$  vel æquales sunt inter se, vel altera alterâ dato major. Fluat  $cd$ , donec ipsi  $cv$  æqualis fiat; jam puncto  $d$  cum ipso  $v$  coeunte, recta  $vd$  in nihilum abierit. Rectâ autem  $vd$  in nihilum abeunte, area  $avnb$ , atque unâ cum eâ sector  $vcp$ , in nihilum abierit. Haud igitur dato differunt quæ simul in nihilum abierint. Erunt igitur inter se æqualia. Sector inquam Spiræ  $vcp$  spatio  $\frac{1}{2}ca \times \overline{vd}$  æqualis erit.

Hinc spatium illud omne, quod Spiræ  $vpc$  infra locum  $v$  centrum usque intus habent, hoc inquam spatium rectangulo  $\frac{1}{2}ca \times cv$ , five sectori circulari  $icv$ , inter punctum  $v$  & Asymptotam Curvæ, æquale erit. Spatium illud omne, quod Spiræ Oppositæ  $vpc$ ,  $vpc$  intra loca  $V$ ,  $v$ , quæ æqualiter à centro hinc inde sint remota, intus habent, hoc inquam spatium rectangulo  $ca \times cv$ , five duplo sectoris circularis  $icv$ , æquale erit.

Et si capiatur  $cd = c\pi$ , spatium illud, quod Spiræ Oppositæ inter loca  $v$ ,  $\pi$  intus habent,  $= \frac{1}{2}ca \times vd$ .

8. Hinc tempus, quo corpus per has Spiras latum sectorem  $vcp$  absolverit

verit erit ad tempus, quo è loco  $v$  distantias à centro devenient datâ quâvis SPIRA ARCHIMEDEÆ RECIPROCA. minores, ut  $vd$  ad  $cv$ . Idem verò tempus erit ad illud, quo è dato loco  $v$  emissum ad oppositum  $v$  corpus translatus fuerit, ut  $vd$  ad  $2cv$ .

9. Velocitas corporis per has Spiras lati, in loco quovis  $v$ , erit ad velocitatem corporis, viribus eisdem circulum, radio  $cv$ , circum  $c$  scribentis, ut recta quæ possit quadrata ex  $ca$ ,  $cv$  simul sumpta ad rectam ipsam  $ca$ : hoc est, si circulus, centro  $c$ , radio  $cv$  scriptus, occurrat radio, qui illum  $cv$  ad perpendicularum insistit, in puncto  $o$ , jungaturque  $ao$ , ut  $ao$  ad  $ca$ . Probanda sunt hæc, iisdem argumentis quibus § 11 & 12, casus superioris.

10. Sectores Circuli  $VvO$  Spiræque  $Vv$ , qui motu corporum æquali tempore conficiuntur, erunt inter se æquales. Et qui sunt æquales æquali tempore conficiuntur.

Sint  $vcn$ ,  $vcp$  sectores, Circuli ille, hic Spiræ, qui æquali tempore conficiuntur. Dico areas  $vcn$ ,  $vcp$  esse inter se æquales. A centro  $c$  in rectam  $vg$ , quæ Spiras in puncto  $v$  contingit, deducatur ad perpendicularum recta  $cg$ . Sector  $vcp$  ad sectorem  $vcn$ , qui æquali tempore conficitur, rationem habebit, quæ componitur è rationibus velocitatis corporis per spiras lati in loco  $v$  ad velocitatem corporis in circulo  $VvO$  circumacti, rectæque  $cg$  ad rectam  $cv$ . Nam hæc erit nascentium prima ratio, et quæ nascentium prima fuerit, ea semper inter illos manebit. Id enim eisdem argumentis, quæ in § 10 casus primi usurpavimus, probandum erit. Velocitas autem corporis per Spiras lati, in loco  $v$ , ad velocitatem corporis in Circulo  $VvO$  circumacti rationem habet quam  $ao$  ad  $ca$  (§ 10 hujus). Quare sector spiræ  $vcp$  ad sectorem circuli  $vcn$  rationem habet, quæ componitur è rationibus rectæ  $ao$  ad  $ca$  rectæque  $cg$  ad  $cv$ . Sed propter angulum  $cvg$  angulo  $qw$  (fig. 10) æqualem, angulosque etiam ad  $o$ ,  $w$  æquales, quippe quorum uterque rectus est; triangula  $cvg$ ,  $qw$  erunt inter se similia, et  $cg$  erit ad  $cv$  ut  $qw$  ad  $qy$ ; hoc est, secundum ea quæ in § 4 ostendimus, ut  $ca$  ad  $ao$ . Ratio igitur quæ componitur è rationibus rectæ  $ao$  ad  $ca$  rectæque  $cg$  ad  $cv$ , ea componetur è rationibus rectæ  $ao$  ad  $ca$  rectæque  $ca$  ad  $ao$ . Sector igitur spiræ  $vcp$  ad sectorem circuli  $vcn$  rationem habet eam, quæ componitur è rationibus rectæ  $ao$  ad  $ca$  rectæque  $ca$  ad  $ao$ . Sed hæc non alia est atque ipsa quidem æqualitas. Erit igitur sector  $vcp$  sectori  $vcn$  æqualis.

Rursus si æquales sunt sectores  $vcp$ ,  $vcn$ , dico eos æquali tempore confici. Sit enim  $vcn$  sector quidam circuli  $VvO$ , qui æquali tempore conficiatur atque sector spirarum  $vcp$ ; cui proinde ille æqualis erit, secundum ea quæ modò ostendimus. At verò sector spirarum  $vcp$  sectori circulari  $vcn$  æqualis est: sic enim posuimus. Sectores igitur circulares  $vcn$ ,  $vcn$  inter se æquales. Æqualibus igitur temporibus conficiuntur (Prop. I. Lib. 1. Princip.) At verò  $vcn$  tempore ejus æquali, quo sector spirarum  $vcp$ , conficitur. Quare et alter  $vcn$  tempore conficietur æquali ejus, quo sector spirarum  $vcp$ . Q. E. D.

11. Sint  $V$ ,  $v$  Spirarum Oppositarum loca à centro æqualiter remota. Tempus translationis de loco  $V$  in locum  $v$  per Spiras ad tempus conversionis integræ in Circulo, cujus radius  $cv$ , rationem habebit eam quam dupla  $ca$  ad totius circuli circuitum.

Vol. III.

\* F

Spatium

PARS PRIMA.  
CASUS  
QUINTUS.

Spatium illud omne quod Spiræ Oppositæ inter loca V, v intus habent, duplo sectori circulari vci æquale est (§ 7 hujus). Tempus igitur translationis de loco V in v per Spiras æquale est ei, quo corpus, quod per circulum feratur, confecerit duplum sectorem vci (§ 10 hujus). Ac proinde tempus translationis de loco V in v per Spiras eandem ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habet, quam tempus, quo corpus in circulo confecerit duplum sectorem illum vci, ad tempus conversionis integræ; five eam, quam duplus sector vci ad aream totius circuli rationem habet eam quam duplus arcus vi ad totum circuitum; hoc est, cum arcus vi rectæ CA factus fuerit æqualis, eam, quam dupla CA ad circuitum circuli VvO. Tempus igitur translationis de loco V in v per spiras ad tempus conversionis integræ per circulum VvO rationem habet eam, quam 2CA ad circuli circuitum. Q. E. D.

## CASUS QUINTUS PARTIS PRIMÆ.

RELIOVIS (in fig. 10) manentibus quæ prius posita sunt, puta talem esse angulum cvg, ut quadratum è radio minus sit quàm quod ad quadratum ex cosinu ejus anguli rationem habeat, quam  $cn + cv$  ad  $cv$ . Ita CA minor erit quàm recta, cujus quadratum duplum sit quadrati ex uv. Quadratum igitur ex CA minus erit quàm duplum quadrati ex uv. Sit  $b$  recta duarum  $cv$ ,  $\sqrt{2uv^2 - CA^2}$  proportionem media. Ita erit  $b^2 = cv \times \sqrt{2uv^2 - CA^2}$ . Et  $b^4 = cv^2 \times 2uv^2 - CA^2 = cv^2 \times 2uQ^2 - 2QW^2 - CA^2$ .

At verò inventa est  $uQ = \sqrt{\frac{a^4 + a^2c^2}{2c^2}}$ . Unde veniet  $2uQ^2 \times cv^2 = CA^4 + CA^2 \times cv^2$ . Atque hinc rursum  $b^4 = CA^4 - 2cv^2 \times QW^2 = a^4 - 2q^4$ .

Cum igitur inventa est  $RT = \sqrt{\frac{a^4 - 2q^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ , erit eadem  $RT = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^2}}$ , et  $zRT = \frac{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}{y}$ .

Hinc calculis ut antè subductis, veniet  $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ . Et  $d\epsilon = \frac{CV^2 \times q^2}{y \sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ .

Curva igitur, cujus ordinata est  $dc$ , in earum genere est per quarum quadraturas casum secundum et tertium absolvimus, et similem quadraturam ipsa subitura est; et per hujus quadraturam, non modò punctum i. sed et alia dabuntur, quot quis voluerit, Curvæ vii puncta.

## COMPOSITIO CASUS QUINTI.

In rectâ  $cv$  infinitè, si id opus sit, producendâ (fig. 19), capiatur ea ejus longitudinis, quæ habeat ad rectam  $ca$  (lineatione eâ quam in analysi præcepimus definiendam) rationem eam, quam quadratum è rectâ  $cv$  ad quadratum è rectâ  $b$ . Jungatur  $cb$ , fig. 10. Et à puncto  $c$ , fig. 19, ad perpendicularum cum rectâ  $ca$  educatur  $ce$ , quæ rectæ  $cb$  fiat æqualis. Centro  $c$ , semiaxibus transverso quidem  $ce$ , secundo  $ca$ , scribatur Hyperbola. Huic hyperbolæ recta, à puncto  $v$  ad axem secundum  $ca$  ordinatimeducta, in  $S$  occurrat, jungaturque  $cs$ . Sumatur

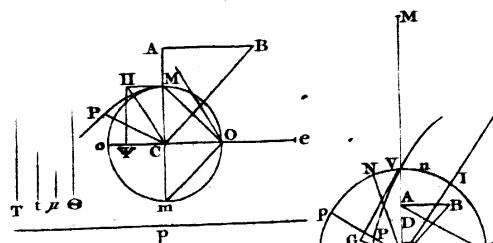
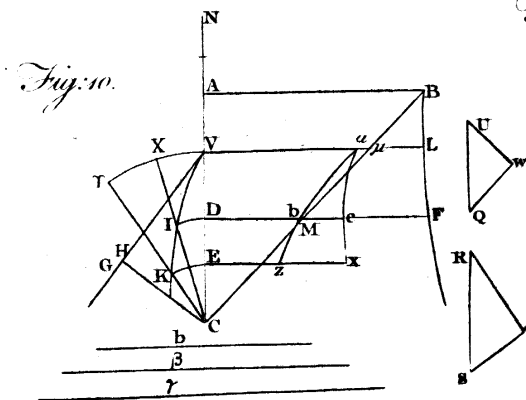
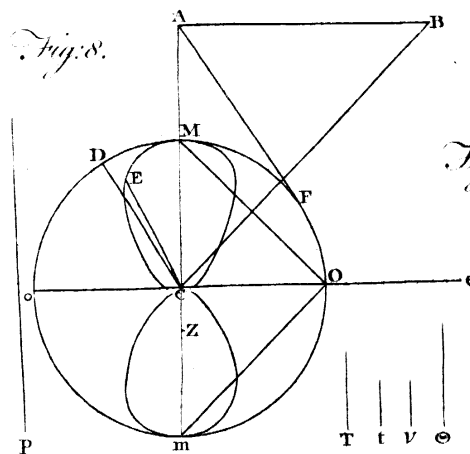


Fig. 17.

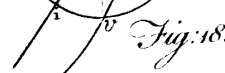


Fig. 18.

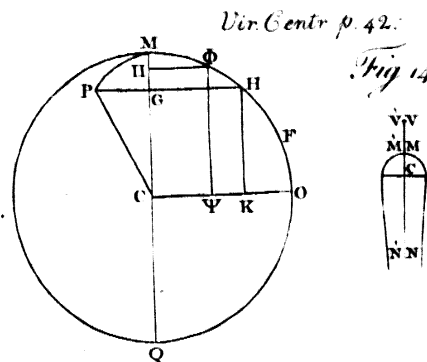


Fig. 9.

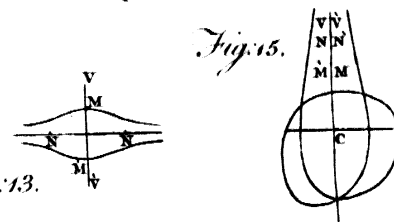


Fig. 13.

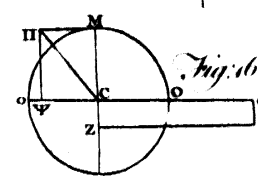


Fig. 16.

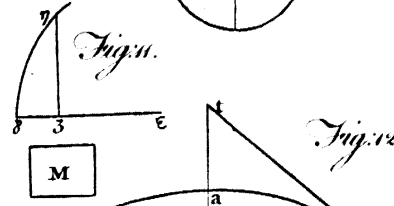


Fig. 11.

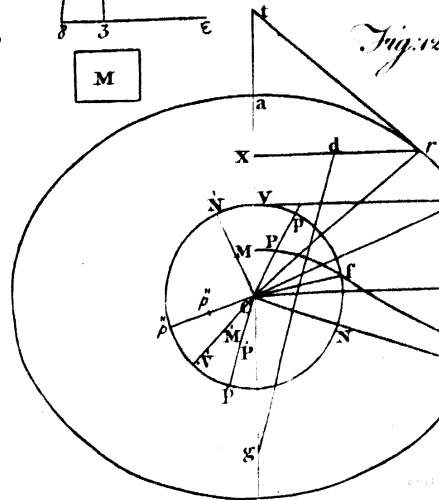


Fig. 12.

matur in axe ca aliud quodvis punctum x. Educatur  $xr$  ad axem ca ordinatim, quæ hyperbolæ in  $r$  occurrat. Jungatur  $cr$ . Centro  $c$ , radio  $cv$ , describatur circulus. Ejus circuli capiatur sector  $vc\phi$ , qui ad sectorem hyperbolicum,  $ecr$ , rationem habeat eam quam  $q'$ , sive rectangulum  $cv \times qw$ , ad quadratum ex  $ca$ . Ducatur recta  $ri$ , quæ hyperbolam in  $r$  contingens axi ca in  $i$  occurrat. In rectâ  $c\phi$  capiatur  $c\phi$ , quæ ad  $ct$  eam rationem habeat, quam quadratum ex  $cv$  ad quadratum ex  $ca$ . Si è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  (fig. 10), corpus quodpiam emissum fuerit, cum velocitate quâdam, quæ velocitatem corporis, motu suo circum centrum  $c$  ad distantiam  $cv$  circulum scribentis, eâ ratione superârit, quâ recta data  $ed$  (in fig. 11) superat datam  $d\zeta$ : si cum hac inquam velocitate corpus è loco  $v$  secundum rectam  $vg$  emissum fuerit, feretur illud per Curvam, ejus quam punctum  $p$  in fig. 19 tangit, per omnia similem & æqualem.

## DEMONSTRATIO.

In figurâ 10, quam ad analysin ornavimus, capiatur distantia  $cd$ , duarum  $cx$ ,  $cv$  figuræ modò scriptæ, id est,  $19^{\circ}$ , proportionem tertiâ; existentibus utique illis  $cv$  utriusque figuræ inter se æqualibus. Jam rectam  $xr$  rectæ  $rt$  duplam esse, id similiter planè ac in casu secundo & tertio ostendendum.

Tum etiam  $\dot{cx}$  esse ad  $\dot{cd}$  ut  $cx$  ad  $cd$ . Unde sequetur etiam rectangulum  $\dot{cx} \times xr$ , sive fluxionem spatii hyperbolici  $ecxr$ , esse ad rectangulum  $\dot{cd} \times xr$  ut  $cx$  ad  $cd$ . Rursus fluxionem trianguli  $cxr$  fluxioni rectanguli  $cx \times rt$  æqualem esse, id quoque sicut antè patet. Unde eisdem planè argumentis ac antè efficietur, fluxionem trianguli  $cxr$  esse ad rectangulum  $\dot{cd} \times rt$ ,  $\dot{cd} \times rt$  simul sumpta ut  $cx$  ad  $cd$ . Sed fluxio spatii hyperbolici  $ecxr$  ad rectangulum  $\dot{cd} \times xr$ , sive  $2\dot{cd} \times rt$ , ostensa est rationem habere quam  $cx$  ad  $cd$ . Quare  $\dot{cxr} - \dot{ecxr}$ , hoc est  $-\dot{ecr} : \dot{cd} \times rt - \dot{cd} \times rt = cx : cd$ . Hoc est, fluxio sectoris hyperbolici  $ecr$  ad contrariam rectanguli  $\dot{cd} \times rt$  fluxionem rationem habebit eam, quam  $cx$  ad  $cd$ . Aream autem hyperbolicam  $ecr$  atque rectangulum  $\dot{cd} \times rt$  modis contrariis fluere, inde patet, quòd area hyperbolica  $ecr$  eodem modo fluit quo recta  $cx$ ; rectangulum autem  $\dot{cd} \times rt$  eodem modo quo recta  $cd$ : primum enim exigit hyperbolæ natura; alterum, æquatio illa  $rt \times cd = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$ . Rectæ autem  $cx$ ,  $cd$ , quæ datum spatium comprehendunt, modis inter se contrariis fluunt.

Jam verò cum ex eo quòd sit  $rt = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2y^4}}$  veniat  $rt \times cd = \sqrt{\frac{b^4 + a^2y^2}{2}}$ , erit  $\dot{rt} \times cd = \frac{a^2y\dot{y}}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}}$ .

Unde  $\dot{rt} \times cd \times \frac{q'cv^2}{a^2y} = \frac{q'cv^2}{\sqrt{2b^4 + 2a^2y^2}} \dot{y} = dc \times -\dot{vd}$ .

Fluxio igitur areæ  $avdc$  (fig. 10) ad contrariam rectanguli  $rt \times cd$  fluxionem rationem habebit compositam è rationibus spatii  $q'$  ad quadratum ex  $ca$ , quadratique ex  $cv$  ad quadratum ex  $cd$ . Jam verò ex eo quòd area  $avdc$  contrariam

**PARS PRIMA. CASUS QUINTUS.** contrariam rectanguli  $RT \times CD$  fluxionem rationem habeat ex quibus modò diximus compositam; atque ex eo quòd fluxio rectanguli  $RT \times CD$  ad contrariam sectoris hyperbolici  $ecr$  (in fig. 19) fluxionem rationem habeat, quam  $cd$  ad  $cx$ ; efficietur ut antè fluxionem spatii  $avdc$  ad similem sectoris hyperbolici  $ecr$  fluxionem rationem habere eam, quam  $cv \times qw$  ad quadratum ex  $ca$ . Unde rursum sequetur sectorem hyperbolicum  $ecr$ , dato  $ecS$  majorem esse quam ut habeat ad  $avdc$ , sive sectorem circulem  $vex$ , rationem eam quam quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ . Habebit igitur sector hyperbolicus  $Src$  (fig. 19) ad sectorem circulem  $vex$  (fig. 10) rationem eam quam quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ .

Circuli  $cvp$  (in fig. 19) capiatur sector  $vcp$ , ad quem sector hyperbolicus  $ecS$  rationem habeat quam quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ . Punctum  $f$  erit ad Curvam, ad quam est punctum  $p$ . Id enim sicut antè ostenditur. Et cum sit sector hyperbolicus  $ecr$  ad sectorem circuli  $vcp$ , ut quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$  (ita enim factum est) et sector hyperbolæ  $ecS$  ad sectorem circuli  $vcp$  ut quadratum ex  $ca$  ad  $cv \times qw$  (nam id quoque factum est) idcirco erit sector hyperbolæ  $Src$  ad sectorem circuli  $fcp$  ut quadratum ex  $ca$  ad rectangulum  $cv \times qw$ ; id est ut sector idem hyperbolæ  $Src$  ad sectorem circulem  $vex$  in figurâ 10. Sectores igitur circulares  $vex$  istius figuræ 10,  $fcp$  hujus 19, erunt inter se æquales. Quare propter radios  $cf$ ,  $cv$  inter se æquales, anguli quoque  $vex$  inter se æquales erunt. Jam verò rectas illas  $cp$ , hujus figuræ 19, ipsi  $ci$  istius 10 æquales esse, id eodem planè modo ac antè ostendendum erit. Et simili argumentatione alii omnes Curvarum  $vi$ ,  $fp$  radii, qui cum primariis  $cv$ ,  $cf$  angulos æquales faciunt, ostenduntur inter se æquales. Curvæ igitur per omnia inter se similes erunt & æquales. Q. E. D.

*De Naturâ Curvæ  $fp$  perficiendæque ejus figurâ, &c.*

#### DEFINITIO.

*Puncta  $r$ , & Hyperbolæ Curvæque cognata dico.*

2. Curva  $fp$  gyris innumeris centrum cingit, quorum arctissimi propius centrum accesserint quam pro datâ quâvis distantia.

Asymptota.

3. Curva  $fp$  rectam  $ca$ , infinitè protensam, Asymptotam habet. Cum enim sector circuli  $fcv$  sit ad sectorem hyperbolæ  $Sce$  ut  $ca^2$  ad  $cv \times qw$ , translato puncto  $p$  in  $v$ , punctum  $r$  cum  $e$  jungetur, & radius  $cp$  cum radio  $cv$ . Quare punctum illud Curvæ, quod puncti  $e$  sit cognatum, in rectâ  $cv$  quærendum erit. At verò puncto  $r$  in  $e$  translato, punctum  $x$  cum centro  $c$  coierit, & recta  $ex$  in nihilum abierit. Quare recta  $cp$ , vel illi æqualis  $cr$ , finitam omnem longitudinem exsuperabit. Q. E. D.

4. Scribatur hyperbola  $peu$  hyperbolæ  $rem$  opposita. Si capiatur circuli  $pvu$  sector  $vcp$ , sectori  $vcp$  æqualis, et in radio  $cp$  pars  $cq$ , radii  $cp$  parti  $cr$  æqualis; punctum  $q$  ad Curvam erit, Curvæ  $fp$  per omnia similem & æqualem, sed ad contrariam partem axis  $ca$ : quæ quidem eodem modo ex semihyperbolâ oppositâ  $eq$  formari possit, quo formata est  $fp$  ex semihyperbolâ  $er$ . Quòd si in diametris  $pp$ ,  $rr$  capiuntur  $cr$ ,  $cq$  rectis  $cr$ ,  $cq$  æquales,

æquales, ad contrarias partes centri  $c$ ; puncta  $p$ ,  $q$  erunt ad Curvas, earum quibus insunt  $p$ ,  $q$ , per omnia similes & æquales, sed à contrariâ parte centri sitas: quæ quidem ex semihyperbolis  $em$ ,  $eu$  eodem planè modo formari possint, quo priores illæ ex semihyperbolis,  $er$ ,  $em$ . Hæ Curvæ unam quandam figuram constituere censendæ, sicut semihyperbolæ, ex quibus formantur unam: et Spiræ Hyperbolice Secundæ haud immerito vocari possunt.

5. Perfecta igitur figura quatuor constat brachiis, quorum duo, ab alterâ parte centri infinitè proferentia, asymptotâ gaudent communi  $ca$ ; ab alterâ parte duo, asymptotâ  $ca$ .

6. Si rectæ  $cx$  capiatur pars  $xg$ , quæ ad totam  $cx$  rationem habeat quam recta  $qv$  (fig. 10) ad rectam  $cv$ , & à puncto  $g$  ad punctum  $d$ , quod rectam  $xr$  mediam dividat, ducatur  $gd$ ; angulus  $gdx$  inclinatio erit radii  $cr$  ad Curvam, existentibus utique punctis,  $r$ ,  $p$ , Hyperbolæ Curvæque cognatis. Probatum eodem modo quo § 6 casus secundi.

7. Per  $a$ , femiaxis hyperbolæ secundi verticem, ducatur recta  $ak$  cum axe transverso parallela, quæ asymptotarum alteri in  $k$  occurrat. Recta  $ak$  media dividatur in puncto  $l$ . Capiatur  $aq$ , quæ ad femiaxem secundum  $ca$  rationem habeat eam, quam  $qv$  ad  $cv$ , et jungatur  $ql$ . Angulus, quo radius quilibet Spirarum  $cr$  ad Curvam inclinatur, angulo  $qla$  minor erit. Sed radio mobili  $cr$  circum centrum  $c$  circumactò, & infinitè immutato, angulus inclinationis ille usque augebitur; ut ad æqualitatem dati  $qla$  propius tandem accedat quam pro datâ quâvis differentiâ. Probatum ut § 17 casus secundi.

8. Hæ spiræ Apfidem nullam habent. Radio enim  $cr$  infinitè immutato angulus inclinationis maximus evadit; recto tamen minor est, utpote acuto  $qla$  æqualis. Radio autem  $cr$  infinitè crescente angulus ille usque minuetur, ut ultimò omni acuto rectilineari minor fiat.

9. Si corpus è loco  $f$ , in alterâ Spirarum dato, secundum rectam quæ Spiræ ibi loci contingat, eâ cum velocitate emissum fuerit, ut per Spiram illam deferatur, intra certum quoddam temporis spatium, quod quantum sit futurum mox definire docebo, propius centrum  $c$  delatum fuerit quam pro datâ quâlibet distantia. Elapso autem tempore illo, oppositum Spiræ brachium, ad contrarias axis centrique partes, invaserit, cujus ductum sequens infinitas usque longinquitates à centro abibit.

10. Ad quadraturam partium harum Spirarum, quæ radii positione datis interceptæ sint, hanc nobis æquationem analysis expromebat.  $Db =$

$$\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2 y^2}} \quad \text{Hinc } Db \times -y, \text{ sive fluxio areæ } avdb, = -\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2 y^2}}.$$

Quare area  $avdb$  unâ cum fluente fluxionis  $\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2 y^2}}$  dato cuidam spatio æqualis erit.

Sed fluens fluxionis  $\frac{q^2 \times y}{\sqrt{2b^4 + 2a^2 y^2}}$  erit  $\frac{q^2}{2a^2} \sqrt{2b^4 + 2a^2 y^2}$  (per TAB. Newton.

II. Class. iv. Form. 1.)  $= \frac{q^2}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2} = \frac{q^2}{c} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$ . Quare  $avdb + \frac{q^2}{c} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + y^2}$  dato cuidam spatio æquale erit. Positâ igitur  $cn$  sive  $y = cv$ , ut area

SPIRÆ HY-  
PERBOLICÆ  
SECUNDÆ.

area  $avdb$  in nihilum abeat, veniet  $\frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + cv^2}$  dato isti æquale. Hinc area  $avdb$ , five sector  $fcp$ ,  $= \frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + cv^2} - \frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + cd^2}$ . Positæque  $y$ , five  $cd$ ,  $= 0$ , area  $fpc$  à loco  $f$  centrum usque  $= \frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + cv^2} - \frac{b^2}{a}$ . Et area  $pc$ , à loco  $p$  centrum usque,  $= \frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{b^4}{a^2} + cd^2} - \frac{b^2}{a}$ . Vel pro  $b^4$  scripto  $y^2 \times cm^2$ , five  $2y^2 \times cd^2$ , area  $pc = \frac{q^2}{C_e} \sqrt{\frac{2y^2 \times cd^2 + a^2 cd^2}{a^2} - \frac{y \times \sqrt{2} \times cd}{a}} = \frac{q^2 \times cd}{C_e \times CA} \sqrt{2y^2 + a^2} - \sqrt{2} \times y$ . Cujus æquationis hæc erit constructio.

Constituatur triangulum  $\Gamma\gamma f$  angulo ad  $\gamma$  recto, lateribus  $\Gamma\gamma$ ,  $f\gamma$  rectæ  $\gamma$  singulatum æqualibus (vid. fig. 20). A puncto  $\Gamma$  ad perpendicularum educatur  $\Gamma a$ , rectæ  $ca$  æqualis; et jungatur  $af$ , & ab  $af$  auferatur  $\beta\delta$  rectæ  $\Gamma f$  æqualis. Ad rectam  $ce$  (fig. 19) vel  $cb$  (fig. 10) applicetur rectangulum spatio dato  $q^2$  æquale, et latus applicati sit  $n$ . Capiatur  $m$  quæ sit ad  $n$  ut  $cd$  ad  $ca$ . Rectangulum  $m \times \delta a$  spatio  $pc$  æquale erit.

Velocitas in  
his Spiris.

11. Si circulus, centro  $c$ , radio  $cv$  scriptus, rectæ  $ce$ , quæ illam  $cv$  ad perpendicularum infisit, in  $o$  occurrat, & jungatur  $ao$ ; velocitas corporis per Spiras lati in loco  $f$  erit ad velocitatem corporis in Circulo, cujus radius  $cf$ , ut  $ao$  ad  $ca$ . Offendetur ut § 12 casus 3.

Tempora mo-  
vendi per  
Spiras Hy-  
perbolicas  
Secundas.

12. Hinc tempus, quo corpus è loco Spirarum  $f$  distantiam à centro datâ quâvis minorem delatum fuerit, ad tempus conversionis integræ in Circulo rationem habebit eam, quæ componitur è rationibus radii ad integrum circuli circuitum, rectangulique  $uq \times \delta a$  ad rectangulum  $ao \times cb$ . Et si capiatur illius  $\delta a$  magnitudo illa, quam, angulo  $quw$  infinitè imminuto, ultimò ea adepta fuerit, quando angulus ille ad nihilum redactus fuerit, ita tempus casus recti definieris, à loco  $f$  centrum usque; corporis utique, quod è loco  $f$ , secundum rectam ipsam  $fc$ , eâ cum velocitate dejectum fuerit, quâcum secundum rectam, Spiras in loco  $f$  contingentem, projici illud oporteat, ut per Spiras deferatur. Cæterum ultima illa rectæ  $\delta a$  magnitudo hæc erit;  $\sqrt{2} \times uq - \sqrt{2uq - ca^2}$ .

## PROBLEMATIS GENERALIS.

### PARS SECUNDA.

PARS  
SECUNDA.

JAM verò vires centrales in earum genere sint, quæ fugam centri corporibus inducant.

E dato loco  $v$  (fig. 21) secundum rectam  $vg$  positione datam, emissum puta corpus quodpiam, datâ cum velocitate. Oportet definire Curvam, per quam corpus illud deferetur, si viribus centrifugis urgeatur, quæ centrum  $c$  respiciant, & rationem triplicatæ distantiarum contrariam inter se constanter servant.

Factum puta, et sit  $vk$  Curva illa quam definire suscepimus. Detur punctum  $A$ , unde si corpus, nullâ vi insitâ præditum, propellentibus vi-  
ribus

ribus centrifugis, ascensum rectâ accepisset, velocitatem in loco  $v$  adeptum esset, ejus æqualem quâcum è loco illo  $v$  secundum rectam  $vg$  exire gestit. Et manentibus quæ ad demonstrationem nostram Prop. xli. Libri Primi Principiorum à nobis lineata sunt, intelligatur recta  $AB$  ejus lineationis rectæ  $ca$  æqualis esse. Dataque recta  $ca$  vel  $ab$  designetur literâ  $a$ , data  $cv$  literâ  $c$ , indefinita  $cd$  literâ  $y$ . Jam cum è natura Curvæ  $BF$ ,  $DF$  sit ad  $AB$  ut vis centralis in loco  $D$  ad vim centalem in loco  $A$ , hoc est, ut cubus ex  $ca$  vel  $ab$  ad cubum ex  $cd$ , erit  $DF = \frac{AB^3}{CD^3}$   $AB = \frac{a^4}{y^3}$ . Ergo

$DF \times y = \frac{a^4}{y^2} y$ . Harum verò fluxionum sunt fluentes, alterius quidem area

$BADF$ ; alterius, spatium  $-\frac{a^4}{2y^2}$ : ubi id significat signum  $-$ , spatium  $\frac{a^4}{2y^2}$ , areamque  $BADF$  æqualiter quidem sed contrariè fluere. Area igitur  $BADF$ , spatio  $\frac{a^4}{2y^2}$  auctum dato cuidam spatio æquale erit. Decrescat recta  $cd$  usquedum illi  $ca$  æqualis fiat; coeunte puncto  $D$  cum illo  $A$ , area  $BADF$  in nihilum abierit, spatium autem  $\frac{a^4}{2y^2}$  dimidio quadrati ex  $ca$  æquale fiet. Totum igitur illud  $BADF + \frac{a^4}{2y^2}$ , in hoc situ puncti  $D$ , dimidio quadrati ex  $ca$  æquale erit. Quare dimidium quadrati ex  $ca$  est datum illud, cui  $BADF + \frac{a^4}{2y^2}$

semper est æquale. Quare  $BADF + \frac{a^4}{2y^2} = \frac{1}{2} a^2$ . Hinc  $BAVL$ , five  $uq^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{a^4}{2c^2}$ , et  $uq = \sqrt{\frac{a^2 c^2 - a^4}{2c^2}}$ .  $rs = \sqrt{\frac{a^2 y^2 - a^4}{2y^2}}$ . Sed  $st = \frac{q^2}{y}$ . Quare  $st = \frac{2y^2}{2y^2}$ . Et  $rt = \sqrt{\frac{a^2 y^2 - a^4 - 2q^2}{2y^2}}$ . Ex eo quòd inventum est  $uq^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{a^4}{2c^2}$ , manifestum est quadratum ex  $ca$  majus esse quàm duplum quadrati ex  $uq$ . Majus itaque quàm duplum quadrati ex  $uw$ ; nempe cum quadratum ex  $uw$  quadrato ex  $uq$  majus esse nesciat. Sit igitur  $b$  datarum  $cv$ ,  $\sqrt{ca^2 - 2uw^2}$  proportionem media. Erit igitur  $b^2 = cv \times \sqrt{ca^2 - 2uw^2}$  et  $b^4 = cv^2 \times ca^2 - 2uw^2 = cv^2 \times ca^2 - 2uq^2 + 2qw^2$ . Sed ex eo quòd sit  $uq^2 = \frac{c^2 a^2 - a^4}{2c^2}$ , efficitur  $2cv^2 \times uq^2 = cv^2 \times ca^2 - a^4$ . Unde rursum  $b^4 = ca^4 + cv^2 \times qw^2 = a^4 + 2q^2$ .

Hinc  $rt$ , quæ inventa est  $= \sqrt{\frac{a^2 y^2 - a^4 - 2q^2}{2y^2}}$ , eadem inquam  $rt = \sqrt{\frac{a^2 y^2 - b^4}{2y^2}}$ .

Unde, calculis ut in superioribus subductis, veniet  $db = \frac{q^2 \times y}{\sqrt{2a^2 y^2 - 2b^4}}$ . Et

$$dc = \frac{q^2 \times cv^2}{y \sqrt{2a^2 y^2 - 2b^4}}$$

Curva igitur, cujus ordinata  $dc$ , in eodè genere est in quo priores illæ, per quarum quadraturas Casum 2, 3 & 5 Partis Primæ absolvimus. Et per similem hujus Curvæ quadraturam, casus ille Problematis, de quo nunc agitur, conficiatur.

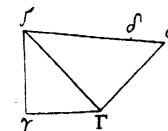
C O M P O



*Vir. Centr.* p. 48.

Fig:19

*Fig: 21.*



*Fig: 22*

F I N I S.

UNIVERSITÀ CATTOLICA S. CUORE  
BRESCIA  
BIBLIOTECA -  
num. 100.538  
dono  
cambio  
data